MATEMATIČKA NARAV FIZIČKIH VELIČINA

Vektori

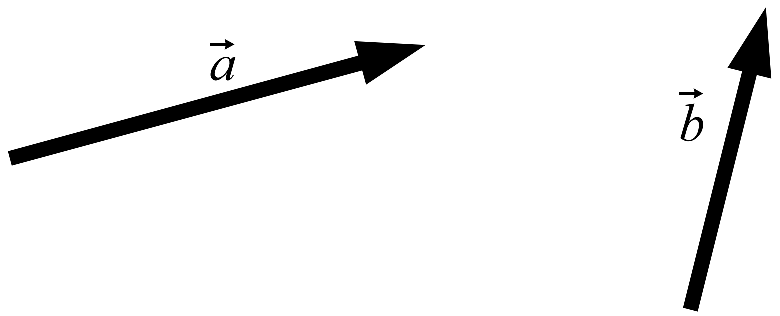
Veličine koje se opisuju **brojevima, jednim ili više njih**, i ti su brojevi zavisni od koordinatnog sustava.

Primjeri: pomak, brzina, ubrzanje, sila,....

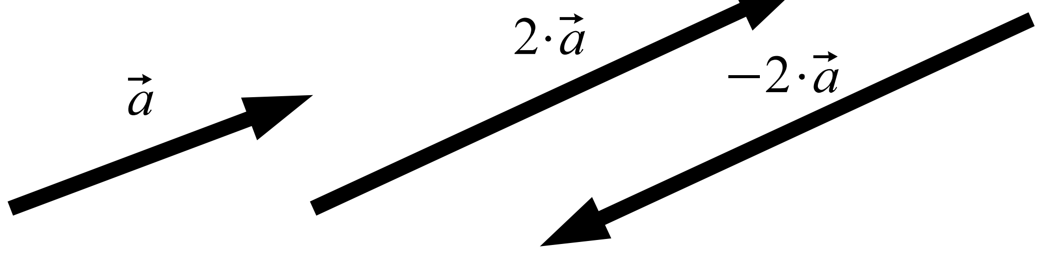
Da bismo označili vektorsku narav određene veličine, nad oznakom dotične veličine stavljat ćemo vodoravnu strjelicu.

Naprimjer, $\vec{a}$, $\vec{F}$, itd. su vektori.

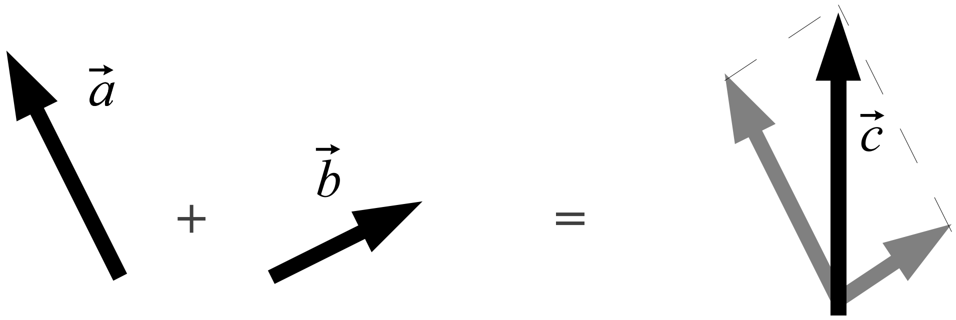
- Vektore možemo predočavati grafički:



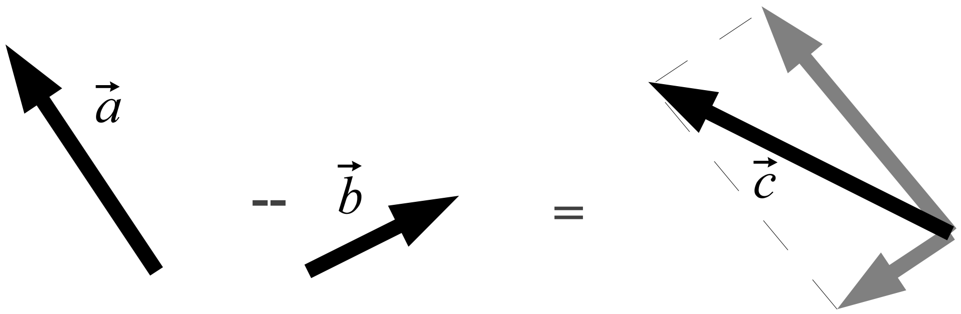
- Vektore možemo množiti sa skalarima



- Vektorima **ne možemo** pribrajati skalare, ili ih oduzimati od njih.
- Vektore možemo međusobno zbrajati i oduzimati.



$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$$



$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$$

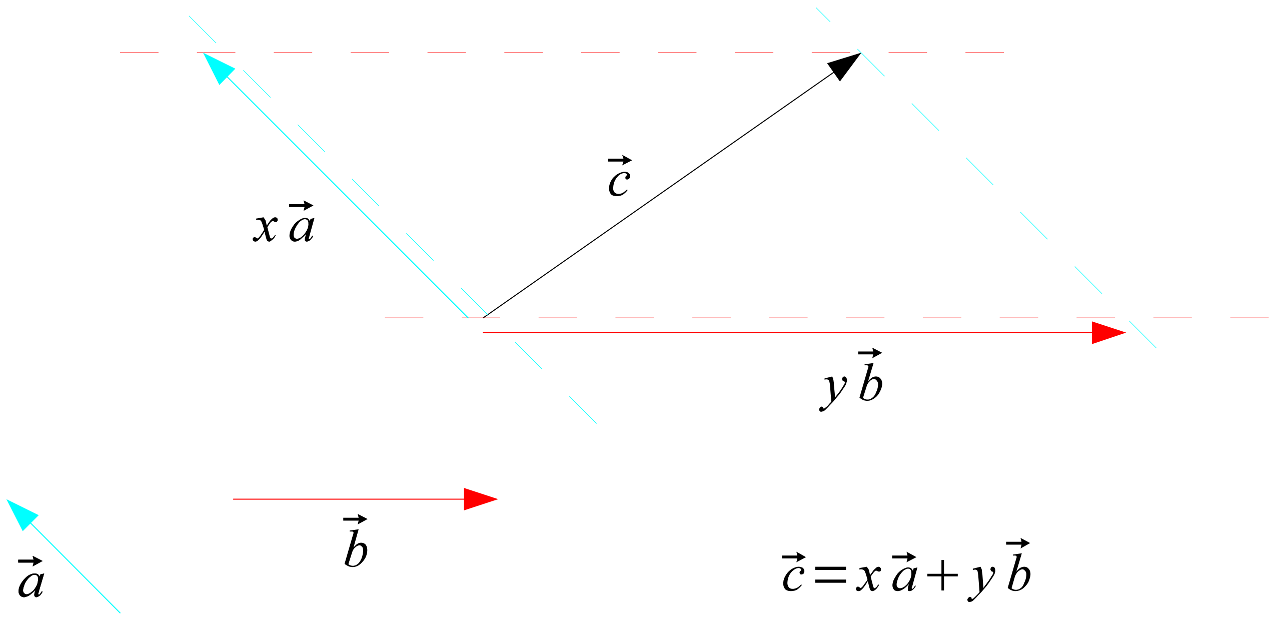
- **Svaki vektor ima tri značajke:** iznos (modul, apsolutna vrijednost), smjer (pravac) i orijentaciju (na svakom pravcu je moguće gibanje u "+" ili u "-" smislu)

Primjer:

1.) Zagreb-Split ---- smjer vektora
udaljenost između Zagreba i Splita ---- iznos vektora
od Zagreba prema Splitu, ili obrnuto ---- orijentacija vektora

2.) Primjena sile na određeni predmet

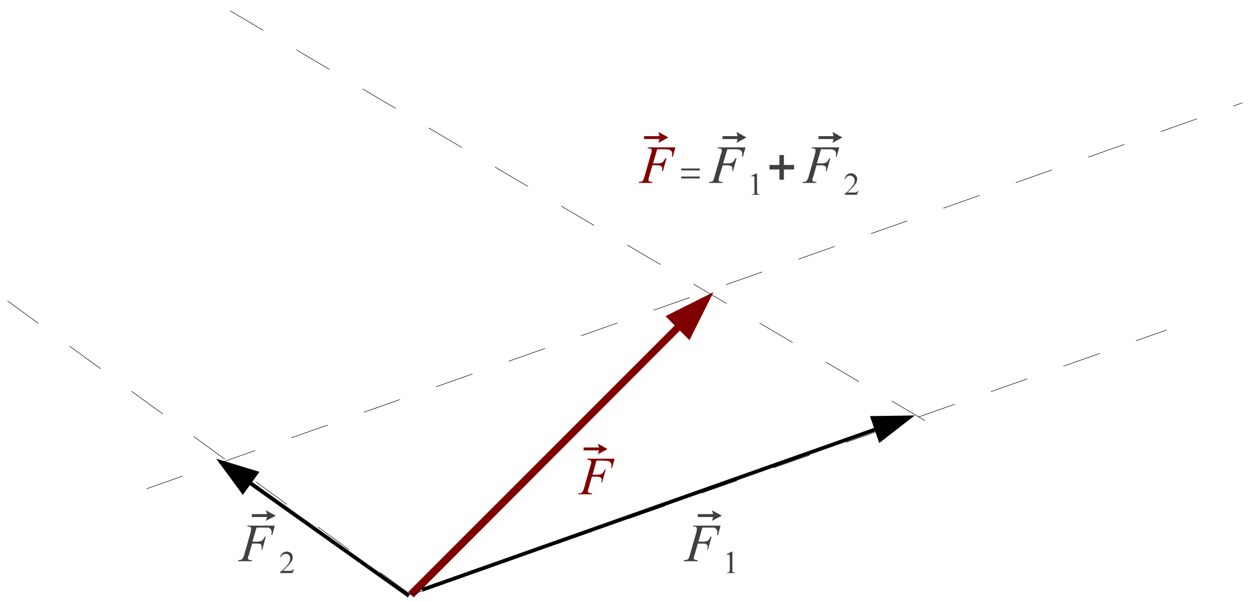
Rastavljanje vektora. Linearna (ne)zavisnost vektora.



U ravnini su bilo koja tri vektora linearno zavisna. To znači da se svaki od triju vektora može prikazati kao linearni spoj preostalih dvaju vektora.
Dva su vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ linearno **nezavisna** ako jednadžba $x\vec{a}+y\vec{b}=0$ povlači $x=0$ i $y=0$. U suprotnom su slučaju vektori linearno zavisni. Najveći mogući broj linearno nezavisnih vektora jednak je dimenziji prostora u kojem se ti vektori nalaze.
Bilo koja se dva linearno nezavisna vektora u ravnini mogu uzeti kao bazni vektori.
Slično tomu, bilo koja se tri linearno nezavisna vektora u prostoru mogu uzeti kao bazni vektori.
Svaki se vektor u prostoru može prikazati kao linearni spoj triju triju baznih vektora.

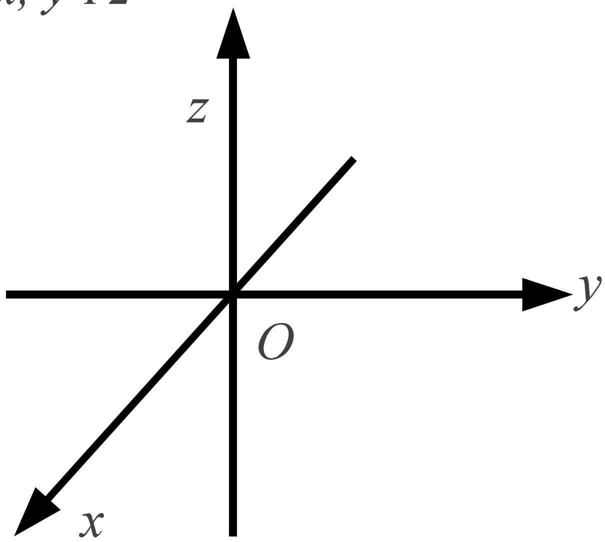
U fizici i tehnici često trebamo odgovoriti na pitanje: "Kolikim svojim dijelom *ova sila* djeluje u *tom i tom smjeru,* a kolikim svojim dijelom djeluje u *onom drugom* smjeru?" Sila je predočena vektorom $\vec{F}$, pa tako postavljeno pitanje ima svoj egzaktniji, matematički, oblik: "Kako prikazati dotični vektor kao zbroj neka druga dva vektora koji imaju različite smjerove?" Odgovor na to pitanje je sljedeći:

Iz početka vektora $\vec{F}$ i iz njegova vrha povučemo paralele sa zadanim smjerovima dvaju vektora. Dobili smo dva para paralela i dva sjecišta tih paralela. Ta sjecišta su vrhovi dvaju vektora, a početci vektora su u početku polaznog vektora $\vec{F}$. To je prikazano na donjoj slici.



Dva smjera na koja rastavljamo određenu silu najčešće su okomita, ali to nije nužno, tj. dvije komponente ne moraju biti međusobno okomite. Dakle, riječ je o obrnutom postupku zbrajanja sila po pravilu paralelograma—moramo naći dvije sile čiji će zbroj dati određenu silu.

- U svijetu u kojem živimo postoje **tri** nezavisna smjera:
  1.) Naprijed-nazad
  2.) Desno-lijevo
  3.) Gore-dolje
- To možemo matematički predočiti kao **Kartezijev pravokutni koordinatni sustav** s trima međusobno okomitim osima: *x, y* i *z*



- Točka *O* u kojoj se sve tri osi sijeku je **ishodište sustava.**
- Svaka od triju osi je **orijentirana.**
- Svakoj osi (pravcu) možemo pridružiti vektor **jediničnog iznosa.**
- Imamo tri jedinična vektora: $\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}$. To su **osnovni** ili **bazni** vektori, koji tvore **ortonormiranu bazu**.
- **Svaki** vektor možemo prikazati kao **linearni spoj (kombinaciju)** osnovnih vektora:

$$\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}$$

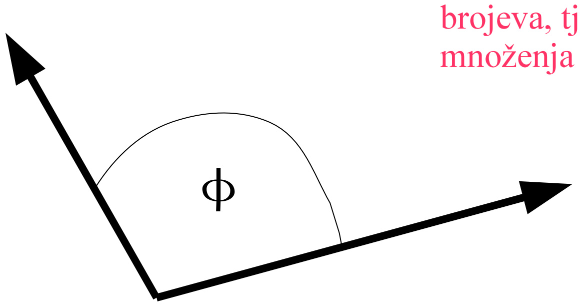
- **Brojevi** a_x, a_y, a_z su **koordinate vektora.**

MNOŽENJE VEKTORA

Skalarni umnožak

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\phi)$$

Ovo je definicija skalarnog umnoška dvaju vektora. Lijeva strana jednadžbe je skalarni umnožak dvaju vektora, a desna strana je umnožak triju brojeva, tj. skalara. Rezultat skalarnog množenja je skalar, a ne vektor.



$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	**1**	**0**	**0**
$\vec{j}$	**0**	**1**	**0**
$\vec{k}$	**0**	**0**	**1**

Ovo je tablica skalarnoga množenja vektora ortonormirane baze. Ta tablica slijedi iz definicije skalarnoga umnoška.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

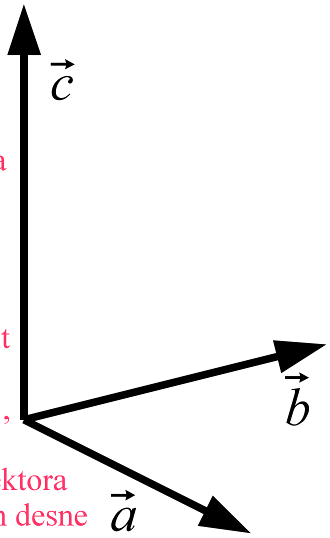
$$|\vec{b}|=\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}$$

$$\cos(\phi)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

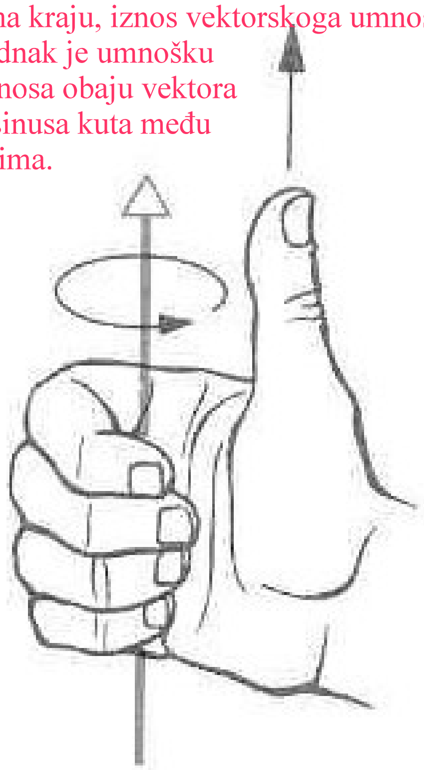
Ovo slijedi iz distributivnosti množenja prema zbrajanju. Pri tome se vektori baze množe kao vektori po definiciji skalarnoga umnoška, a koordinate se vektora množe kao brojevi.

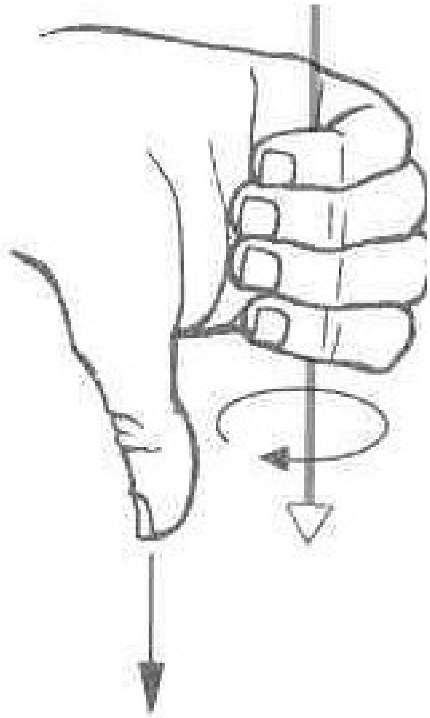
Vektorski umnožak. Pravilo desne ruke.

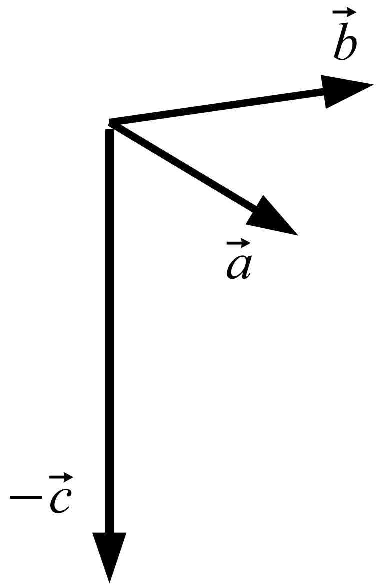
$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$$



Rezultat vektorskog množenja dvaju vektora opet je vektor.
Tome vektoru moramo definirati smjer, iznos i orijentaciju.
Smjer vektora $\vec{c}$ okomit je na ravninu što ju definiraju vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj. okomit je na oba ta vektora. Orijentaciju vektora $\vec{c}$ određujemo pravilom desne ruke, kako je to prikazano na slici.
I na kraju, iznos vektorskoga umnoška jednak je umnošku iznosa obaju vektora i sinusa kuta među njima.





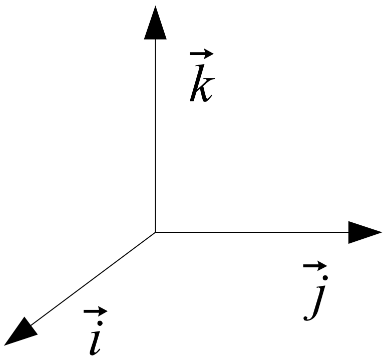


$$\vec{b}\times\vec{a}=-\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{c}$$

Vektorski je umnožak okomit na oba vektora koji se množe.

$$\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a} \quad , \quad \vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$$

Tablica vektorskog množenja



x	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	**0**	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	**0**	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	**0**

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\sin(\phi)$$

ϕ je kut između vektora