



Sveučilište u Zagrebu
Fakultet kemijskog
inženjerstva i tehnologije



2. UVOD U STATIKU KRUTIH TIJELA

- za internu uporabu

prof. dr. sc. Veljko Filipan

Zavod za termodinamiku, strojarstvo i energetiku

Uvod

- Kao što je ranije istaknuto statika je dio mehanike krutih tijela koji proučava tijela u stanju mirovanja.
- Tijela se ovdje smatraju apsolutno krutima što znači da je njihov geometrijski oblik stalan, a raspodjela materijalnih čestica unutar tijela nepromjenjiva, bez obzira na veličinu opterećenja koja na njih djeluju.
- Kod mnogih realnih tehničkih konstrukcija promjene geometrijskog oblika i dimenzija tijela pod djelovanjem radnih opterećenja su obično tako male da ih možemo zanemariti i pojedine zadatke pri tom rješavati služeći se metodama statike krutih tijela.

2.1. Sila, moment sile, spreg sila

2.1.1. Sila

- Silu je teško općenito definirati zbog nemogućnosti njenog neposrednog promatranja. Naime, postojanje sile se obično otkriva na temelju učinaka koje ona izaziva u prirodi.
- Učinak sile je ubrzanje tijela ($a = F / m$, prema II. Newtonovom zakonu) ili promjene geometrijskog oblika i dimenzija tijela (deformacija tijela).

- U statici krutih tijela ovih učinaka nema (tijela miruju, a deformacije nema ili se zanemaruje) te je problem definiranja sile još izraženiji.
- U statici krutih tijela **sila** se definira kao mjera uzajamnog djelovanja dvaju tijela. Pri tome nije nužno da tijela budu u dodiru, a takav je npr. slučaj kod sile težine.

Sila je vektorska veličina pa se grafički može prikazati kao usmjerena duljina. U uređenom prostoru definiranom desnim pravokutnim koordinatnim sustavom sila se može pisati kao

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$$

gdje su F_x , F_y i F_z komponente vektora sile, a $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$ jedinični vektori u pravcu koordinatnih osi x , y , i z .



- Računanje sa silama mora se stoga provoditi prema pravilima koja vrijede za vektore. Iznos sile je brojčana vrijednost ili modul vektora u određenom sustavu mjera i jedinica.
- Jedinica za silu u međunarodnom sustavu mjera i jedinica (SI sustav) je njutn (newton) u čast engleskom fizičaru i astronomu Isaacu Newtonu (1643-1727) pri čemu je:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2} .$$

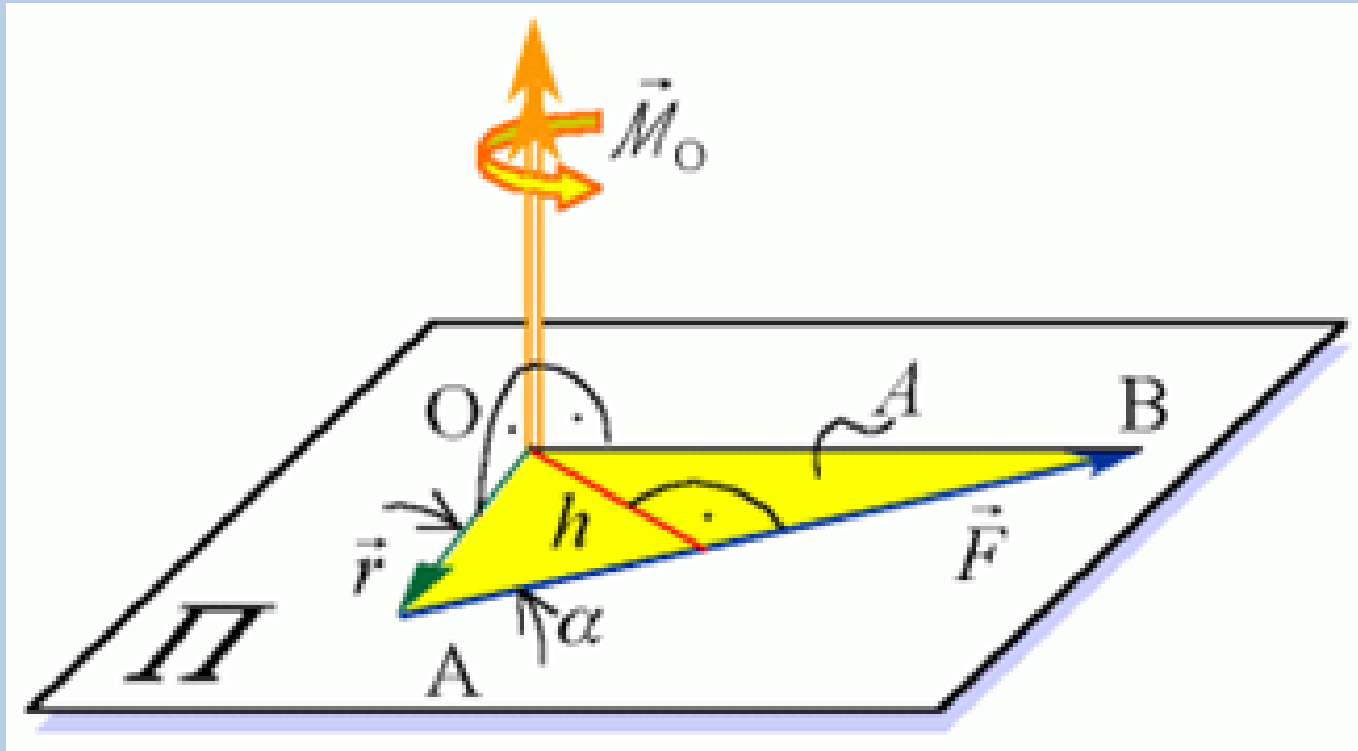
2.1.2. Moment sile

- Jednako kao i kod definiranja sile u statici krutih tijela javlja se poteškoća pri definiranju momenta sile jer nema vidljivog učinka njegovog djelovanja.
- **Moment sile** (statički moment sile ili samo kratko moment) zapravo je zakretno djelovanje sile. Moment sile je također vektorska veličina, dakle veličina za čije su potpuno poznavanje potrebna tri nezavisna podatka (npr. 1. apsolutna vrijednost, modul ili iznos u određenom sustavu mjera i jedinica, 2. smjer i 3. orijentacija).

- U uređenom prostoru definiranom desnim pravokutnim koordinatnim sustavom moment sile može se pisati kao

$$\mathbf{M} = M_x \mathbf{i} + M_y \mathbf{j} + M_z \mathbf{k}$$

- gdje su M_x M_y i M_z komponente vektora momenta sile, a $\mathbf{i}$ $\mathbf{j}$ i $\mathbf{k}$ jedinični vektori u pravcu koordinatnih osi x y i z .



- Moment **M** sile **F** za točku O (ishodište koordinatnog sustava Oxyz) matematički se može definirati kao vektorski produkt vektora položaja hvatišta sile **r** i vektora sile **F** (vidi sliku)

$$\mathbf{M}_O^F = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

- Iz ove definicije, a prema pravilima koja vrijede za vektorski produkt dvaju vektora slijede već prije spomenuta tri potrebna podatka za moment (veličina, smjer i smisao).

- Iznos momenta dobije se kao umnožak iznosa sile s njezinim krakom. Krak sile je najkraća udaljenost pravca sile i točke za koju se moment određuje. U skladu sa slikom to možemo pisati kao:

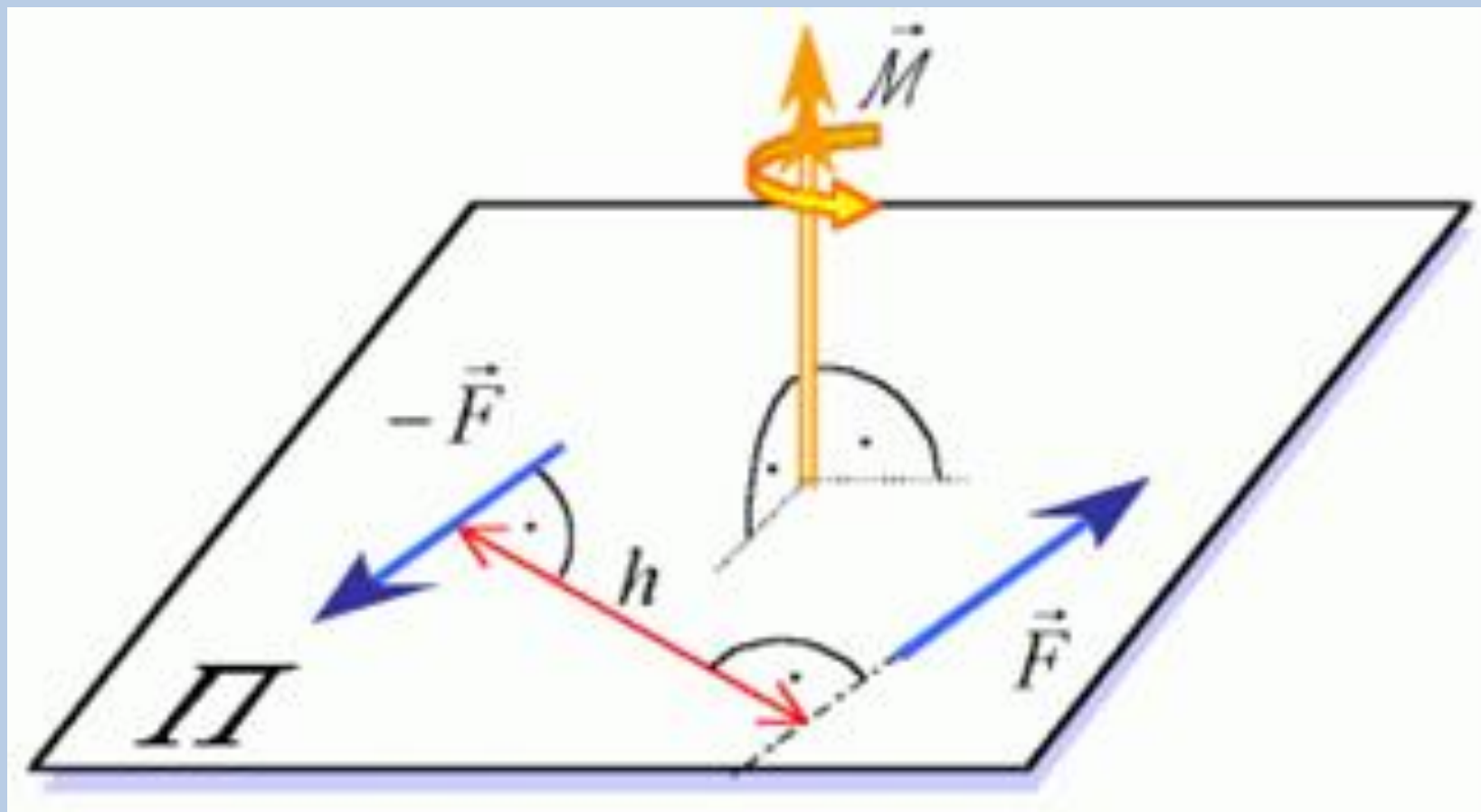
$$M = F h = F r \sin \alpha$$

- Vrlo lako se može pokazati da iznos momenta ne ovisi o položaju hvatišta sile na njenom pravcu djelovanja, budući da je krak sile uvijek isti. Veličina momenta međutim bitno ovisi o izboru točke za koju ga određujemo.
- Jedinica za moment u SI sustavu je „njutn metar” pri čemu vrijedi:
$$1 \text{ N m} = 1 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$$

- Smjer momenta okomit je na ravninu što je čine pravac sile i radijus vektor (vektor položaja) r , odn. pravac sile i točka za koju se moment određuje.
- Smisao momenta (predznak na pravcu smjera) određuje se prema konvenciji o desnom koordinatnom sustavu. Primjenom pravila desne ruke smisao se može odrediti na sljedeći način:
ako od točke za koju se određuje moment ispružimo prste desne ruke prema hvatištu sile i zakrenemo ih prema smislu (strelici) sile (pazeći na najbliži put prema pravcu i u smislu sile) tako da je točka za koju se određuje moment s unutarnje strane šake, ispruženi palac pokazuje smisao momenta.

2.1.3. Spreg sila

- **Spreg sila** ili par sila čine dvije sile istog iznosa koje djeluju na dva paralelna pravca te koje imaju suprotnu orijentaciju. Ove dvije sile daju zakretno djelovanje koje se naziva momentom sprega.
- **Moment sprega** je vektor okomit na ravninu sprega sila, a iznos mu se određuje kao umnožak iznosa jedne sile s najkraćom udaljenošću među pravcima sila:
$$M_s = F h ,$$
- dok mu se smisao može odrediti prema pravilu desne ruke.

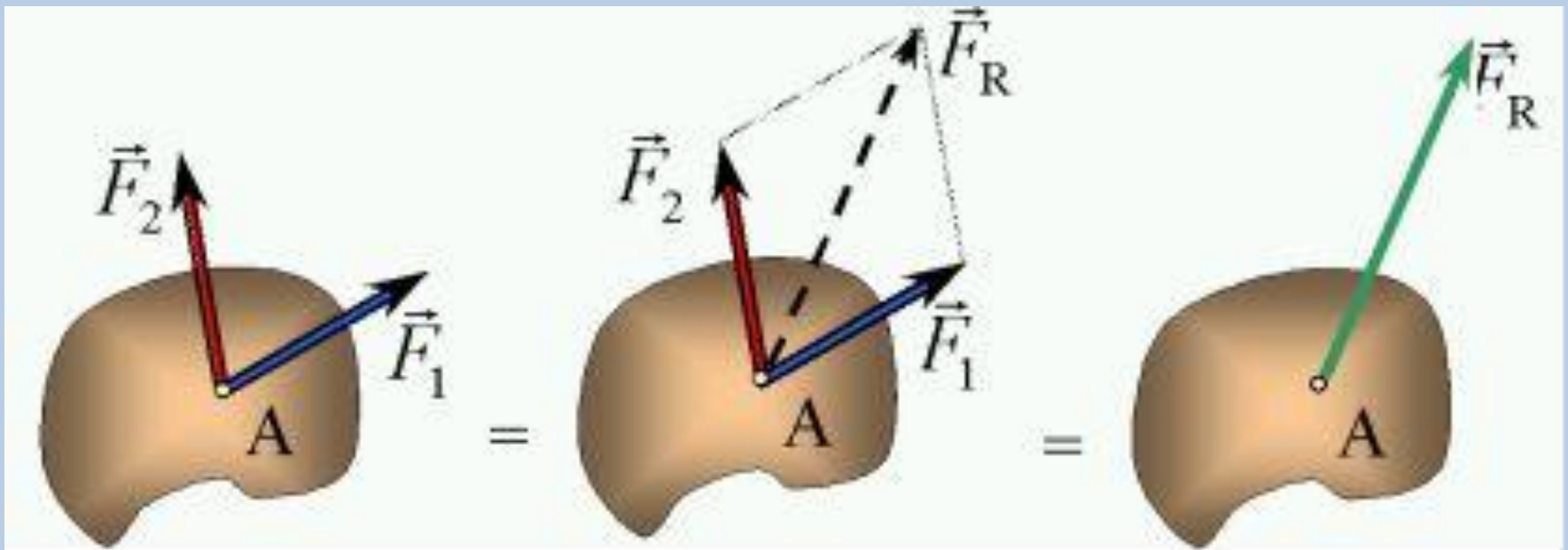


- Moment sprega je zapravo sumarni moment dviju sila za neku točku, a koji se određuje kao suma momenata svake sile posebno za tu istu točku.
- Posebna je značajka momenta sprega da je on slobodan vektor, tj. da ne ovisi o izboru točke za koju se određuje.
- To se može lako dokazati ako se za određivanje momenta sprega izabere nekoliko različitih točaka u ravnini sile ili izvan te ravnine te se za pojedinu izabranu točku odrede i zbroje momenti obiju sila.

2.2. Temeljni principi tehničke mehanike (statike)

- Već je uvodno rečeno da je tehnička mehanika zasebna disciplina mehanike koja se praktično koristi u rješavanju inženjerskih problema te stoga počiva na istim temeljnim zakonima s aksiomatskim obilježjem.
- Tu spadaju tri temeljna Newtonova zakona: 1. Newtonov zakon ili zakon inercije odn. tromosti; 2. Newtonov zakon ili zakon gibanja i 3. Newtonov zakon ili zakon akcije i reakcije. Osim njih kao temeljni principi statike ovdje u nastavku detaljno se navode i prvi aksiom statike, pravilo o pomicanju hvatišta sile, pravilo o redukciji odnosno o paralelnom pomaku sile, pravilo izolacije i pravilo reza.

2.2.1 Prvi aksiom statike (pravilo paralelograma ili pravilo trokuta sila)



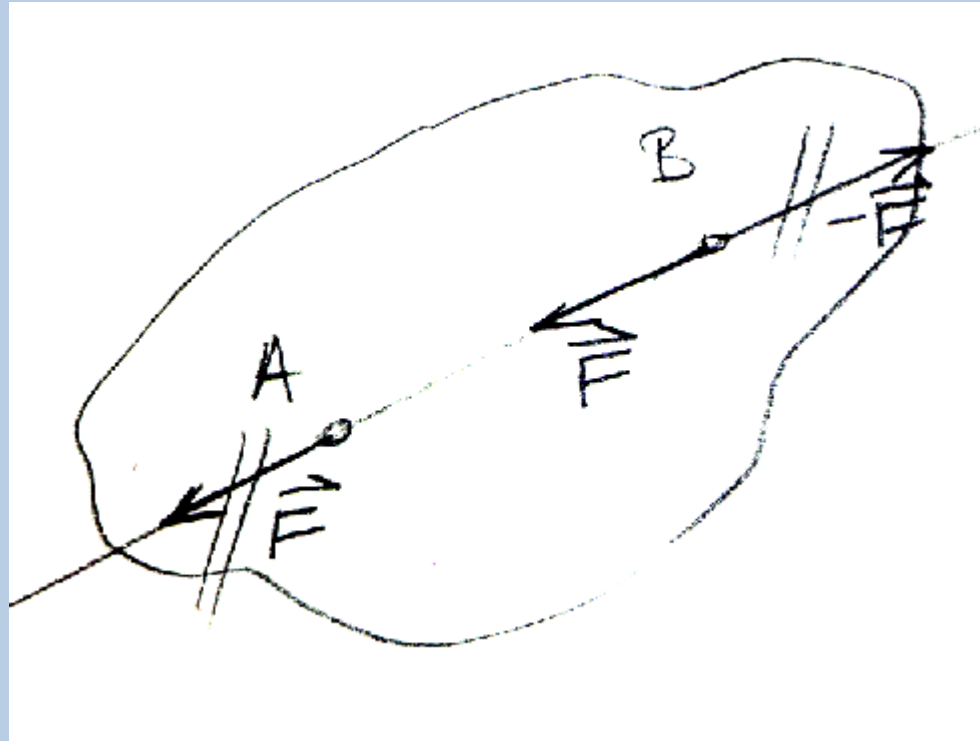
- Premda ovo pravilo proizlazi iz geometrijskog zbrajanja vektora u statici se ne dokazuje teorijski već se prihvaća i primjenjuje kao takvo. Često se ovo pravilo naziva I. aksiomom statike.
- **Pravilo paralelograma** ili **pravilo trokuta** sila može se izreći na sljedeći način:
 - Rezultanta dviju sila različitih pravaca jednaka je po pravcu i veličini dijagonali paralelograma kojemu su dvije stranice zadane sile u zajedničkoj točki hvatišta, odnosno
 - Rezultanta dviju sila različitih pravaca jednaka je po pravcu i veličini trećoj stranici trokuta kojemu su dvije stranice zadane sile tako da je hvatište druge sile u točki završetka prve sile.
- Smisao rezultante suprotan je smislu obilaženja zadanih sila

- Pri tom se pod **rezultantom** dviju ili više sila smatra rezultirajuće, odnosno sumarno djelovanje tih sila, što znači da je djelovanje (i posljedice tog djelovanja) rezultante u potpunosti identično djelovanju svih sila koje ona zamjenjuje.
- Ovo pravilo omogućuje kako sastavljanje tako i rastavljanje sila.
- U slučaju kad na neko tijelo djeluje više različitih sila njih je korištenjem pravila paralelograma odnosno trokuta sila moguće zamijeniti samo jednom rezultirajućom silom.
- Također, primjenom ovog pravila moguće je jednu silu rastaviti na dvije ili više komponenata zadanih pravaca djelovanja.

2.2.2. Pravilo o pomicanju hvatišta sile

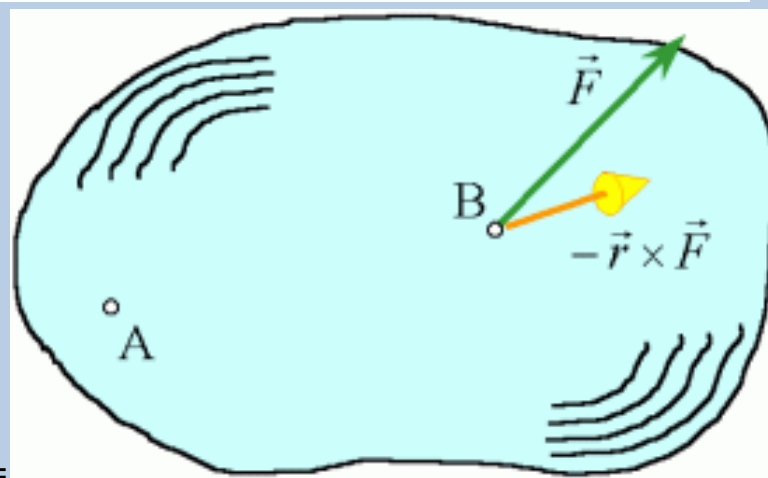
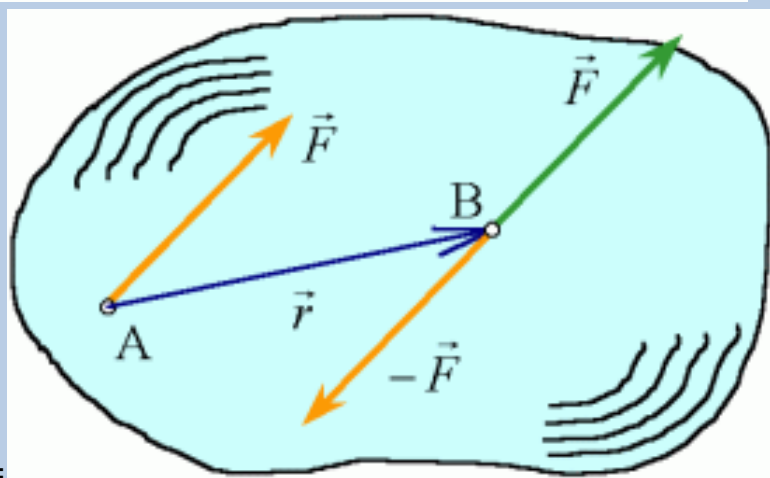
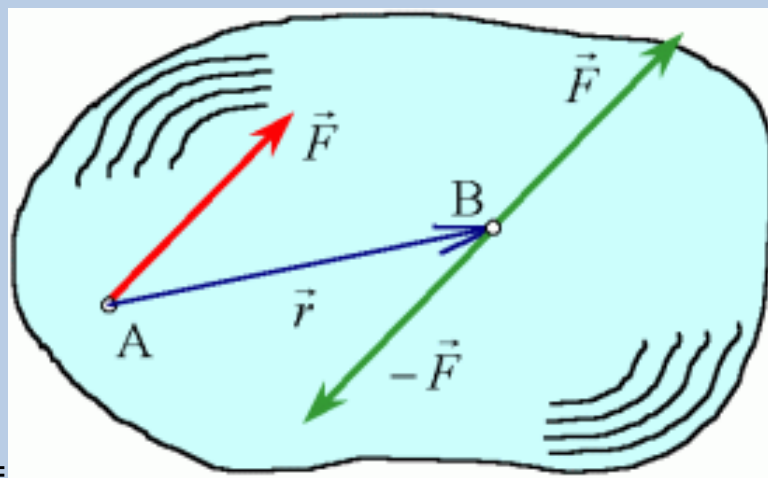
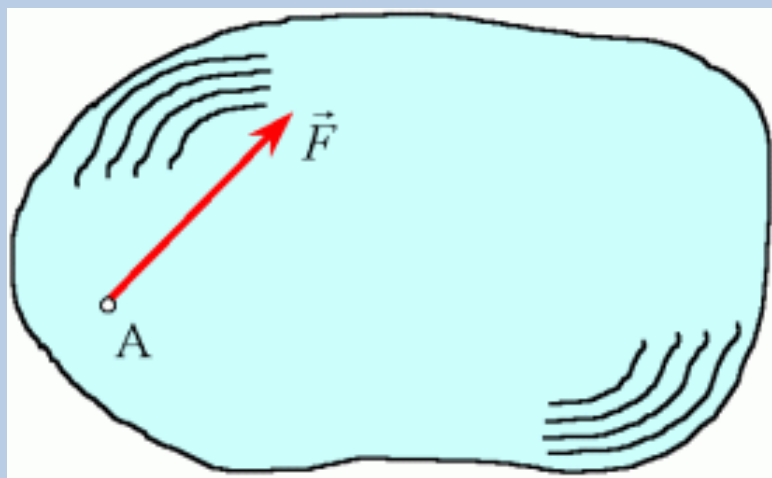
- Rezultat djelovanja sile na **kruto tijelo** neće se promijeniti promjenom položaja njenog hvatišta te je stoga dozvoljeno pomicanje sile po pravcu djelovanja. Zahvaljujući ovom pravilu u statici krutih tijela sila se može smatrati klizećim vektorom, tj. vektorom vezanim samo za pravac djelovanja, a ne i za hvatište.
- Pravilo o pomicanju hvatišta sile po njenom pravcu djelovanja vrijedi **samo** za apsolutno kruta tijela, odnosno tijela koja se ne deformiraju pod djelovanjem sila.

- Pravilo o pomikanju hvatišta sile



- Prema pravilu o pomicanju hvatišta sila $\mathbf{F}$ koja djeluje na pravcu p s hvatištem u točki A (slika), smije se bez posljedica pomaknuti u točku B na pravcu p . To se može dokazati na slijedeći način. U točki B pravca p dodamo i oduzmemo istu silu što znači da se sumarno djelovanje sila na kruto tijelo neće promijeniti. Zbrojimo sada sile $\mathbf{F}$ u točki A i $-\mathbf{F}$ u točki B. Njihovo rezultirajuće djelovanje je $\mathbf{0}$ pa preostaje samo sila $\mathbf{F}$ u točki B.

2.2.3. Paralelni pomak sile



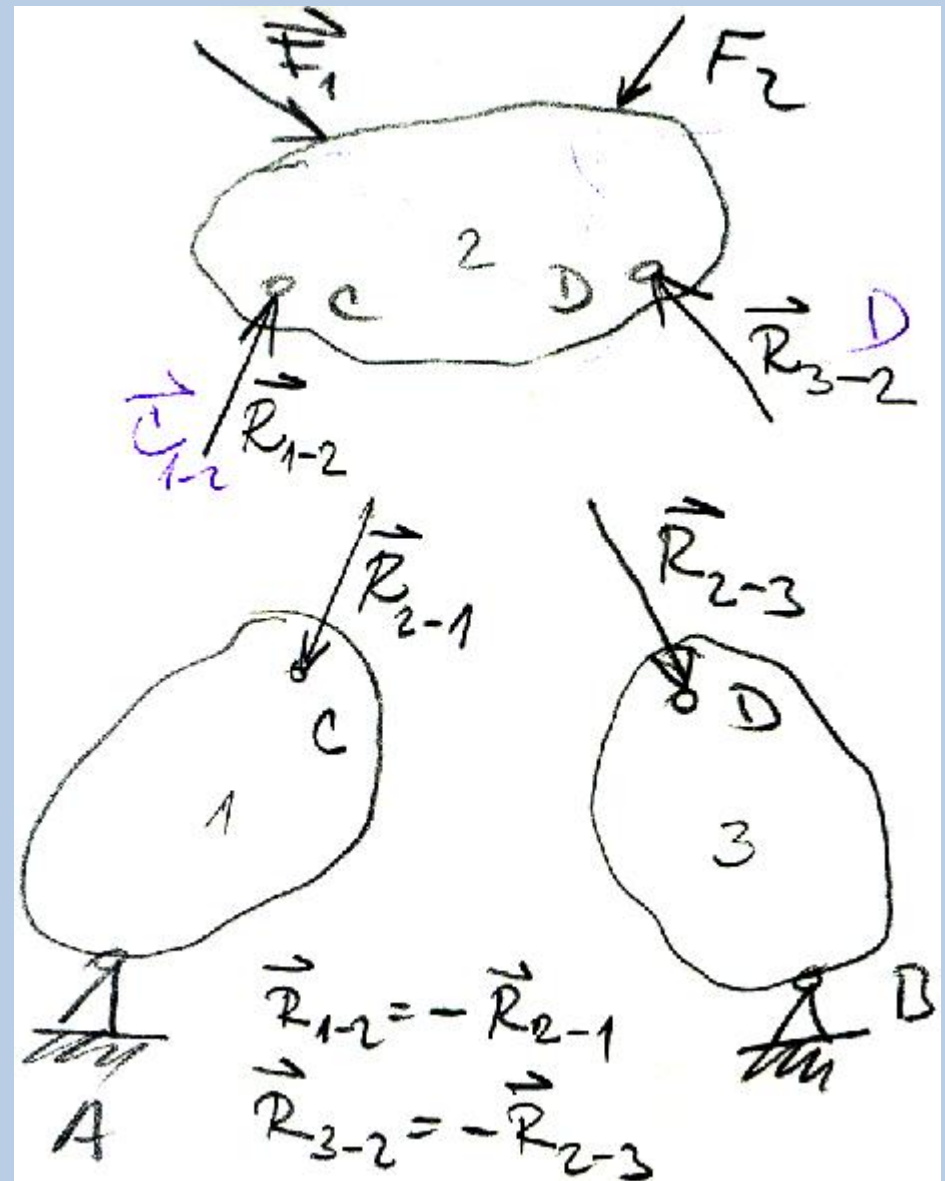
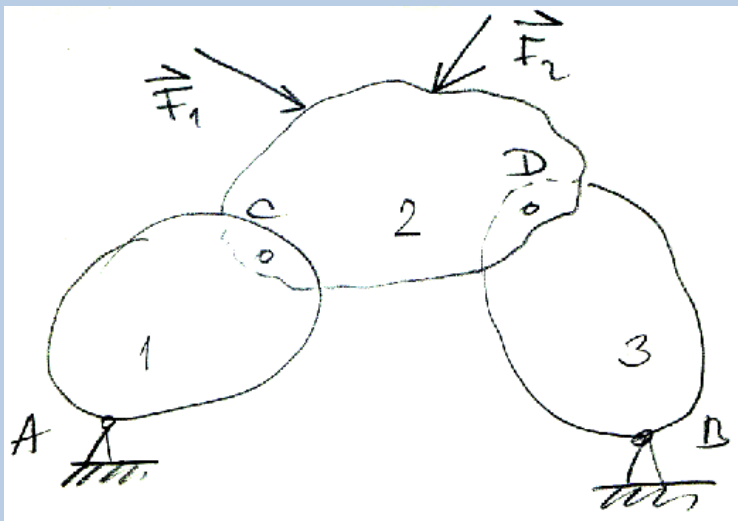
- Paralelni pomak sile naziva se i redukcijom sile ili svođenjem sile u neku točku izvan pravca djelovanja.
- Najčešće se to koristi radi pojednostavljene analize djelovanja više sila na isto kruto tijelo.
- Uobičajeno je da se sve sile svode u istu točku koja je u pravilu težište ili središte masa tijela.
- Postupak se može pokazati i objasniti prema slici. Neka sila $\mathbf{F}$ djeluje na pravcu „a” s hvatištem u točki A i želimo je reducirati u točku B koja je za „k” udaljena od pravca „a”.

- Povučemo sada kroz točku B pravac „b” paralelan pravcu „a” i u točki B na pravcu „b” dodamo i oduzmemo istu silu iznosa „F”.
- Sada sile $\mathbf{F}$ u točki A i $-\mathbf{F}$ u točki B čine spreg sila pa ih možemo zamijeniti momentom sprega iznosa $M_s = F \cdot k$, dok je njihova rezultanta jednaka $\mathbf{0}$.
- Moment sprega je slobodan vektor te ga možemo staviti u bilo koju točku, dakle i u točku B. U točki B kao rezultat opisanog postupka ostala je još i sila $\mathbf{F}$.
- Dakle, rezultat redukcije sile iz točke A u točku B je sila $\mathbf{F}$ ista po iznosu, pravcu i smislu prvotnoj sili $\mathbf{F}$ u točki A plus jedan moment sprega jednak umnošku iznosa sile $\mathbf{F}$ i udaljenosti točke B od pravca a.

2.2.4. Pravilo izolacije tijela

- Pravilo izolacije tijela primjenjuje se pri analizi djelovanja sila na jedno tijelo koje je na određeni način vezano s drugim tijelima ili okolinom i tako čini sustav tijela.
- Pravilo izolacije kaže da se neko tijelo smije izdvojiti iz sustava i promatrati zasebno, ali samo tako da se djelovanje drugih tijela iz sustava ili djelovanje okoline nadomjesti pripadajućim silama.
- Ove su sile inače u sustavu skrivene ili unutarnje sile, a tek izdvajanjem tijela iz sustava postaju vidljive vanjske sile. Ovo nam pravilo stoga omogućava određivanje nepoznatih sila kojima drugi dijelovi sustava ili okolina djeluju na promatrano tijelo.

- Pravilo izolacije



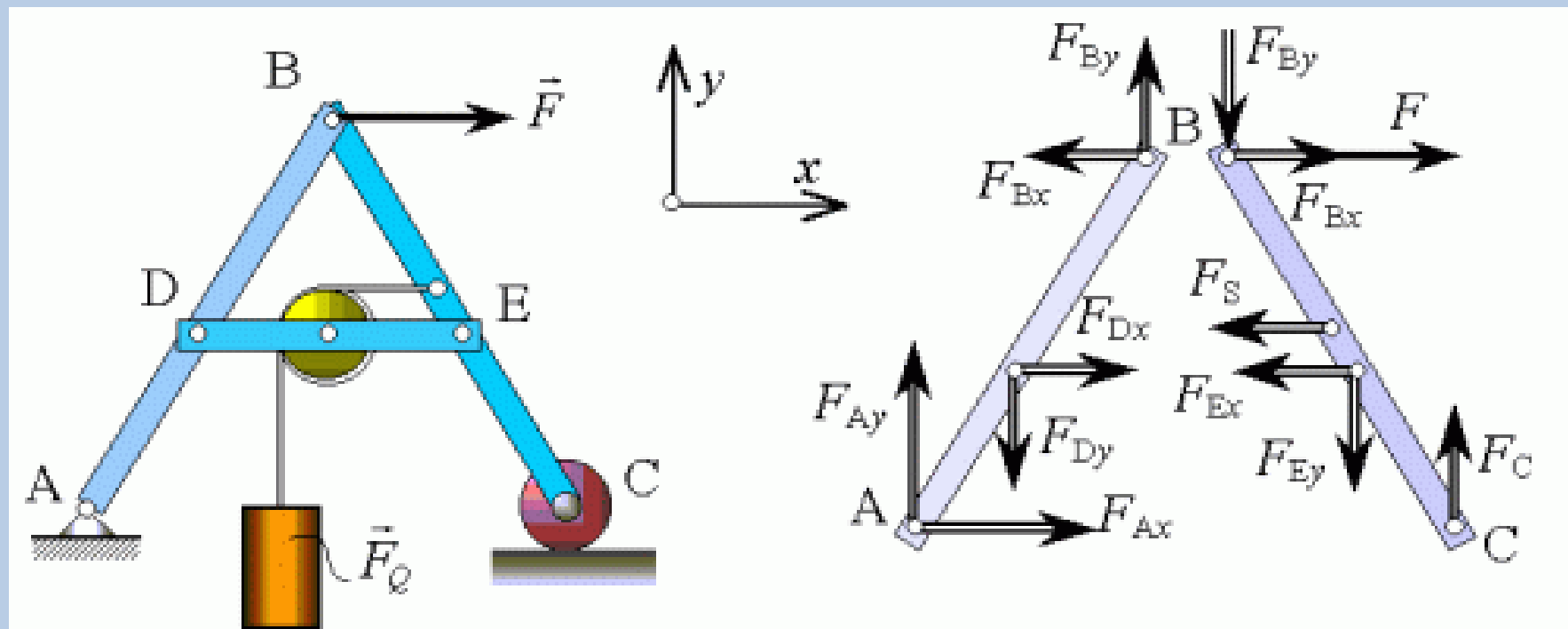
- Sile $\mathbf{R}_{1-2}$ i $\mathbf{R}_{3-2}$ prema slici su sile kojima tijela 1 i 3 djeluju na tijelo 2. Prema zakonu akcije i reakcije tijelo 2 djeluje na tijela 1 i 3 silama $\mathbf{R}_{2-1}$ i $\mathbf{D}_{2-3}$ koje su silama $\mathbf{R}_{1-2}$ i $\mathbf{D}_{3-2}$ jednake po iznosu i pravcu, a suprotne po smislu (orijentaciji). Dakle može se pisati:

$$\mathbf{R}_{1-2} = -\mathbf{R}_{2-1}$$

$$\mathbf{R}_{2-3} = -\mathbf{R}_{3-2}$$

- Jedino na taj način pri ponovnom sastavljanju svih tijela u sustav nakon izolacije i provedene analize početno se stanje neće promijeniti. Ovo proizlazi i prema definiciji sile kao mjere uzajamnog djelovanja dvaju tijela. Naime dva tijela uzajamno djeluju jedno na drugo silama istog iznosa i smjera, ali suprotne orijentacije, dakle te su sile akcija i reakcija koje se međusobno poništavaju u zajedničkoj točki djelovanja.

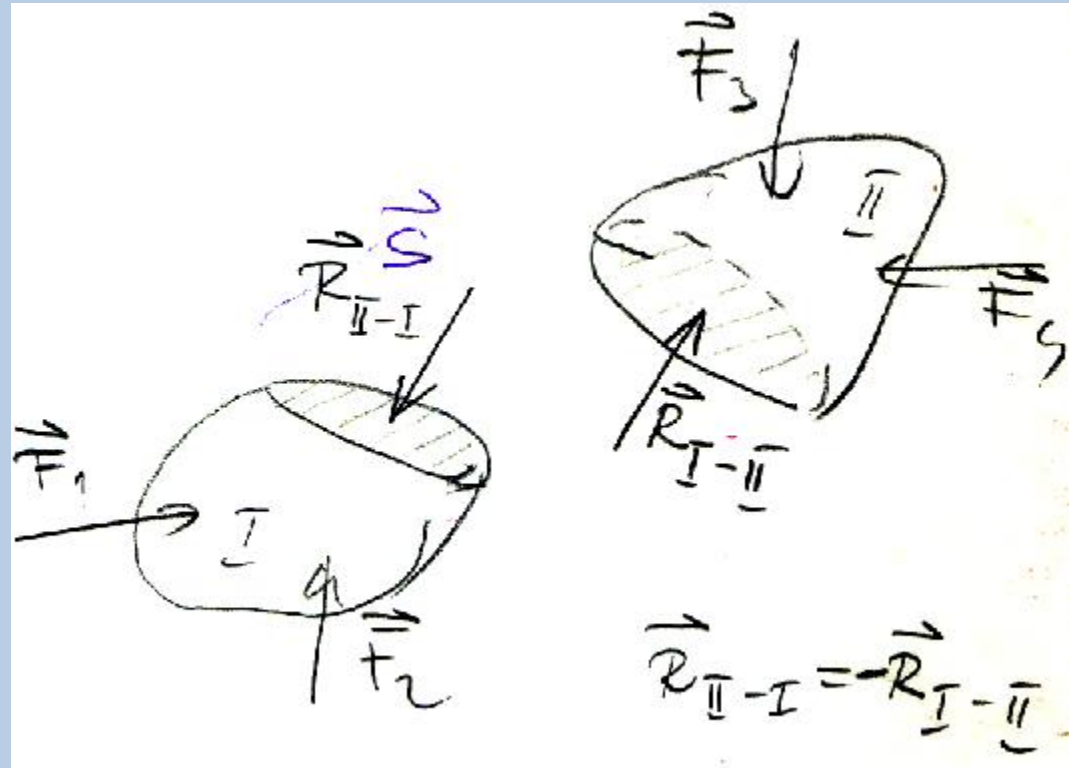
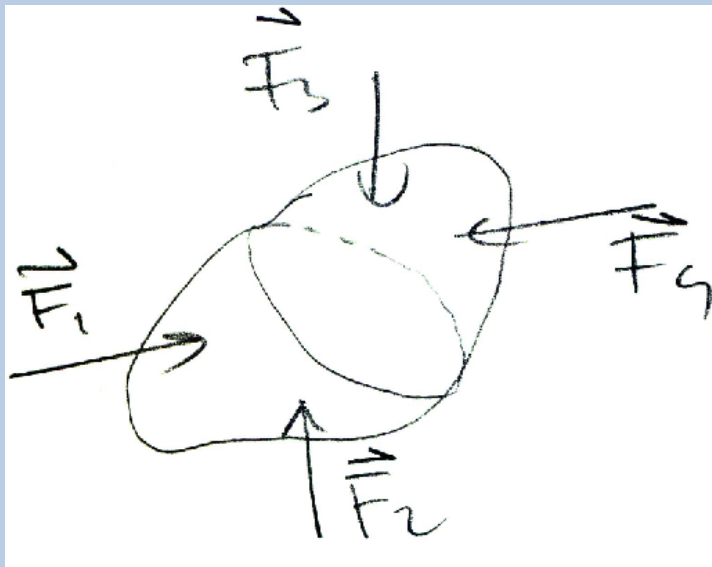
Primjer pravila izolacije



2.2.5. Pravilo reza

- Pravilo izolacije može se proširiti na pravilo reza. Naime smatra li se tijelo sustavom materijalnih čestica tada se odvojeno razmatranje samo jednog dijela tog tijela može promatrati kao izdvajanje jednog dijela čestica iz čitavog sustava, slično kao kod izolacije jednog tijela iz zajedničkog sustava tijela.
- Analogno pravilu izolacije pojedine dijelove tijela smijemo izdvojiti i promatrati zasebno, ali samo tako da djelovanje preostalog dijela tijela na mjestu reza nadomjestimo pripadajućim silama. Ove sile, inače unutrašnje sile među česticama materijala istog tijela, u zamišljenom prerezu (vidi sliku) postaju vanjske sile i mogu se odrediti analizom promatranog dijela tijela.

- Pravilo reza (presjeka)



- Sila $\mathbf{R}_{1-2}$ prema slici je sila kojom dio tijela 1 djeluje na dio tijela 2 u ravnini prereza (reza). Prema zakonu akcije i reakcije dio tijela 2 djeluje na dio tijela 1 silom $\mathbf{R}_{2-1}$ koja je sa silom $\mathbf{R}_{1-2}$ jednaka po iznosu i pravcu, a suprotna po smislu (orijentaciji). Dakle može se pisati:

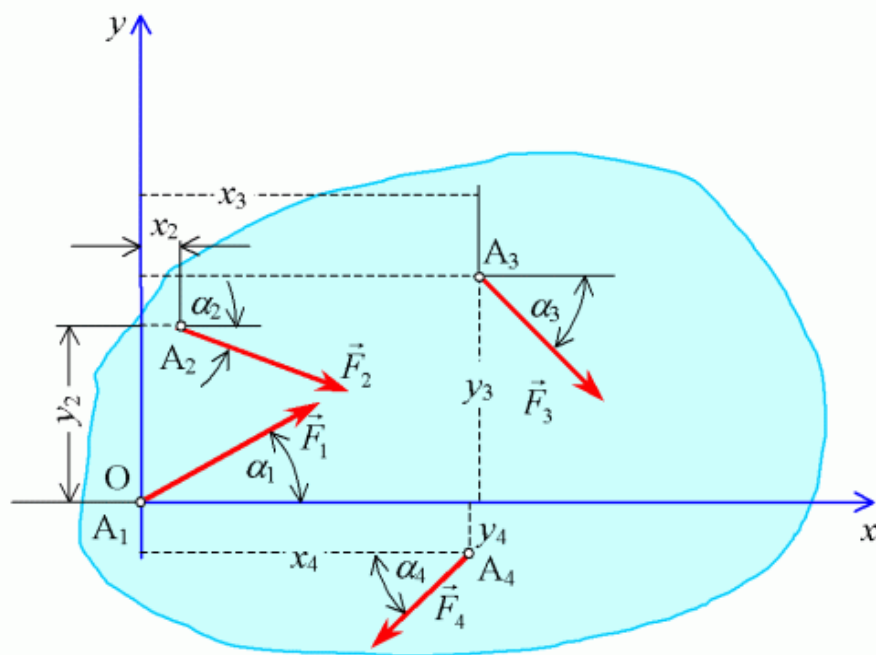
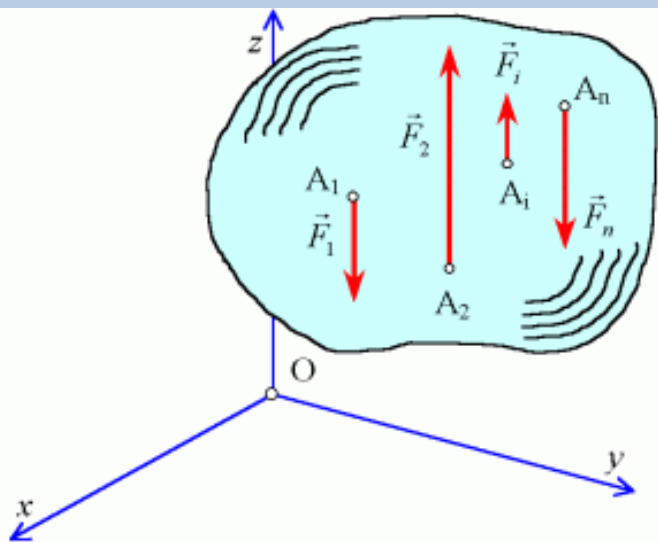
$$\mathbf{R}_{1-2} = - \mathbf{R}_{2-1}$$

- Jedino na taj način pri ponovnom sastavljanju dijelova tijela u ravnini prereza nakon izdvajanja i provedene analize početno se stanje neće promijeniti.
- Pravilo reza omogućava određivanje nepoznatih unutarnjih sila u proizvoljnoj ravnini prereza nekog tijela.

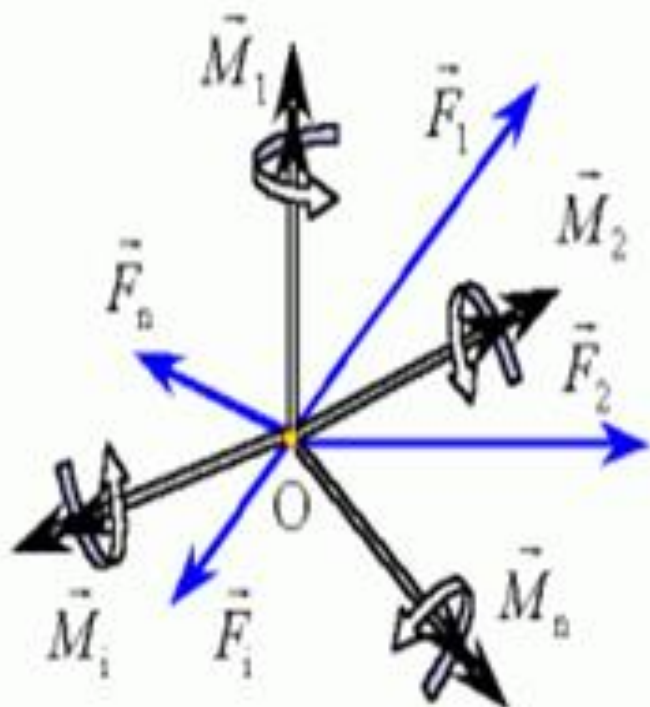
2.3. Sustavi sila i određivanje rezultante

2.3.1. Pojmovi i podjele sustava sila

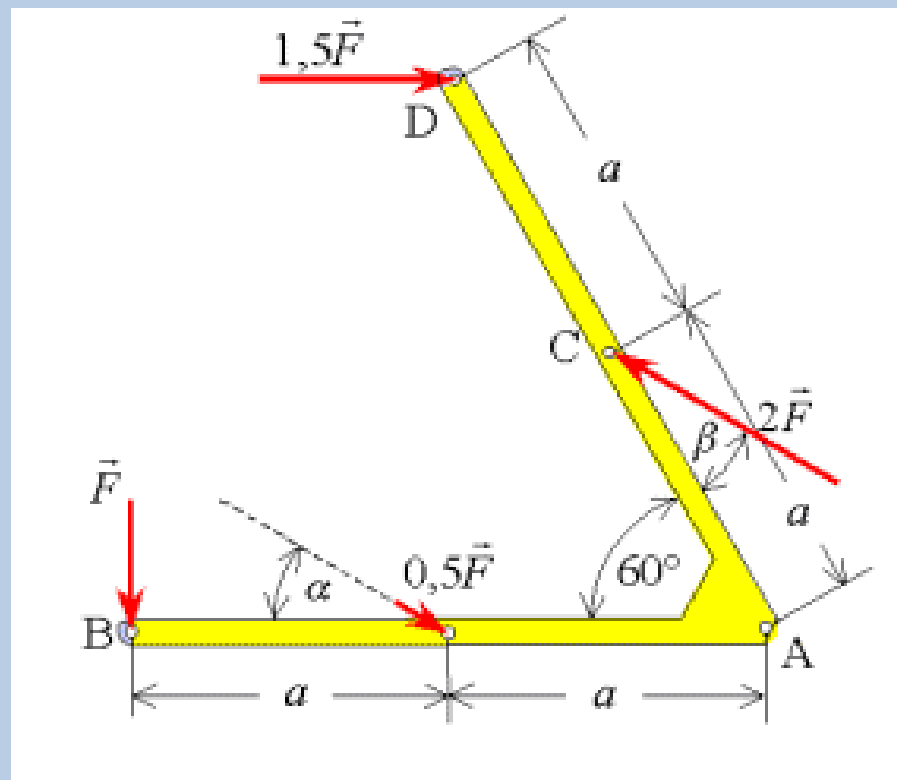
- Pod sustavom sila općenito se smatraju sve sile koje djeluju na promatrano tijelo. Ako se vektori svih sila sustava nalaze u jednoj ravnini govori se o **ravninskom sustavu sila**, a ako je neka sila izvan te ravnine radi se o **prostornom sustavu sila**.



- Prema drugoj podjeli sustavi sila dijele se na konkurentne, paralelne i opće sustave.
- **Konkurentni sustav sila** čine sile čiji se pravci djelovanja sijeku u jednoj te istoj točki,
- **paralelni sustav sila** sačinjavaju sile koje sve djeluju na paralelnim pravcima, dok
- **opći sustav sila** daju sile među kojima neke mogu biti na paralelnim pravcima, a druge na pravcima koji se sijeku, ali ne u istoj točki.
- Svaki od ova tri sustava sila može biti ravninski ili prostorni, što znači da se ove dvije podjele međusobno ne isključuju, već se nadopunjuju.



Konkurentni prostorni sustav sila



Ravninski opći sustav sila

- **Rezultanta sustava sila** je jedna sila koja po djelovanju zamjenjuje sve sile dotičnog sustava.
- To je rezultirajuće, odnosno sumarno djelovanje svih sila iz sustava.
- Odatle slijedi da se rezultanta sustava dobiva zbrajanjem svih pojedinačnih sila dotičnog sustava.
- Rezultanta sustava može se odrediti na dva načina: grafički i analitički.

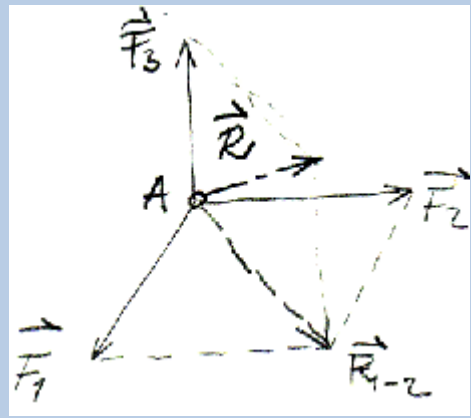
2.3.2. Grafičko određivanje rezultante

- Grafički postupak određivanja rezultante temelji se na grafičkom zbrajanju vektora odnosno na I. aksiomu statike.
- Postupak je prikladan samo za ravninske sustave sila i provodi se konstruiranjem (crtanjem) plana položaja i plana sila u određenom mjerilu.
- Postupak je prikazan na primjeru ravninskog konkurentnog sustava 3 sile prema slici.

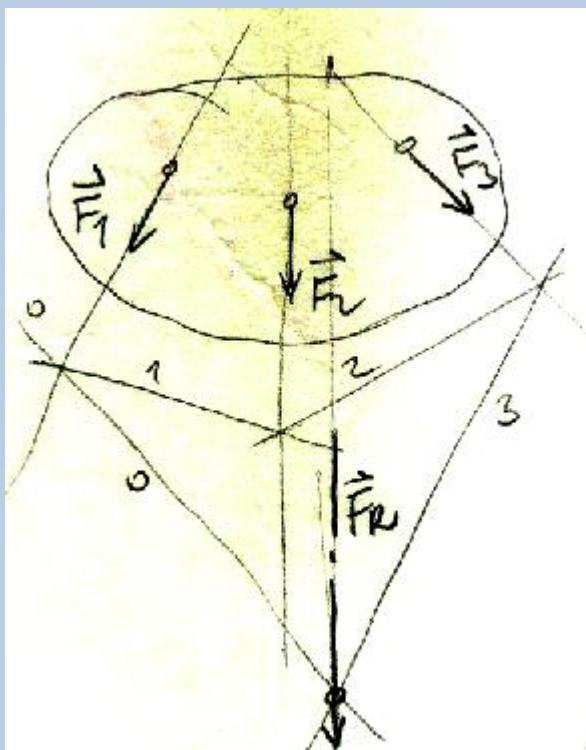
- **Plan položaja** je crtež tijela odn. sustava tijela prikazan u određenom mjerilu za duljine (1 cm na crtežu odgovara X_L cm u prirodi) s točno ucrtanim pravcima djelovanja pojedinih sila.
- **Plan sila** je grafički prikaz zbrajanja vektora sila konstruiran u određenom mjerilu za sile (1 cm na crtežu odgovara X_F N).
- Pri konstrukciji plana sila prikladno je primjenjivati pravilo trokuta sila, gdje se svaka naredna sila nastavlja na završetak prethodne i tako redom od prve do posljednje sile u sustavu, a pravci sila prenose se paralelno iz plana položaja.

• Grafičko određivanje rezultante ravninskih sustava sila

- konkurentne sile

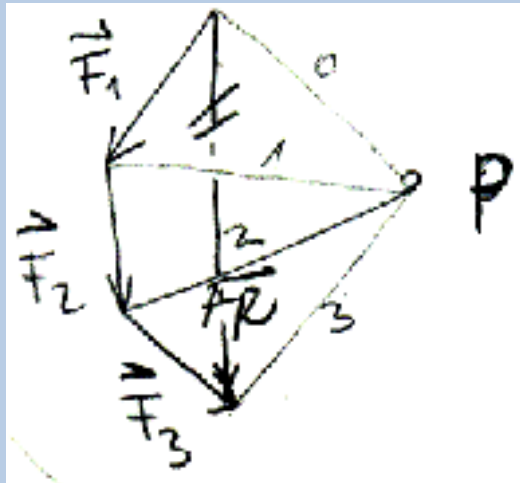
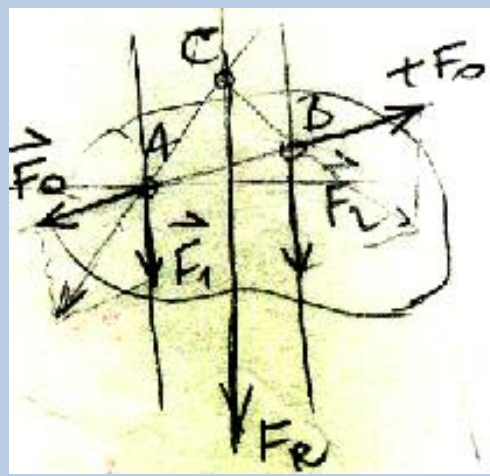


- Opći sustav sila



Plan položaja

- paralelne sile



Plan sila

- Rezultanta sustava proizlazi iz plana sila kao spojnica točke početka prve sile i točke završetka zadnje sile.
- Iznos rezultante jednak je umnošku izmjerene duljine ove spojnice s mjerilom za sile X_F .
- Pravac i smisao rezultante definirani su u planu sila i moraju se prenijeti paralelno u plan položaja (kako je to učinjeno na slici).
- Kod konkurentnog sustava sila pravac rezultante mora prolaziti kroz zajedničko sjecište svih pravaca sila (točka A na slici).

- Kod paralelnog i općeg sustava sila položaj pravca rezultante nije unaprijed poznat.
- Za sustav paralelnih sila prikazano je kako se to može odrediti dodavanjem i oduzimanjem sila $+F_0$ i $-F_0$ na spojnicu točka A i B.
- Za opći sustav sila položaj rezultante može se odrediti posebnim postupkom - konstrukcijom verižnog poligona (vidjeti na slici). Opis tog postupka može se naći u literaturi i ovdje se dalje ne navodi (mi se time nećemo baviti).

2.3.3. Analitičko određivanje rezultante

- Analitički postupak određivanja rezultante sustava temelji se na analitičkom zbrajanju vektora što se može pisati kao:

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \dots + \mathbf{F}_n = \sum \mathbf{F}_i$$

- Ako je poznat svaki od vektora sila (od $i=1$ do $i=n$) u općenitom zapisu:

$$\mathbf{F}_i = F_{ix} \mathbf{i} + F_{iy} \mathbf{j} + F_{iz} \mathbf{k}$$

- odnosno ako su poznate komponente svake sile u pravokutnom koordinatno sustavu Oxyz, tj. F_{ix} , F_{iy} i F_{iz} (od $i=1$ do $i=n$), vektorska jednadžba prelazi u tri skalarne jednadžbe s algebarskim zbrajanjem iznosa komponenata:

$$F_{Rx} = F_{1x} + F_{2x} + \dots + \dots + F_{nx} = \sum F_{ix}$$

$$F_{Ry} = F_{1y} + F_{2y} + \dots + \dots + F_{ny} = \sum F_{iy}$$

$$F_{Rz} = F_{1z} + F_{2z} + \dots + \dots + F_{nz} = \sum F_{iz}$$

- Iznos vektora rezultante sada se može dobiti iz izračunatih komponentata F_{Rx} , F_{Ry} i F_{Rz} kao:

$$F_R = (F_{Rx}^2 + F_{Ry}^2 + F_{Rz}^2)^{0,5}$$

- Pravac p_r i smisao rezultante može se definirati kutevima što ga taj pravac zatvara prema koordinatnim osima x , y i z , a koji se mogu odrediti iz izračunatih komponentata F_{Rx} , F_{Ry} i F_{Rz} kao:

$$\alpha_x = \cos^{-1} (F_{Rx}/F_R)$$

$$\alpha_y = \cos^{-1} (F_{Ry}/F_R)$$

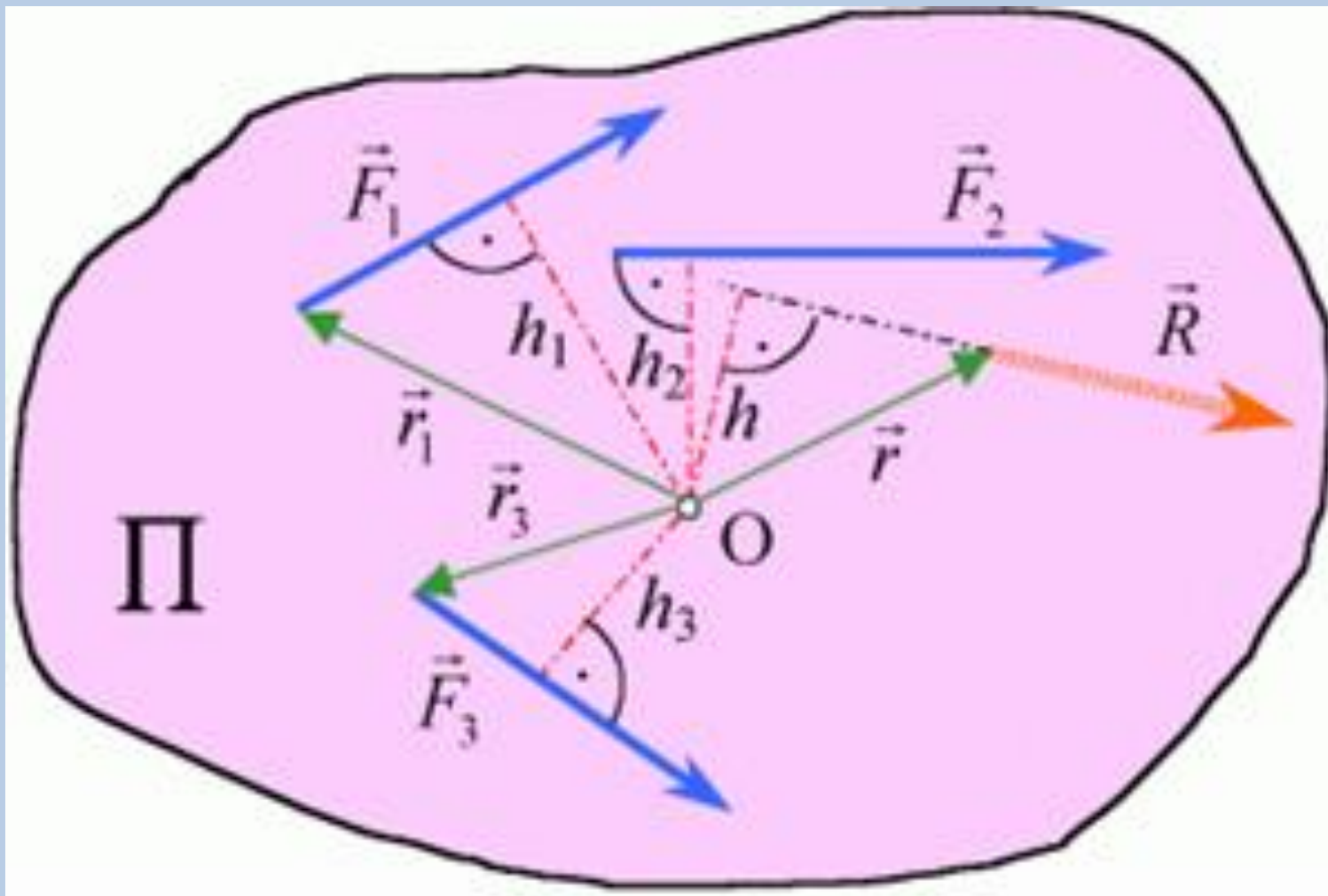
$$\alpha_z = \cos^{-1} (F_{Rz}/F_R)$$

- Budući da se kutevi α_x , α_y i α_z mjere od pozitivnih koordinatnih osi x , y i z do pravca p_r , smisao odn. orijentacija rezultante (oktant u $Oxyz$) određena je preko predznaka pojedinih komponenata.
- Pri tom ostaje nepoznat još samo položaj pravca rezultante u planu položaja tj. na tijelu, a taj se može odrediti analitički pomoću momentnog pravila, odnosno Varignonovog teorema.

2.3.4. Momentno pravilo

- Momentno pravilo kaže da je statički moment rezultante za neku točku P jednak sumi momenata za tu istu točku svih sila koje rezultatna zamjenjuje, ili kraće moment rezultante jednak je sumi momenata komponenata, što se može zapisati kao:

$$\mathbf{M}_P^{FR} = \sum \mathbf{M}_P^{Fi}$$



Ilustracija momentnog pravila za proizvoljnu točku O

- Ovo pravilo u nastavku je objašnjeno za jedan ravninski sustav sila prema slici.

Za proizvoljnu točku O iz slike sljedeći:

$$M_O^{FR} = F_R h = \sum M_O^{Fi} = F_1 h_1 + F_2 h_2 - F_3 h_3$$

i dalje:
$$h = (F_1 h_1 + F_2 h_2 - F_3 h_3) / F_R$$

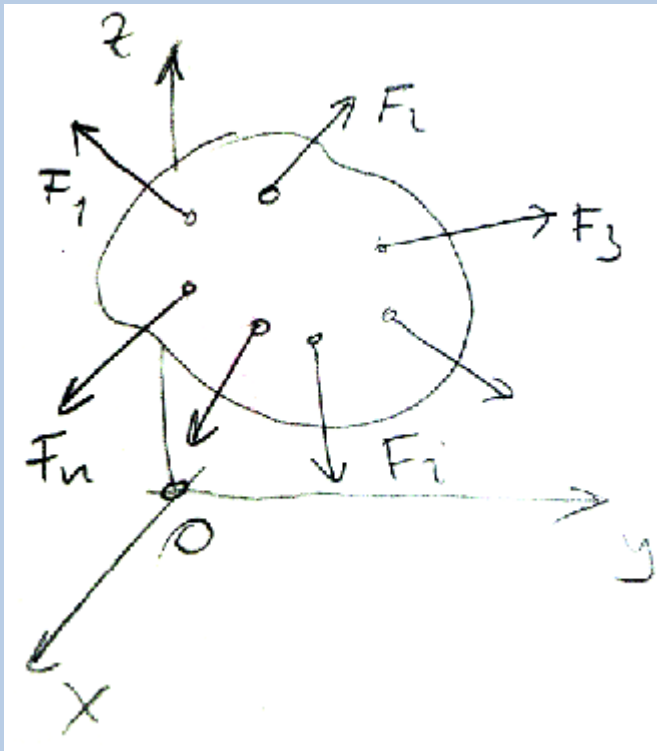
- što znači da je pravac rezultante za h udaljen od točke O odn. da je jedna od tangenata kružnice radijusa h povučene iz O.
- Budući da je O proizvoljna točka, ona se može odabrati tako da računanje bude što jednostavnije (npr. točka P na sjecištu pravaca sila F_1 i F_2 tako da momenti tih dviju sila za točku P odmah budu eliminirani):

$$M_P^{FR} = F_R k_R = \sum M_P^{Fi} = F_1 k_1 + F_2 k_2 + F_3 k_3 = F_1 0 + F_2 0 + F_3 k_1 = F_3 k_3$$

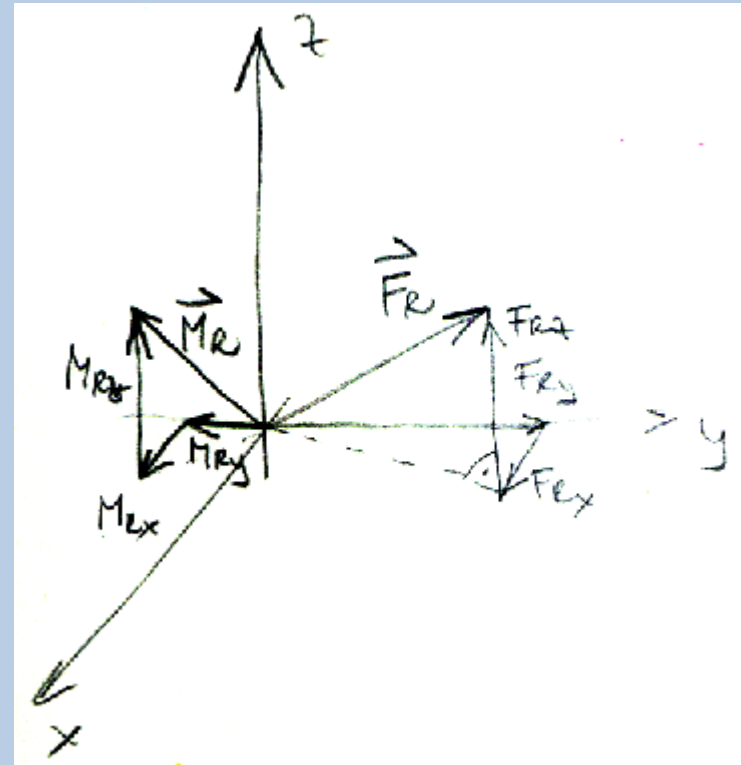
i dalje:
$$k_R = F_3 k_3 / F_R$$

2.4. Uvjeti ravnoteže

2.4.1. Tijelo u prostoru–stupnjevi slobode gibanja



Prostorni sustav sila na tijelo



Rezultat redukcije svih sila u 1 točku

- Na tijelo prema slici djeluje opći prostorni sustav sila $\mathbf{F}_1$ do $\mathbf{F}_n$ poznatih iznosa, pravaca i orijentacija.
- Poštujući pravilo o paralelnom pomaku sile sve je ove sile moguće reducirati u točku S koja je ujedno i središte masa tijela.
- Kao rezultat redukcije sila dobije se konkurentni sustav sila sa zajedničkim hvatištem u točki S plus n momenata spregova $\mathbf{M}_{s1}$ do $\mathbf{M}_{sn}$ koji su slobodni vektori pa se mogu također prikazati u točki S.

- Sve sile sada se mogu zamijeniti jednom rezultantom $\mathbf{F}_R$, a svi momenti spregova jednim rezultirajućim momentom $\mathbf{M}_R$ (slika). Postavi li se desni pravokutni koordinatni sustav s ishodištem u točki S rezultirajuća sila i rezultirajući moment sada se mogu prikazati pomoću po tri komponente u Sxyz sustavu:

$$\mathbf{F}_R = F_{Rx} \mathbf{i} + F_{Ry} \mathbf{j} + F_{Rz} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{M}_R = M_{Rx} \mathbf{i} + M_{Ry} \mathbf{j} + M_{Rz} \mathbf{k}$$

- Posljedica djelovanja sila i momenata na slobodno tijelo u prostoru su ubrzanje $\mathbf{a}$ u pravcu i smislu sile $\mathbf{F}_R$, odnosno kutno ubrzanje ε u pravcu i smislu momenta $\mathbf{M}_R$, a slijede iz II. Newtonovog zakona (zakona gibanja):

$$\mathbf{a}_R = \mathbf{F}_R / m$$

$$\varepsilon_R = \mathbf{M}_R / J_R$$

- gdje su m (kg) masa tijela, a J_R (kg m²) moment tromosti mase dotičnog tijela za os koja odgovara pravcu rezultirajućeg momenta $\mathbf{M}_R$.

- Slobodno tijelo u prostoru ima 6 stupnjeva slobode gibanja, gledajući u koordinatnom sustavu S_{xyz} to su tri nejednolike translacije po koordinatnim osima (x , y i z) te tri nejednolike rotacije oko istih koordinatnih osi.
- Uzrok translacije po pojedinoj koordinatnoj osi (x , y ili z) može biti samo komponenta sile rezultante $\mathbf{F}_R$ u toj osi (F_{Rx} , F_{Ry} i F_{Rz}), a uzrok rotacije oko pojedine koordinatne osi (x , y ili z) može biti samo komponenta rezultirajućeg momenta u toj osi (M_{Rx} , M_{Ry} i M_{Rz}).

2.4.2. Mirovanje tijela – uvjeti ravnoteže

- Ako je neka od komponenata ukupne sile jednaka nuli tada neće biti promjene gibanja u pravcu te komponente, tj. po (ili oko) te koordinatne osi.
- Da bi čitavo tijelo mirovalo, tj. da ne dođe do promjene njegovog gibanja odnosno da tijelo bude ili ostane u stanju ravnoteže, potrebno je da sve komponente rezultantne sile i sve komponente rezultantnog momenta budu jednake nuli.
- (Prema I. Newtonovom zakonu tijelo će dakle ostati u stanju mirovanja onda ako na njega ne djeluje nikakva sila.)

- Sada možemo definirati uvjet mirovanja odnosno uvjet ostajanja tijela u stanju ravnoteže ili samo kratko **uvjet statičke ravnoteže:**

Tijelo je u ravnoteži onda i samo onda kad je rezultirajuća sila, kao suma svih sila koje djeluju na tijelo, jednaka nuli i kad je rezultirajući moment, kao suma svih momenata spregova koji djeluju na tijelo, jednak nuli.

2.4.3. Analitički uvjeti ravnoteže

- Uvjeti statičke ravnoteže mogu se napisati u vektorskom obliku kao:

$$\mathbf{F}_R = \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{M}_R = \sum \mathbf{M}_{si} = \mathbf{0}$$

- Vektor $\mathbf{F}_R$ jednak je nuli onda i samo onda ako je svaka njegova komponenta (F_{Rx} , F_{Ry} i F_{Rz}) jednaka nuli, a to vrijedi i za vektor momenta $\mathbf{M}_R$ pa se zato ove dvije vektorske jednadžbe mogu pisati svaka s po tri skalarne jednadžbe po komponentama:

$$F_{Rx} = \sum F_{ix} = 0$$

$$M_{Rx} = \sum M_{six} = 0$$

$$F_{Ry} = \sum F_{iy} = 0$$

$$M_{Ry} = \sum M_{siy} = 0$$

$$F_{Rz} = \sum F_{iz} = 0$$

$$M_{Rz} = \sum M_{siz} = 0$$

- Ovih 6 jednadžbi zapravo predstavlja analitičke uvjete statičke ravnoteže u skalarnom obliku.
- U smislu onoga što je ranije rečeno svaka od ovih jednadžbi može se promatrati kao oduzimanje tijelu po jednog stupnja slobode gibanja, odn. kao uravnotežavanje tijela ili vezanje tijela po tom stupnju slobode gibanja.

2.4.4. Grafički smisao uvjeta ravnoteže

- Osim analitičkog pristupa, na uvjete ravnoteže može se gledati i s grafičkog odnosno geometrijskog stanovišta.
- Prisjetimo li se grafičkog zbrajanja vektora odnosno određivanja rezultante sustava sila pomoću plana sila, tada se može reći da vektorska jednadžba $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ predstavlja zatvoreni plan tj. poligon sila.
- Naime rezultanta sustava jednaka je nuli onda i samo onda kad se u planu sila završetak posljednje sile poklopi s početkom prve sile, a to znači da je plan sila zatvoren.

- Grafički smisao vektorske jednadžbe $\Sigma \mathbf{M}_{si} = \mathbf{0}$ je konkurentnost sila, odnosno u planu položaja samo jedna točka sjecišta svih pravaca sila iz sustava.
- Naime, uz zadovoljenje jednadžbe $\Sigma \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ jednadžba $\Sigma \mathbf{M}_{si} = \mathbf{0}$ bit će zadovoljena samo onda kad su sile konkurentne.

2.5 Veze s okolinom – oduzeti stupnjevi slobode gibanja – reakcije oslonaca

2.5.1. Slobodna i vezana tijela

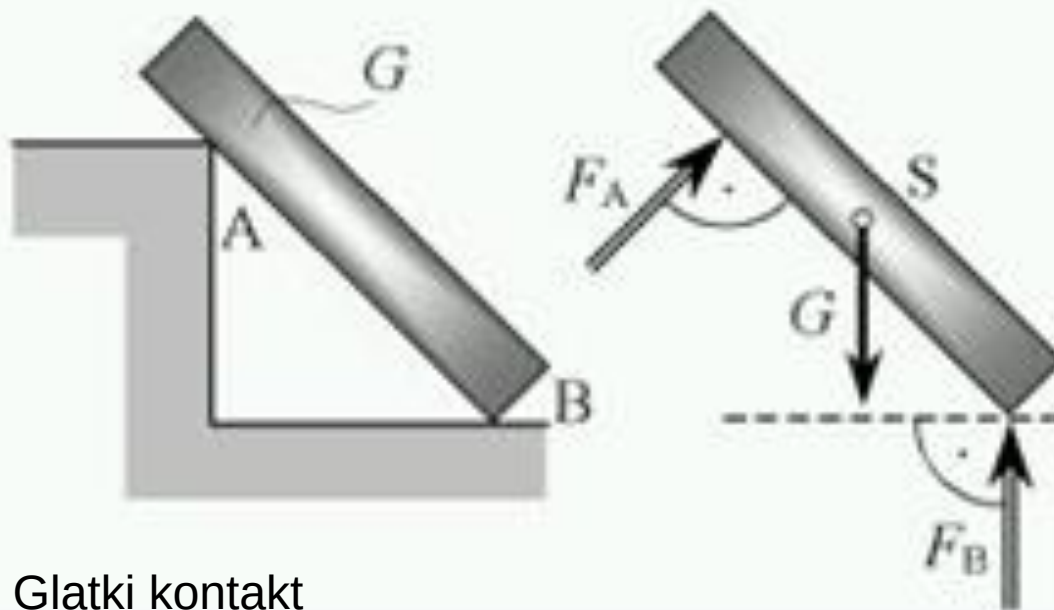
- Slobodno tijelo u prostoru ima 6 stupnjeva slobode gibanja.
- Da se ne bi gibalo, odnosno da bi ostalo u stanju ravnoteže ili da bi ostalo nepomično prema okolini potrebno mu je oduzeti te stupnjeve slobode gibanja, odnosno treba ga na određeni način povezati s okolinom.
- To se postiže pomoću određenih veza s okolinom odnosno određenih **oslonaca**.

- Svaka veza s okolinom, odn. svaki tip oslonaca oduzima tijelu po jedan ili više stupnjeva slobode gibanja, na način da se preko tog oslonca uravnotežavaju određene komponente rezultirajuće aktivne sile koja bi uzrokovala takvo gibanje.
- Drugim riječima u elementu veze s okolinom javlja se određena sila koja je prema III. Newtonovom zakonu po iznosu i pravcu jednaka, a po smislu suprotna aktivnoj sili tijela na tu vezu i koja se naziva **reakcija oslonca**.

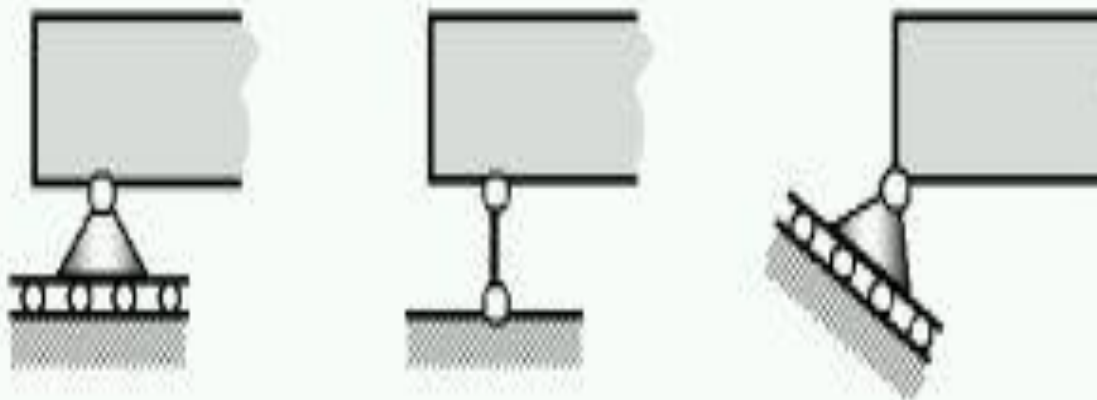
- Reakcije oslonaca unutarnje su sile sustava tijela i oslonaca.
- Da bi se uopće mogle vidjeti i analizirati potrebno je primijeniti pravilo izolacije, tj. tijelo treba izolirati, odnosno prikazati ga odvojeno od oslonaca, a na mjestu oslonaca ucrtati moguće sile reakcije dotičnog oslonca.

2.5.2. Tipični oslonci

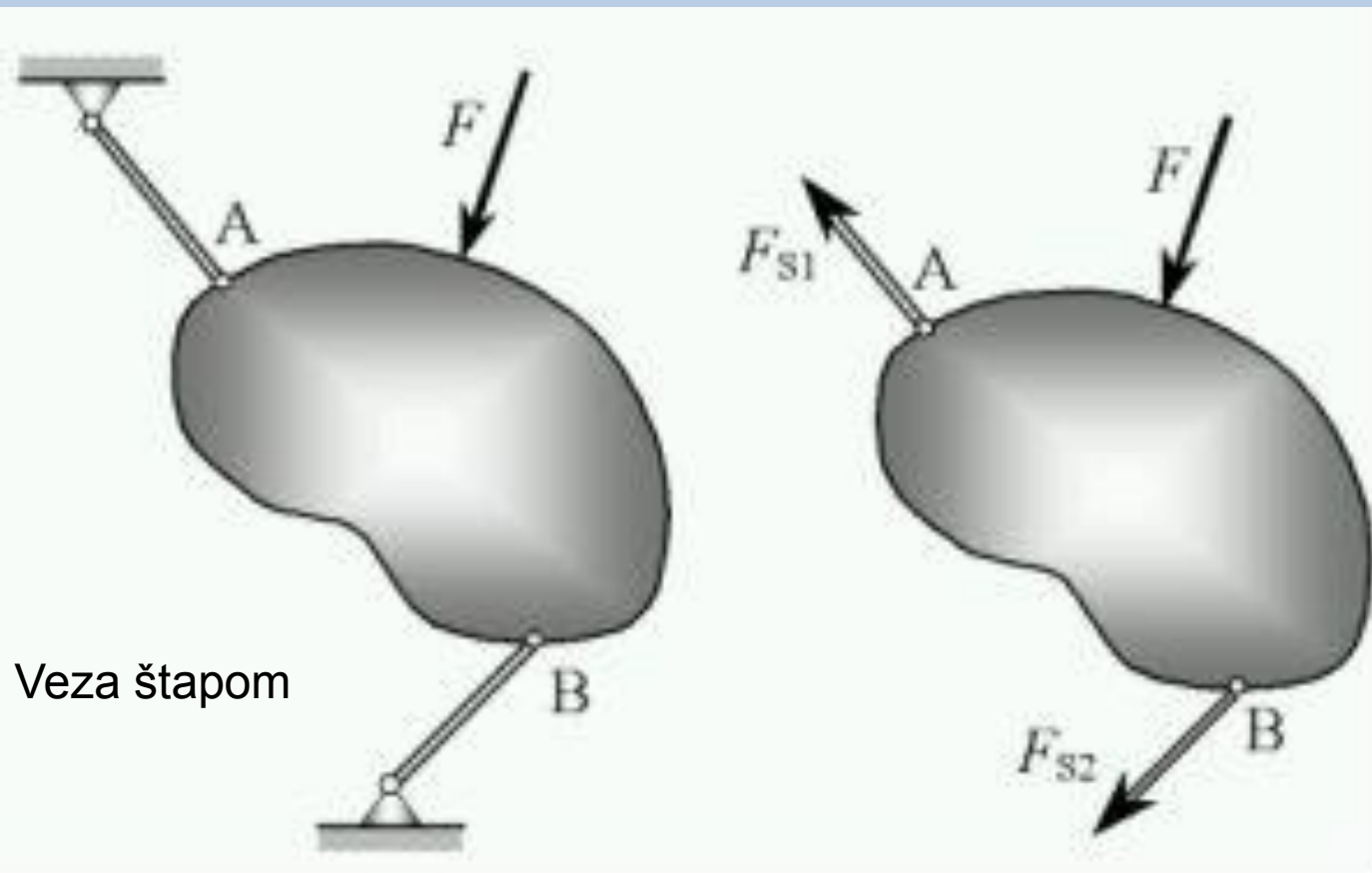
- Na sljedećim slikama je prikazano nekoliko tipova karakterističnih oslonaca s označenim oduzetim stupnjevima slobode gibanja, a moguće reakcije pojedinog oslonca prikazane su na izdvojenom tijelu (slike).
- Tipične veze tijela s drugim tijelima ili okolinom, odn. tipični oslonci su sljedeći: glatki kontakt, veza štapom, veza užetom, pomični oslonac, nepomični oslonac u ravnini i prostoru, uklještenje u ravnini i prostoru, aksijalni i radijalni ležaj.



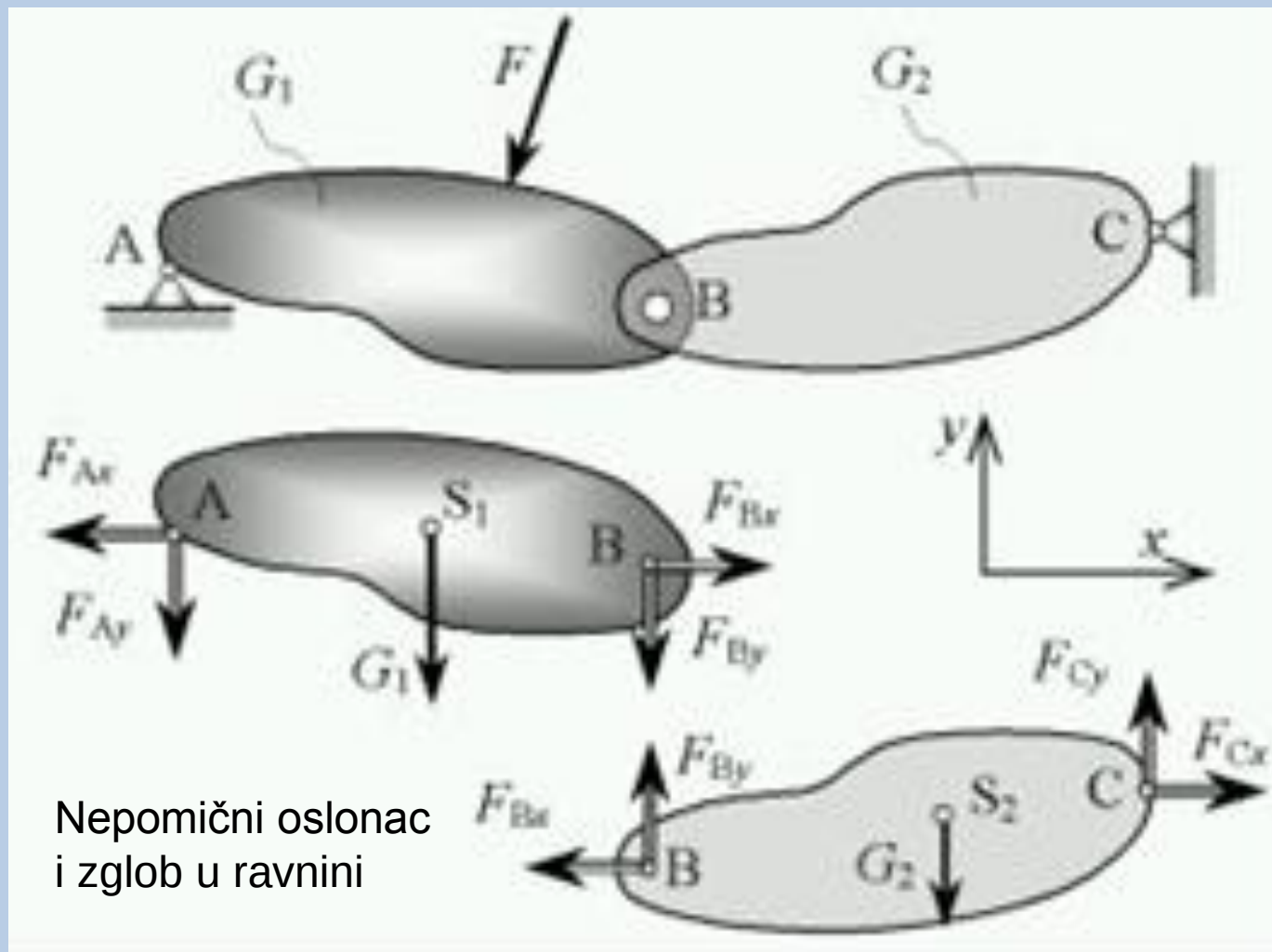
Glatki kontakt



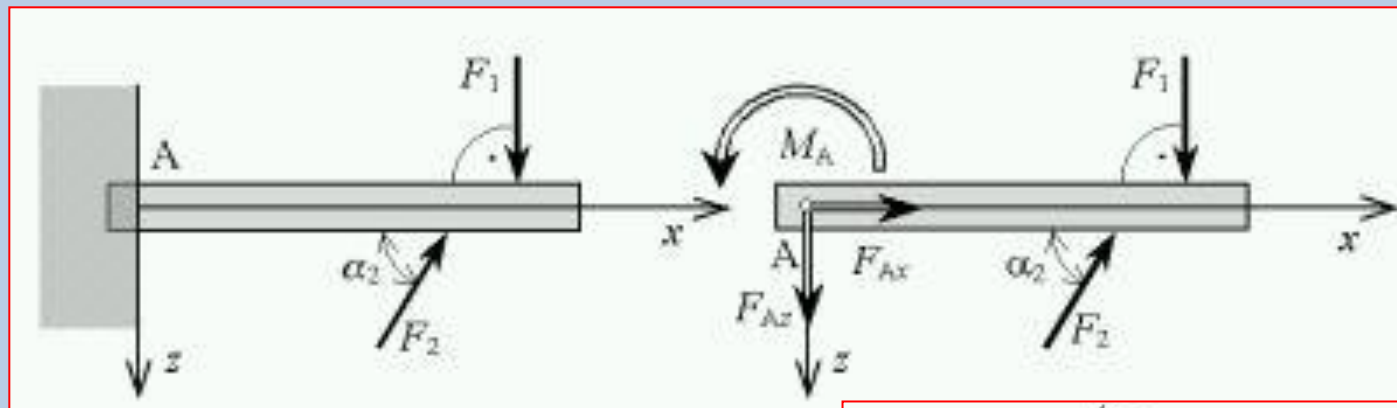
Pomični oslonci i štap



Veza štapom

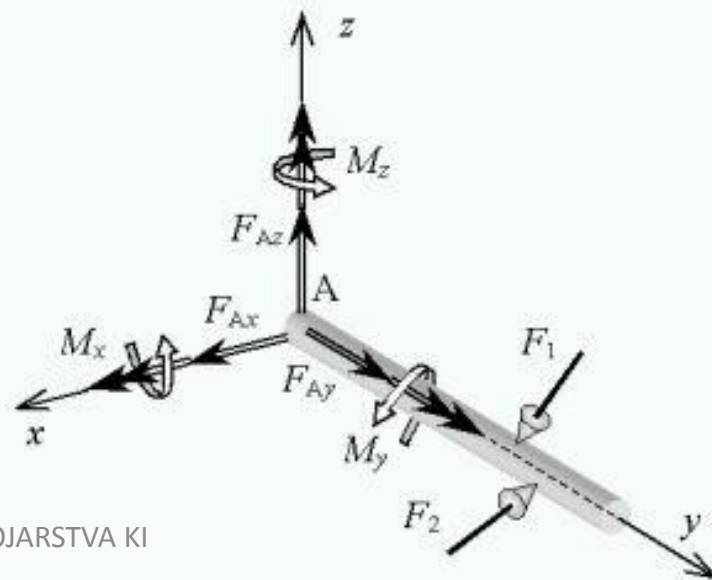
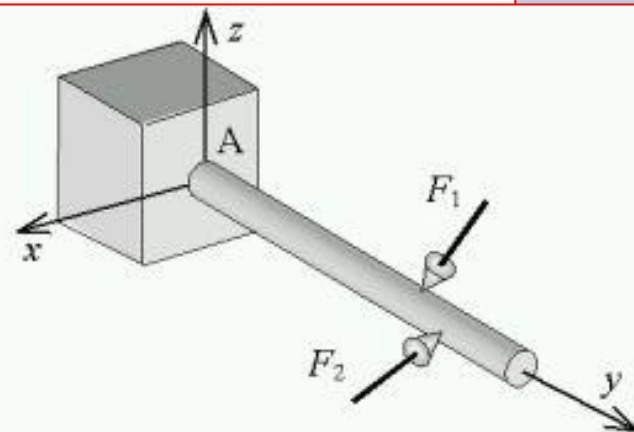


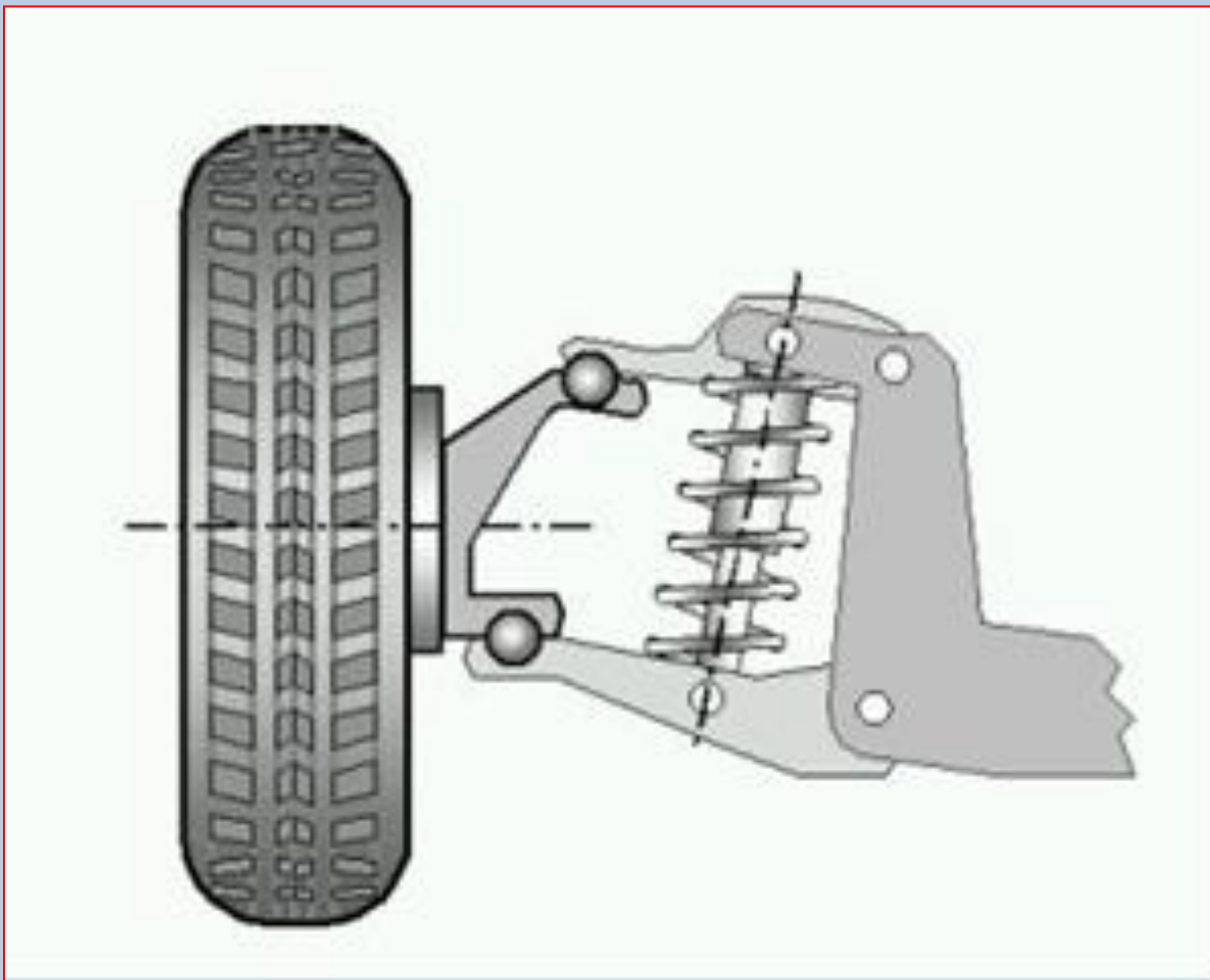
Nepomični oslonac
i zglob u ravnini



Uklještenje u ravnini oduzima tijelu sva 3 st. slobode gibanja u ravnini

Uklještenje u prostoru oduzima tijelu svih 6 stupnjeva slobode gibanja





Ilustracija raznih veza među dijelovima sustava automobilske kotača i ovjesa

2.5.3. Aktivne i reaktivne sile – razmatranje ravnoteže

- Najčešće su poznate aktivne sile koje djeluju na promatrano tijelo ili sustav tijela.
- Veza tijela s okolinom može biti poznata ili zadana unaprijed ili se tek treba uspostaviti ugradnjom pojedinih poznatih oslonaca.
- Reakcije, odnosno reaktivne sile koje će se pojaviti u uspostavljenim vezama s okolinom i koje će uravnotežiti aktivne sile odnosno osigurati ravnotežu (mirovanje) sprečavanjem gibanja (oduzimanjem pojedinih stupnjeva slobode gibanja) najčešće nisu poznate i potrebno ih je odrediti.

- Postupak određivanja reakcija oslonaca započinje primjenom pravila izolacije i ucrtavanjem mogućih komponenata reaktivnih sila u pojedinom tipu oslonca.
- Uvijek treba ucrtati i smisao dotične komponente vodeći računa o fizikalnoj utemeljenosti.
- Ako neka od reakcija može imati i pozitivan i negativan smisao dovoljno je opredijeliti se samo za jedan od njih i njega ucrtati, ne mijenjajući ga kasnije u toku analize.
- Dobiveni predznak konačnog rezultata govori da li je pretpostavljeni smisao ispravan. Naime ako je rezultat negativan broj to govori da je stvarni smisao suprotan pretpostavljenom i dalje treba računati s tim predznakom bez izmjene skice!

- Nakon što su na izoliranom tijelu ucrtane sve aktivne sile i sve moguće reakcije oslonaca potrebno je primijeniti uvjete statičke ravnoteže najčešće u analitičkom skalarnom obliku.
- U razmatranju ravnoteže uzimaju se u obzir sve aktivne i sve reaktivne sile koje djeluju na izolirano tijelo. Pri tom se suma svih vanjskih aktivnih i reaktivnih sila izjednačava s nulom jednako kao i suma momenata svih aktivnih i reaktivnih sila za istu promatranu (bilo koju, proizvoljno odabranu) točku. Nepoznate reakcije oslonaca sada se određuju rješavanjem postavljenih jednadžbi.
- Jedan primjer izolacije tijela za potrebe određivanja reakcija oslonaca prikazan je na slajdu 68 (uključeno tijelo u ravnini i prostoru).

2.4.5. Statička određenost i neodređenost

- U općenitom prostornom slučaju moguće je postaviti 6 jednažbi iz uvjeta statičke ravnoteže (3 za sume komponenata sila po pojedinim koordinatnim osima i 3 za sume momenata oko pojedinih koordinatnih osi).
- Iz ovih 6 nezavisnih linearnih jednažbi moguće je odrediti ukupno 6 nepoznatih veličina – najčešće su to sile reakcija oslonaca.

- U općenitom ravninskom slučaju opterećenja (u ravnini Oxy) moguće je postaviti samo 3 jednačbe iz uvjeta statičke ravnoteže (2 za sumu komponenata sila po koordinatnim osima x i y i 1 za sumu momenata oko koordinatne osi z).
- Ostale tri jednačbe su automatski ispunjene (nema sila po osi z i nema komponenata momenata oko osi x i y).
- Iz ove 3 nezavisne linearne jednačbe moguće je odrediti samo 3 nepoznate veličine (npr. sile reakcija oslonaca).

- Ako broj nepoznatih veličina u konkretnom inženjerskom problemu odgovara broju jednadžbi iz uvjeta statičke ravnoteže taj je inženjerski problem odn. zadatak **statički određen**.
- Ako je međutim broj nepoznatih veličina u nekom konkretnom inženjerskom problemu veći od broja mogućih jednadžbi iz uvjeta statičke ravnoteže (3 za ravninski slučaj, odn. 6 za prostorni slučaj) taj je inženjerski problem odn. zadatak **statički neodređen** i ne može se riješiti samo na temelju uvjeta statičke ravnoteže.

- Stupanj statičke neodređenosti (s) odgovara razlici broja nepoznatih veličina u dotičnom inženjerskom problemu (n) i broja mogućih jednažbi iz uvjeta statičke ravnoteže (r):

$$s = n - r$$

- U takvim se slučajevima zadaci mogu riješiti tek nakon postavljanja « s » dopunskih jednažbi koje definiraju veze među pojedinim veličinama dotičnog problema.
- Ove dopunske jednažbe najčešće se postavljaju na temelju uvjeta pomaka odnosno uvjeta deformiranja, a to već izlazi iz okvira statike krutih tijela te ćemo se time detaljnije pozabaviti u mehanici deformabilnih tijela.

2.5. Ravnoteža s trenjem – uvjeti ravnoteže u sustavima s trenjem

2.5.1. Općenito o trenju

- Vanjske površine realnih tijela nisu glatke već na njima postoje razne uzvisine i udubine, odnosno neravnine i tragovi postupka obrade koje zajedničkim imenom zovemo hrapavost površine.
- Stvarni dodir dvaju tijela stoga se ne ostvaruje po čitavoj plohi nego samo u pojedinim točkama.

- U dodirnim točkama zbog visokih dodirnih tlakova materijal se gnječi, a može doći i do međusobnog zaljepljivanja odnosno mikro-zavarivanja.
- Pri relativnom pomicanju slijepljene odn. zavarene čestice materijala sljedno se kidaju, a za što je potrebna određena sila koja se očituje kao otpor relativnom gibanju.
- Ova tangencijalna komponenta sile podloge predstavlja otpor relativnom gibanju i naziva se sila trenja.

- **Sila trenja** je dakle tangencijalna komponenta reakcije podloge na dodirnoj površini tijela, a usmjerena je suprotno od gibanja ili intencije gibanja.
- Sila trenja obavlja stanoviti rad na putu gibanja.
- Rad sile trenja pretvara se u toplinu te dolazi do zagrijavanja tijela, tj. porasta njegove temperature sve do iznosa pri kojem se uspostavi ravnotežno stanje (kad je odana toplina na okolinu jednaka trenjem stvorenoj toplini).

- Osim gnječenja materijala u dodirnim točkama, mikrozavarivanja i sljednog kidanja zavara, kao fenomenološki uzrok trenja može se spomenuti i sila adhezije među česticama materijala na dodirnim plohama.
- U pojedinim prirodnim, a posebno tehničkim sustavima, djelovanje trenja može se smatrati štetnim jer je potrebno trošiti određenu snagu na svladavanje sile trenja. Snaga za svladavanje trenja pretvara se u toplinu i ona je izgubljena za sam sustav pa se pri tom govori o gubitku snage.

- S druge strane ovako stvorena toplina mora se odvesti iz sustava kako ne bi došlo do njegova pregrijavanja (porasta temperature iznad dozvoljene granice).
- Za odvod topline (najčešće putem konvekcije) opet je potrebno utrošiti određenu snagu za strujanje rashladnog fluida, što je također gubitak za sam sustav.
- Zbog trenja dolazi i do pojačanog trošenja odnosno habanja pokretnih dijelova tehničkih sustava i njihovih oslonaca što je štetno jer skraćuje životni vijek (potrebne su češće zamjene istrošenih dijelova), a što je povezano s dodatnim troškovima.

- Postoji međutim i niz slučajeva u kojima je djelovanje trenja korisno, kao što je to npr. pri hodanju, kretanju vozila po podlozi (cesta, pruga), ali i niz razvijenih tehničkih sustava koji korisno primjenjuju silu trenja za prijenos snage i gibanja (tarenice tarnog prijenosa, remenski prijenos, tarne spojke) ili za smanjenje brzine (razne kočnice).
- Za ilustraciju korisnog djelovanja sile trenja pokušajmo pri tom samo zamisliti kako bi izgledalo hodanje ili kretanje vozila bez trenja (npr. po vrlo glatkoj zaleđenoj plohi) ili npr. zaustavljanje vozila bez kočnica.

2.5.2. Vrste trenja

- Postoje više vrsta trenja koje ćemo u nastavku navesti i samo ukratko opisati.
- Ako se dva kruta, odnosno čvrsta tijela nalaze u neposrednom kontaktu na njihovim suhim dodirnim plohama javlja se tzv. **suho trenje**. Pri tom je važno istaknuti da će se trenje javiti samo onda kad postoji neka tangencijalna sila koja uzrokuje relativno gibanje tijela, odnosno koja nastoji tijela relativno pomaknuti po dodirnim ploham.

- Ako se tijela relativno gibaju po dodirnim ploham govori se o trenju gibanja ili **kinetičkom trenju**, a ako ta tijela još uvijek međusobno miruju no imaju intenciju gibanja (sila nije dovoljno velika da ih pomakne) govori se o trenju mirovanja ili **statičkom trenju**.
- Ako se jedno tijelo translatorno pomiče po dodirnoj plohi drugog tijela ili podlozi govori se o **trenju klizanja**, a ako se jedno tijelo kotrlja po dodirnoj plohi drugog tijela ili podlozi govori se o **trenju kotrljanja**.

- Ako se jedno tijelo (najčešće valjak, ali može i kugla, stožac, itd.) rotira nekom stalnom kutnom brzinom unutar drugog posebno oblikovanog i izvedenog mirujućeg tijela govori se o **trenju ležajeva**.
- Ako se između dodirnih ploha dvaju čvrstih tijela nalazi sloj neke tekućine (kapljevine ili plina) govori se o tekućinskom trenju ili **mokrom trenju**.
- Trenje koje se javlja među česticama jednog te istog tijela u njegovoj unutrašnjosti, a do kojeg dolazi pri međusobnom klizanju čestica pod djelovanjem dovoljno velikih vanjskih sila koje uzrokuju relativne pomake tih čestica, naziva se **unutarnje trenje**.

- Iz ovog kratkog opisa sljedi da se navedene vrste trenja međusobno ne isključuju, tj. ne postoji neka jedinstvena univerzalna podjela trenja, već samo podjele po raznim kriterijima (npr. mirovanje-gibanje, klizanje-kotrljanje, suho-mokro, itd.). Tako se npr. može govoriti o suhom trenju klizanja, ili npr. o mokrom trenju u ležajevima, itd.
- Općenito je dobro upamtiti da trenje klizanja može biti dosta veće od trenja kotrljanja, jednako kao i suho trenje od mokrog trenja. Također statičko trenje nešto je veće od dinamičkog trenja.
- Neke od spomenutih vrsta trenja detaljnije su obrađene u nastavku.

2.5.3. Tekućinsko trenje

- To je trenje koje se javlja među slojevima odnosno česticama tekućine i kako je već rečeno obično je znatno manje nego trenje na suhim dodirnim plohamama.
- U tehničkim sustavima gdje se pojedini elementi u dodiru trebaju relativno gibati (npr. kod ležajeva i kliznih površina strojnih dijelova) između dodirnih ploha čvrstih tijela namjerno se dodaje sloj tekućine kako bi se postiglo mokro trenje.

- Ovdje se govori o podmazivanju pri čemu dodana tekućina mora imati dobra maziva svojstva (mora dobro prijanjati uz površinu čvrstog tijela, mora imati dobru sposobnost podnošenja velikih tlačnih sila uz istovremeno mali otpor relativnom gibanju između slojeva tekućine). Sila trenja u sloju tekućine može se odrediti prema Newtonovom zakonu viskoznosti:

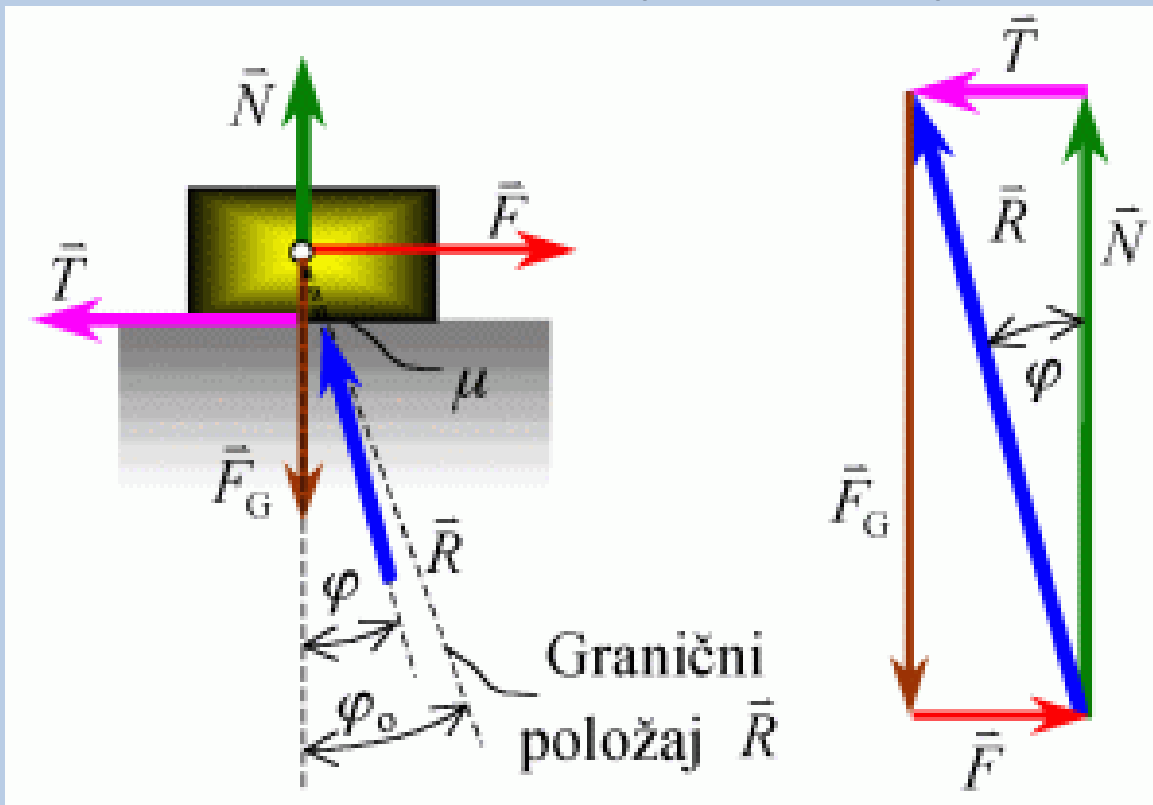
$$F_t = A_t \cdot \eta \cdot \frac{dv}{dy}$$

gdje su: A_t – veličina površine sloja tekućine, m^2
 η – koeficijent dinamičke viskoznosti, $Pa \cdot s$
 dv/dy – gradijent relativne brzine, $1/s$

- U principu sila mokrog trenja osim o viskoznim svojstvima tekućine za podmazivanje ovisi i o relativnoj brzini, odnosno gradijentu brzine te posredno o vrsti strujanja (laminarno, turbulentno).
- Mi nećemo ovdje ulaziti dublje u područje mokrog trenja no možemo samo spomenuti da je to za tehničku praksu vrlo značajno i stoga jako razvijeno područje kojim se bavi velik broj znanstvenika i stručnjaka kako na sveučilištima i znanstvenim institutima tako i u konkretnoj primjeni u praksi.

2.5.4. Suho trenje klizanja

- Ovo se trenje javlja na dodirnoj plohi tijela kad se jedno tijelo nastoji ili se već translatorno pomiče (klizi) po drugom tijelu ili podlozi s kojima je u neposrednom kontaktu (vidi sliku).



- Sila je trenja usmjerena je u suprotnom smjeru od vučne sile , opirući se tako gibanju ili namjeri (intenciji) gibanja tijela. Sila trenja može se odrediti prema Coulombovom izrazu:

$$T \leq \mu_0 \cdot N \quad [\text{N}]$$

- gdje je N normalna komponenta reakcije podloge R , a koeficijent trenja mirovanja, odn. faktor statičkog trenja koji pokazuje granični omjer sile trenja i normalne sile koje djeluju na tijela u kontaktu u trenutku prije nego započne gibanje jednog tijela prema drugom.

- Kut statičkog trenja određuje pravac reakcije kada se tijelo nalazi još uvijek u ravnoteži (granična ravnoteža) ili se tek počinje gibati.
- Veza između kuta trenja i koeficijenta trenja definirana je izrazom:

$$\mu_0 = \tan \varphi_0$$

- Samo u graničnom slučaju ravnoteže neposredno prije početka gibanja nejednadžba Coulombovog izraza postaje jednadžba:

$$T = \mu_0 \cdot N$$

- Pri ravnomjernom gibanju tijela (klizanju po hrapavoj podlozi) sila je trenja usmjerena u suprotnom smjeru od vučne sile , opirući se tako gibanju tijela. U ovom slučaju vrijedi jednačina:

$$T = \mu \cdot N$$

- gdje je dinamički koeficijent trenja odnosno faktor kinetičkog trenja:

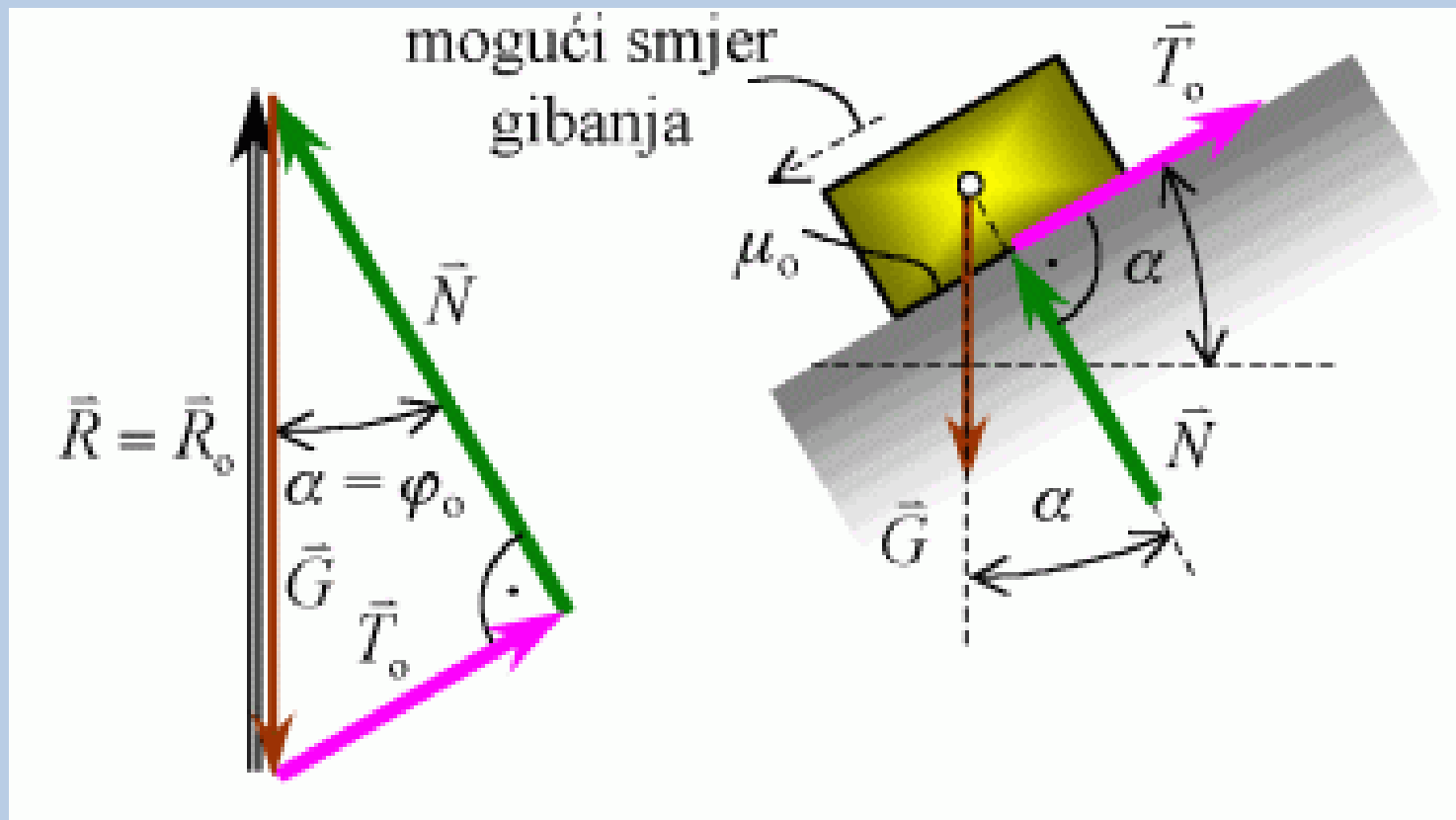
$$\mu = \tan \varphi$$

- Faktor kinetičkog trenja nešto je manji od statičkog faktora trenja što se može objasniti na sljedeći način: dok tijela, koja se dodiruju i tlače jedno drugo normalnom silom miruju, dolazi do "lijepljenja" vrškova neravnina koje postoje na površini tijela;
- pri namjeri da se jedno tijelo pomakne u odnosu na drugo, potrebno je u graničnom trenutku "otkinuti" djeliće "spojenog" materijala;
- nakon što se ove "veze" pokidaju, tijela se mogu uz manju djelatnu sila gibati jedno u odnosu na drugo.

- Iz ovoga se za koeficijent i kut dinamičkog trenja može zaključiti:

$$\mu \leq \mu_0, \quad \varphi \leq \varphi_0.$$

Ravnoteža bloka na kosoj hrapavoj plohi

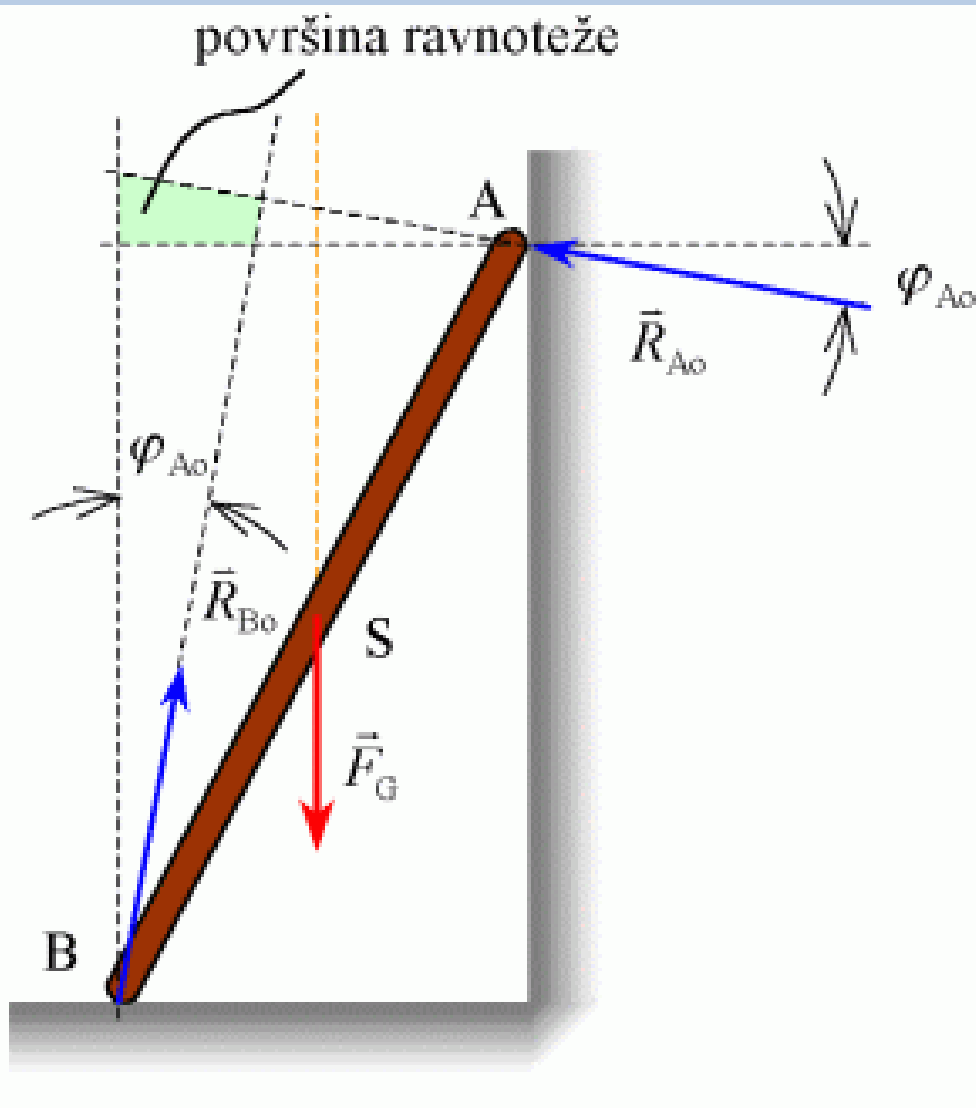


- Kod bloka na kosoj podlozi granični slučaj ravnoteže definiran je jednakošću kuta nagiba podloge i kuta statičkog trenja. Mirovanje bloka na kosini (zakočenost bloka, zavrnutog vijka, opterećenog klina s nagibom i slično) definira se uvjetom samokočivosti koji glasi:

$$\alpha \leq \varphi_0$$

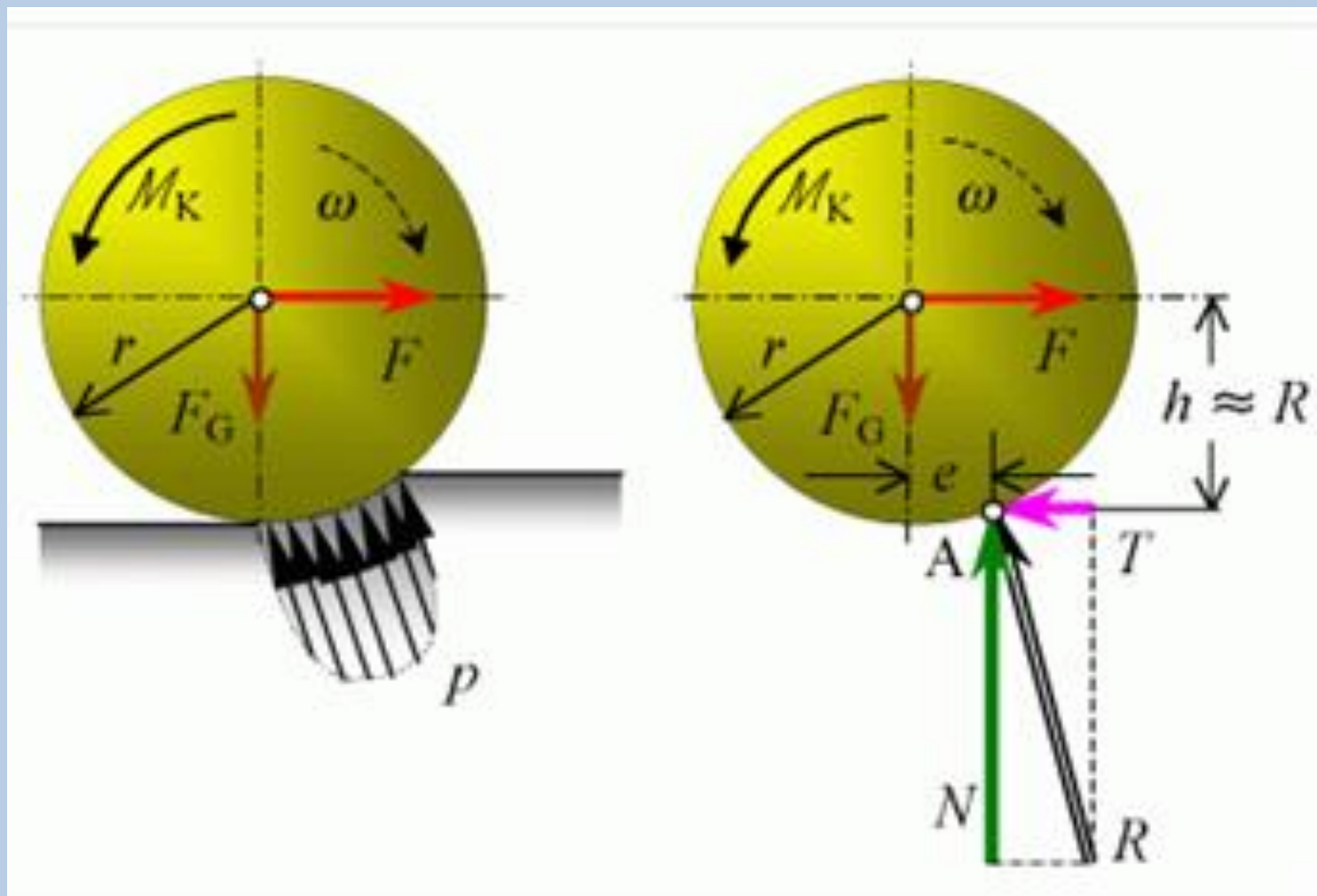
- koji se dobije iz izraza za graničnu ravnotežu (slika):

$$\frac{T_0}{N} = \tan \varphi_0$$



- Kod štapa koso oslonjenog na hrapavu podlogu (slika) može se definirati površina ravnoteže.
- Štap će biti u ravnoteži samo ako pravci reakcija podloge i sile F_G prolaze tom površinom.

2.5.5. Trenje kotrljanja



- Kod razmatranja trenja kotrljanja ne smije se zanemariti deformabilnost podloge i samog tijela na mjestu dodira kako bi se mogao izvesti adekvatan izraz.
- Dakle ovdje se odstupa od pretpostavke o apsolutnoj krutosti tijela i uzima se u obzir realna deformabilnost.
- Pri tom se dodir ostvaruje ne u točki nego na određenoj površini te je hvatište reakcije podloge ekscentrično pomaknuto u točku A.

- Sila potrebna za svladavanje otpora trenja kotrljanja može se odrediti prema izrazu:

$$F = F_G \cdot \frac{e}{r} = f \cdot F_G$$

- gdje je f faktor trenja kotrljanja ovisan o elastičnim i plastičnim svojstvima te dimenzijama tijela u dodiru:

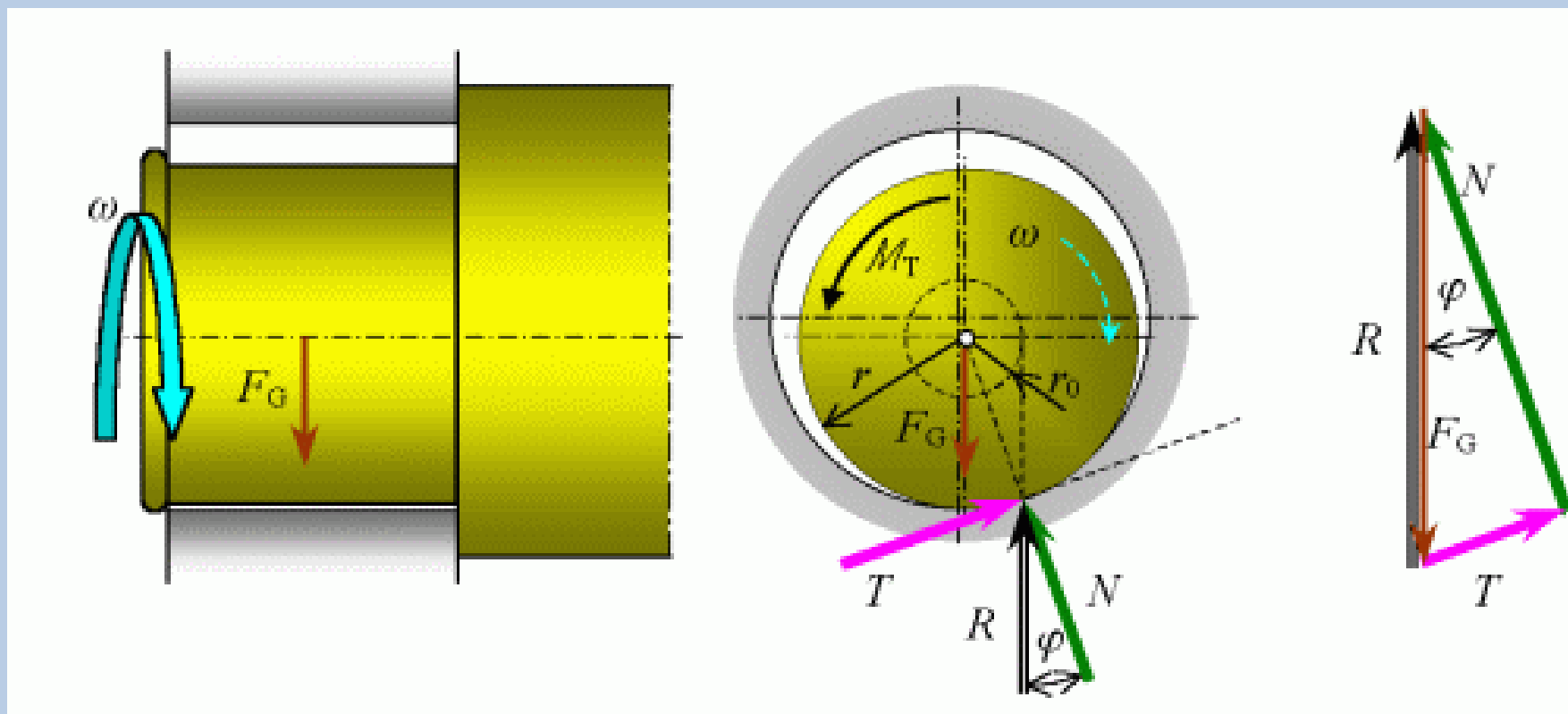
$$f = \frac{e}{r}$$

- Da bi se ostvarilo samo kotrljanje bez klizanja mora biti ispunjen uvjet da je koeficijent trenja kotrljanja manji od koeficijenta statičkog trenja klizanja:

$$f < \mu_0$$

2.5.6. Trenje rotirajućih tijela

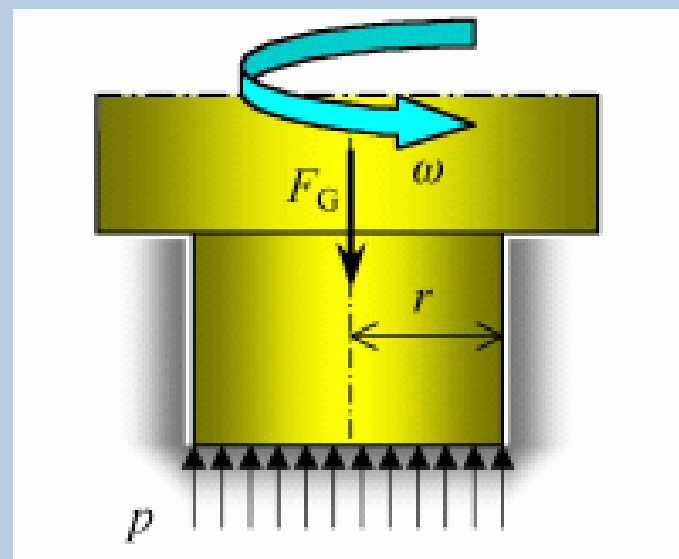
Trenje radijalnog kliznog ležaja



- Pod trenjem rotirajućih tijela smatra se trenje koje se javlja u kliznim ležajevima gdje rukavac relativno giba (rotira) unutar posteljice ležaja kližući po njegovoj unutarnjoj podlozi.
- Moment otpora trenja kod radijalnog kliznog ležaja može se odrediti prema izrazu:

$$M_T = R \cdot r_0 \approx \mu \cdot r \cdot F_G$$

Trenje aksijalnog kliznog ležaja



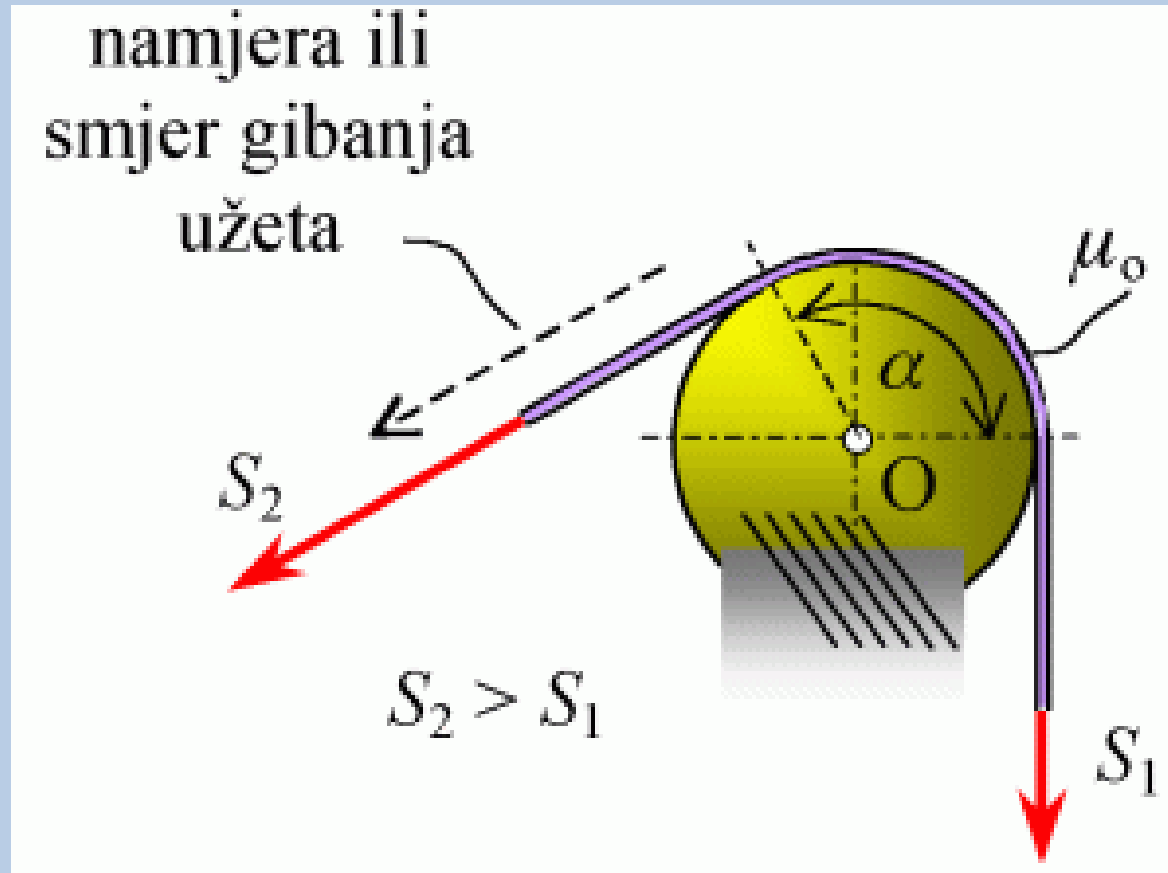
- Kod aksijalnog kliznog ležaja, uz pretpostavku da je $\mu = \text{konst}$ i da je tlak po dodirnoj plohi jednoliko raspoređen između čela rukavca i ležaja, moment otpora trenja na rukavac vratila može se odrediti prema izrazu:

$$M_T = \frac{2}{3} \cdot \mu \cdot r \cdot F_G$$

- Iz izraza slijedi da je moment otpora trenja ležaja proporcionalan veličini sile, veličini rukavca i dinamičkom koeficijentu trenja.
- Kako je veličina radijusa rukavca u pravilu određena veličinom sile koju ležaj preuzima od rotirajućeg sustava sljedi da je koeficijent trenja jedini faktor na koji se može djelovati u cilju smanjenja otpora trenja ležajeva.
- Trenje ležajeva je štetno jer se mora trošiti rad odn. snaga na održavanje gibanja rukavca, a također taj se rad pretvara u toplinu koja grije sustav.

- Radi održavanja ograničene temperature ležaja sustav se mora hladiti na što se troši dodatna energija.
- Zbog svega toga ležajevi se podmazuju čime se smanjuje koeficijent trenja (umjesto suhog trenja postiže se mokro odn. tekućinsko trenje - hidrodinamičko podmazivanje).
- Podmazivati se može nanošenjem sloja mazivog ulja ili nekog drugog fluida (kapljevine ili plina) odnosno čvrste tvari između dodirnih ploha rukavca i posteljice ležaja.

2.5.7. Trenje elastičnog i krutog tijela (trenje užeta ili remena na valjku)



- Osnovna je pretpostavka da je elastično tijelo idealno savitljivo tako da ravnomjerno naliježe na podlogu (u pravilu valjak). Praktički se to ostvaruje ako je promjer užeta ili debljina remena znatno manji od promjera valjka.
- Za određivanje graničnog omjera sila u vučnom i slobodnom ogranku (kraku) koristi se Eulerov izraz iz kojeg proizlazi da je sila u vučnom kraku veća od sile u slobodnom kraku:

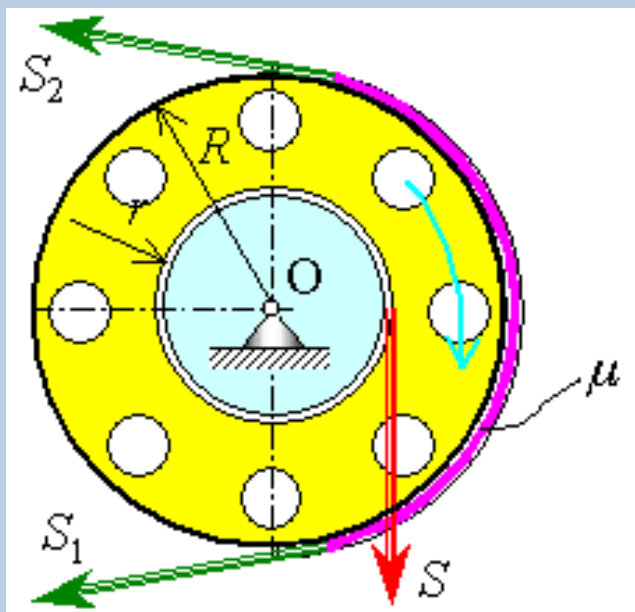
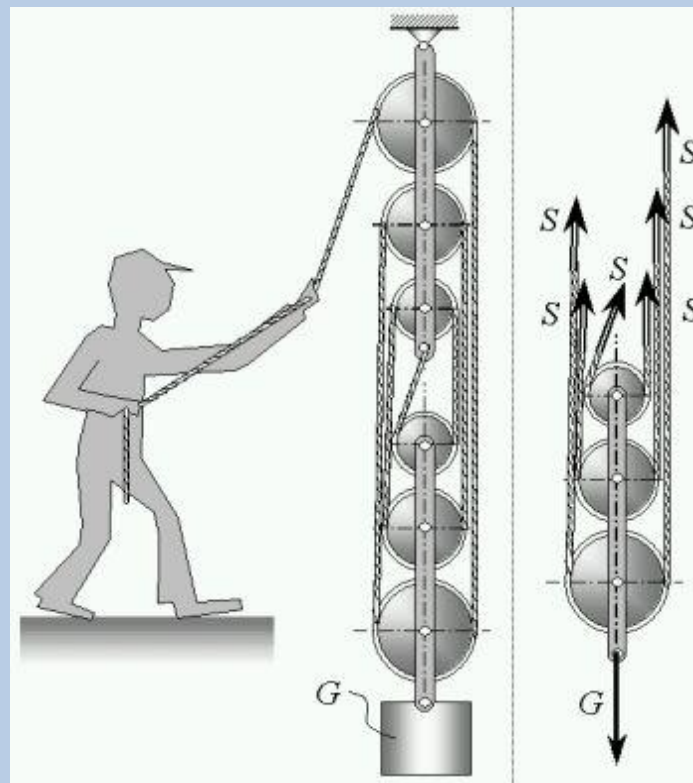
$$S_2 = S_1 \cdot e^{\mu_0 \cdot \hat{\alpha}}$$

- Obohvatni kut α u Eulerovom izrazu mora se uvrštavati u radijanima:

$$\hat{\alpha} = \alpha^o \cdot \frac{2\pi}{360}$$

Primjeri primjene Eulerovog izraza:

- Ovisno o sustavu na koji se primjenjuje može se tražiti da sila u vučnom kraku bude što veća ili u drugom slučaju što manja.
- Na primjer za pridržavanje tereta pri spuštanju tereta željeli bi da sila S_1 kojom pridržavamo teret bude što manja odnosno drugim riječima da omjer sila S_2/S_1 bude što veći. To će se dogoditi uz veliki koeficijent trenja μ .
- U drugom opet slučaju ako dižemo teret tada bi htjeli da sila povlačenja S_2 bude što manja pa bi nastojali da koeficijent trenja μ bude što manji.



- Primjeri gdje je sila trenja korisna i gdje se nastoji povećati omjer sile u vučnom kraku u odnosu prema sili u slobodnom kraku, odnosno gdje se nastoji dobiti što veća razlika ovih sila koja ujedno odgovara ukupnoj sili trenja duž čitavog obuhvatnog kuta tijela u dodiru, a djeluje u smjeru zakrivljene uzdužne osi elastičnog tijela su sljedeći:
 - pojasne kočnice
 - remenski prijenos
 - zaustavljanje manjih brodova u luci omatanjem užeta oko stupa (ovdje se za razliku od prethodnih slučajeva ne može djelovati na povećanje koeficijenta trenja μ već na povećanje obuhvatnog kuta višekratnim omatanjem užeta oko stupa - za svaki se namotaj kut α poveća za 2π).