



Sveučilište u Zagrebu
Fakultet kemijskog
inženjerstva i tehnologije



1. UVOD U INŽENJERSKU MEHANIKU

- za internu uporabu

prof. dr. sc. Veljko Filipan

Zavod za termodinamiku, strojarstvo i energetiku

1.1. Mehanika i tehnička mehanika

- **Mehanika** je najstariji, najdosljedniji i najvećim dijelom «zatvoren» dio fizike. Klasična mehanika kao znanost potječe još od starih Grka, no suvremeno obilježje dobiva u 17. stoljeću poticajem poznatog djela «Matematički principi prirodne filozofije» (Sir Isaac Newton, 1687.).
- Ime mehanika uvodi talijanski matematičar, filozof i fizičar Galileo Galilei (1564-1642), a dolazi od grčke riječi *mehane* što znači *stroj* ili *sprava*.

- Mehanika izučava sile i gibanja te njihove međuovisnosti, a temelji se na nekoliko iskustvenih ili prirodnih zakona koji imaju aksiomatsko obilježje. Spomenimo tu samo tri temeljna Newtonova zakona:
 - **1. Newtonov zakon ili zakon inercije** (tromosti) može se definirati na slijedeći način: Svako tijelo ostaje u stanju mirovanja ili jednolikog gibanja po pravcu sve dotle dok na njega ne počne djelovati neka sila.
 - **2. Newtonov zakon ili zakon gibanja**: Ako na tijelo počne djelovati sila ono će se ubrzavati u pravcu i smislu sile ubrzanjem koje je proporcionalno sili, a obrnuto proporcionalno masi tijela. Češće se ovaj zakon koristi u obliku: Sila «F» jednaka je umnošku mase «m» i ubrzanja «a» ($F = m a$).
 - **3. Newtonov zakon ili zakon akcije i reakcije** glasi: Sili akcije uvijek je jednaka po iznosu i pravcu, a suprotno usmjerena sila reakcije.

- Pored Newtona razvoju suvremene mehanike pridonijeli su i Hooke (Robert Hooke, 1635-1703), Bernoulli (Jakob Bernoulli, 1655-1705; i Daniel Bernouli, 1700-1782), Euler (Leonhard Euler, 1707-1783), D'Alembert (Jean Le Rond D'Alembert, 1717-1783), Poisson (Simeon Denis Poisson, 1781-1840), Navier (Claude Louis Marie Henri Navier, 19.st.), Coulomb (Charles Augustin de Coulomb, 1736-1806), Reynolds (Osborn Reynolds, 1842-1912) kao i mnogi drugi fizičari.

- **Tehnička mehanika** (inženjerska mehanika ili **primijenjena** mehanika) je zasebna disciplina mehanike koja se praktično koristi u rješavanju inženjerskih problema.
- I mehanika i tehnička mehanika izgrađene su na istim temeljima, ali se razlikuju u ciljevima i metodama kojima se služe. Ukratko se može reći da je osnovni cilj tehničke mehanike razvoj sposobnosti predviđanja djelovanja sila i gibanja s primjenom u kreativnom postavljanju i rješavanju tehničkih problema.
- Tehnička mehanika dijeli se općenito na mehaniku krutih tijela, mehaniku deformabilnih tijela i mehaniku fluida, a razvijena su i posebna područja, kao npr. teorija vibracija i teorija mehanizama.

- **Mehanika krutih tijela** dijeli se na statiku i dinamiku.
- **Statika** proučava tijela u stanju mirovanja (i jednolikog pravocrtnog gibanja), a **dinamika** proučava tijela pri gibanju.
- Pod gibanjem u tehničkoj se mehanici podrazumijeva mehaničko gibanje tijela, tj. promjena položaja tijela u vremenu i prostoru.
- Stanje mirovanja je samo relativno i možemo ga smatrati posebnim slučajem gibanja. Tako npr. tijelo koje miruje relativno prema Zemlji giba se zajedno sa Zemljom oko Sunca, što znači da u prirodi nema apsolutno mirujućih tijela.

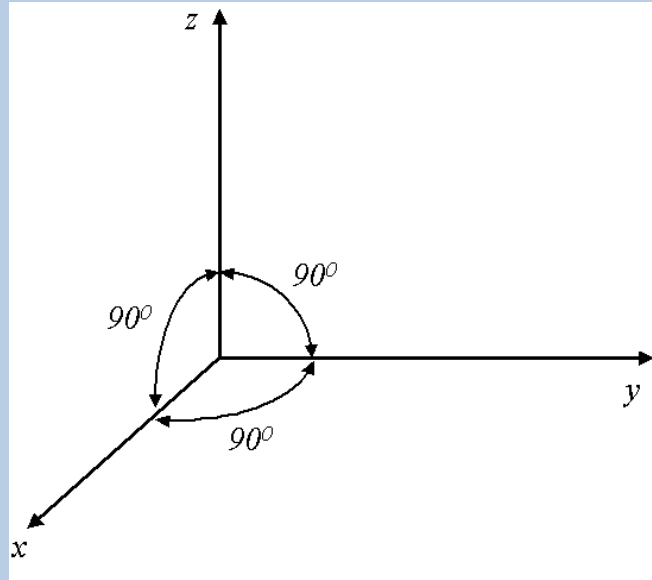
- Pod pojmom **krutog tijela** ovdje podrazumijevamo **apsolutno kruto tijelo**. To je skup materijalnih čestica koje su međusobno povezane takvim vezama da pod djelovanjem bilo kako velikih sila čestice ne mijenjaju svoj relativni položaj u tijelu, a tijelo ne mijenja svoj vanjski oblik i dimenzije. Ovakvo tijelo u stvarnosti ne postoji, ali nam ova pretpostavka omogućava zadovoljavajuće rješavanje brojnih inženjerskih zadataka.
- Stvarna tijela u prirodi su **čvrsta ili deformabilna**, tj. mijenjaju svoj oblik i dimenzije pod djelovanjem opterećenja. Međutim, kod mnogih strojeva, uređaja i elemenata konstrukcija, deformacije su obično tako male da bitno ne utječu na dobiveni rezultat, te ih iz tog razloga možemo zanemariti i služiti se pretpostavkom o apsolutnoj krutosti tijela.

- **Mehanika deformabilnih tijela** ili mehanika čvrstih tijela tradicionalno se naziva još i nauka o čvrstoći (na strojarskim fakultetima) ili otpornost materijala (na građevinskim fakultetima).
- Ovo je grana tehničke mehanike koja proučava ponašanje realnih tijela, dakle deformabilnih, odnosno čvrstih tijela, kada na njih djeluju različita opterećenja.
- Deformacije se ovdje uzimaju u obzir neovisno o njihovom iznosu odnosno veličini. U pojedinim slučajevima, npr. kod statički neodređenih zadataka, tek geometrijska analiza načina deformiranja tijela omogućava rješavanje tehničkog problema.

- **Mehanika fluida** je dio tehničke mehanike koji proučava zakonitosti ponašanja fluida (kapljevina i plinova) u stanju mirovanja ili gibanja.
- U okviru kolegija "Osnove strojarstva" detaljnije se proučavaju samo osnove statike krutih tijela i mehanike deformabilnih, odnosno čvrstih tijela, dok se mehanika fluida izučava kao poseban predmet na višim godinama studija.

1.2. Prostor i vrijeme

- Da bi se olakšalo rješavanje zadataka u mehanici položaj tijela se promatra u prikladno "organiziranom" **prostoru**, tj. u adekvatno izbranom **koordinatnom sustavu**.
- Najčešće se koristi desni **pravokutni koordinatni sustav** koji se naziva još i Descartesov ili kartezijev (Cartesiusov) koordinatni sustav prema francuskom filozofu, matematičaru i prirodoslovcu Reneu Descartesu (lat. Renatus Cartesius, 1596-1650) koji ga je prvi počeo primjenjivati.



- Položaj tijela ili neke njegove točke u takvom koordinatnom sustavu određen je s tri koordinate, tj. s tri dužine na **tri međusobno okomita pravca** koje se mjere od referentne točke ili **ishodišta** koordinatnog sustava.
- Osnovna jedinica za mjerenje ovih dužina u SI sustavu mjera i jedinica je metar (m).

- **Vrijeme** je univerzalna nezavisna varijabla u klasičnoj mehanici. Osnovna jedinica za mjerenje vremena u SI sustavu mjera i jedinica je sekunda (s). Pri razmatranju tijela u relativnom mirovanju nema međutim potrebe za tom varijablom.

1.3. Masa, gravitacija i težina

- **Masa** je dopunska značajka tijela, odnosno konglomerata čestica od kojih se tijelo sastoji. Osnovna jedinica za masu u SI sustavu mjera i jedinica je kilogram (kg). Masa tijela na određeni način predstavlja njegovu tromost, tj. svojstvo tijela da se opire promjeni translacijskog gibanja.
- **Težina** tijela je gravitacijska sila Zemlje koja djeluje na tijelo smješteno na njenoj površini ili u njenoj blizini tako da ga privlači prema svom središtu. Budući da je težina sila, osnovna jedinica za težinu tijela u SI sustavu mjera i jedinica je njutn (N).

- Privlačna sila F između dva tijela pojedinačnih masa m_1 i m_2 čija su središta međusobno udaljena za udaljenost r općenito se može odrediti prema zakonu gravitacije iz izraza :

$$F = K \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad [\text{N}] \quad (1)$$

- gdje je $K = 6.673 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3\text{kg}^{-1}\text{s}^{-2}$ univerzalna gravitacijska konstanta.

- Gravitacijska sila djeluje na tijela bez obzira da li ona miruju ili se gibaju, a također nije potrebno da tijela budu u međusobnom dodiru. Naime oko svakog tijela postoji određeno potencijalno polje masenih sila koje se može definirati specifičnom silom privlačenja ili **gravitacijskim ubrzanjem**. U skladu s II. Newtonovim zakonom iz izraza za silu (1) može se odrediti izraz za gravitacijsko ubrzanje u obliku:

$$g = \frac{F}{m_2} = K \cdot \frac{m_1}{r^2} \quad (2)$$

- Ako se u izraz (2) uvrsti iznos mase Zemlje $m_1=5.976 \cdot 10^{24}$ [kg] i njezin prosječan polumjer $r=6.371 \cdot 10^6$ [m] dobije se prosječno ubrzanje na površini Zemlje $g=9.824$ [m/s²].
- Međutim, kako Zemlja nije pravilna kugla već je spljoštena na polovima, za točniji izračun gravitacijskog ubrzanja trebalo bi koristiti formulu koja uzima u obzir i zemljopisnu širinu (međunarodna gravitacijska formula).
- Za rješavanje praktičnih zadataka može se u većini slučajeva računati s prosječnim iznosom gravitacije Zemlje od:

$$\mathbf{g = 9.81 \, ms^{-2} \qquad (3)}$$

- Iznos težine G tijela na Zemlji određuje se u skladu s II. Newtonovim zakonom kao umnožak mase tijela m i gravitacije Zemlje g prema izrazu:

$$G = m g \text{ [N]} \quad (4)$$

1.4. Skalarne i vektorske veličine

- Vrijeme i masa su veličine koje su u potpunosti određene samo iznosom, npr. masa od 3 kg, ili tijekom vremena od 3 s. Te veličine spadaju u tzv. **skalarne** veličine.
- **Skalar** je naime veličina za čije je potpuno poznavanje dovoljan samo jedan podatak - iznos te veličine. Konkretno broj ovisi o tome koji je sustavu mjera i jedinica izabran za prikaz skalarne veličine (SI, cgs, britanski, ...).

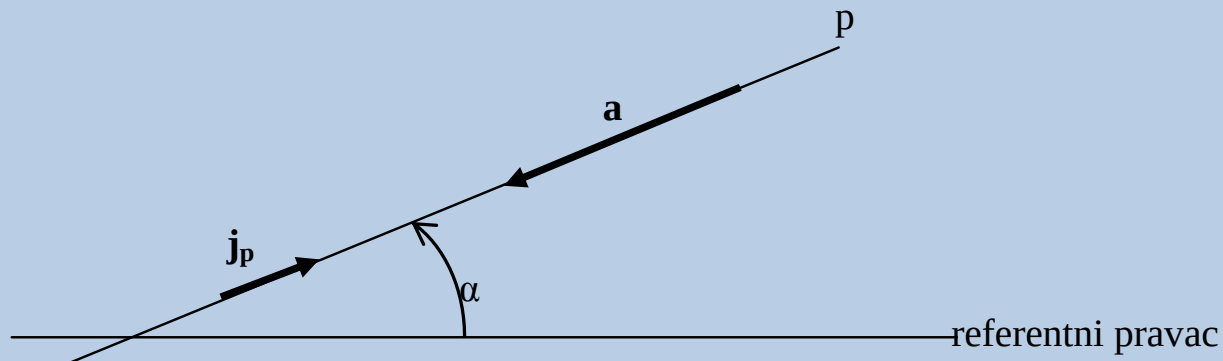
- Međutim, da bi u potpunosti odredili veličine kao što su gravitacija i težina, nije dovoljno znati samo njihov iznos. Trebamo znati i pravac djelovanja (smjer) i orijentaciju (smisao). Ove veličine spadaju u tzv. **vektorske** veličine.
- **Vektori** su veličine za čije su potpuno poznavanje potrebna tri podatka. To mogu biti brojčani iznos veličine u određenom sustavu mjera i jedinica, pravac djelovanja (koeficijent smjera pravca) i orijentacija na pravcu (lijevo ili desno, gore ili dolje, naprijed ili natrag, odnosno općenito plus ili minus).

- Međutim, to mogu biti i bilo koja druga tri nezavisna podatka, npr. iznosi triju komponenata vektora u koordinatnim osima pravokutnog koordinatnog sustava. Ovaj posljednji primjer interesantan je u slučaju geometrijskog prikazivanja vektora kao usmjerene dužine u koordinatnom sustavu.
- Računanje sa skalarnim veličinama je vrlo jednostavno jer vrijede sva pravila računanja s običnim brojevima, dok je računanje s vektorima nešto složenije i pri tom treba poznavati operacije vektorske algebre

1.5. Osnovne operacije s vektorima

Grafički (geometrijski) prikaz vektora

- Na slici 1. dan je grafički ili geometrijski prikaz vektora **a**. Vektor je prikazan kao usmjerena duljina na pravcu p koji je određen koeficijentom smjera prema nekom referentnom pravcu ili ravnini (npr. horizontali).
- Koeficijent smjera pravca p zapravo je tangens kuta nagiba pravca prema referenci (u ovom slučaju $\tan \alpha$).

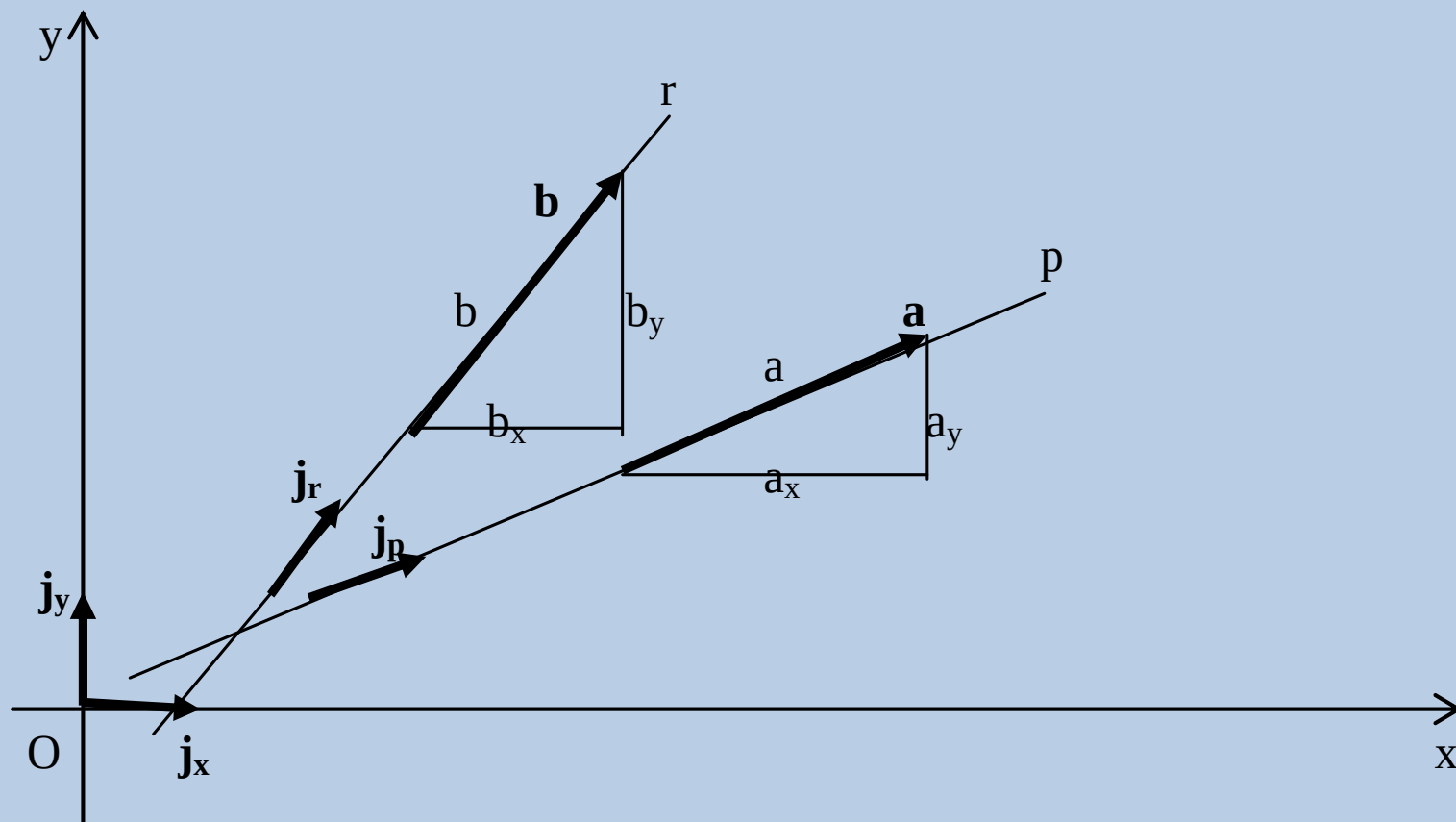


Slika 1. Grafički prikaz vektora

- Jedinična usmjerena duljina $\mathbf{j}_p$ na pravcu p naziva se jedinični vektor pravca p , a to je vektor na pravcu p čija je duljina jednaka jednoj mjernoj jedinici u izabranom sustavu mjera i jedinica (npr. 1 m ili 1 N). Svaki vektor na pravcu p može se prikazati pomoću jediničnog vektora na tom pravcu pa se tako vektor $\mathbf{a}$ može pisati na sljedeći način:

$$\mathbf{a} = -a \mathbf{j}_p \quad (5)$$

- pri čemu jedinični vektor $\mathbf{j}_p$ definira da je vektor $\mathbf{a}$ na pravcu p s koeficijentom smjera $\tan \alpha$, a iznos ili veličina vektora $\mathbf{a}$ definirana je modulom „ a ” vektora $\mathbf{a}$.
- Predznak „ $-$ ” označava da je smisao vektora $\mathbf{a}$ suprotan smislu jediničnog vektora $\mathbf{j}_p$.



Slika 2. Vektori u ravnini

- U skladu s izrazom (5), vektor **a** koji leži na pravcu p i vektor **b** koji leži na pravcu r (slika 2) mogu se pisati pomoću jediničnih vektora na pravcima p (**j_p**) i r (**j_r**) kao:

$$\mathbf{a} = a \mathbf{j}_p \quad (6)$$

$$\mathbf{b} = b \mathbf{j}_r \quad (7)$$

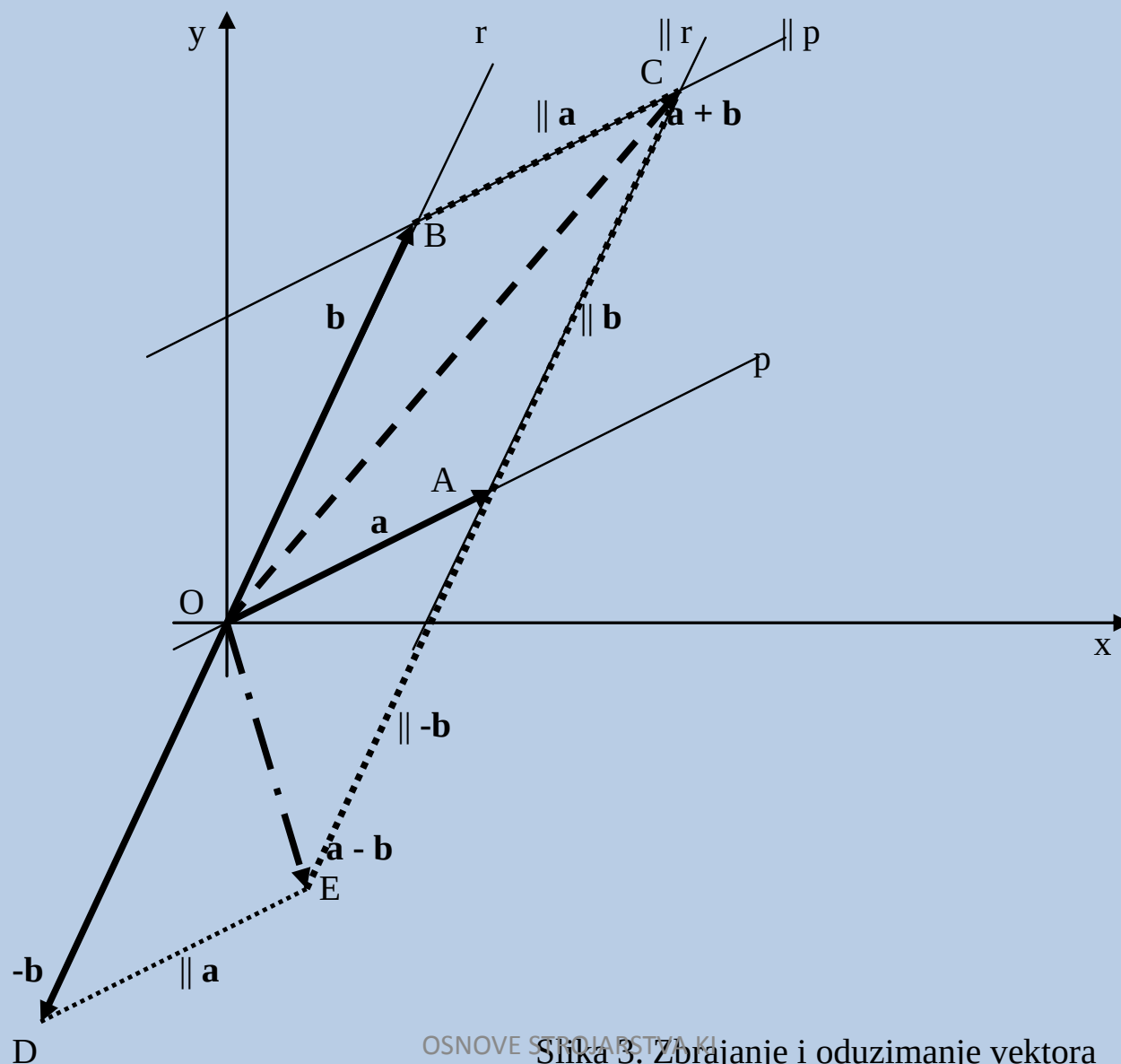
- Druga mogućnost je definiranje koordinatnog sustava Oxy u ravnini koju čine pravci p i r s jediničnim vektorima **j_x** i **j_y** u pravcu i smislu koordinatnih osi x i y.

- Vektori **a** i **b** sada se mogu pisati pomoću njihovih komponenata u dvije međusobno okomite osi (x, y) desnog pravokutnog koordinatnog sustava (Oxy) na sljedeći način:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{j}_x + a_y \mathbf{j}_y \quad (8)$$

$$\mathbf{b} = b_x \mathbf{j}_x + b_y \mathbf{j}_y \quad (9)$$

Zbrajanje i oduzimanje vektora



- Vektori se zbrajaju tako da se posebno zbroje njihove komponente po pojedinim koordinatnim osima, na sljedeći način:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x) \mathbf{j}_x + (a_y + b_y) \mathbf{j}_y \quad (10)$$

- Oduzimanje se može smatrati zbrajanjem s negativnim predznakom pa vrijedi:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = (a_x - b_x) \mathbf{j}_x + (a_y - b_y) \mathbf{j}_y \quad (11)$$

Množenje i dijeljenje vektora sa skalarom

- Vektor se množi, odnosno dijeli sa skalarom, tako da se s tim skalarom pomnoži, odn. podijeli, iznos (modul) vektora tj. iznos svake od njegovih komponentata, pri čemu pravac vektora ostaje nepromijenjen. Smisao vektora također ostaje nepromijenjen, osim u slučaju kada je skalar negativan broj. To se može pisati na sljedeći način:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} k = (k a_x) \mathbf{j}_x + (k a_y) \mathbf{j}_y \quad (12)$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} / k = (a_x/k) \mathbf{j}_x + (a_y/k) \mathbf{j}_y \quad (13)$$

Skalarno množenje dva vektora

- Rezultat skalarnog množenja dva vektora (**a** i **b**) je skalar (**c**) koji se dobije kao zbroj umnožaka iznosa istovjetnih komponenata oba vektora, tj.:

$$c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y \quad (14)$$

- Skalar **c** može se dobiti i kao umnožak iznosa prvog vektora (**a**) s iznosom drugog vektora (**b**) i kosinusom kuta među njihovim pravcima (γ):

$$c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cdot \cos \gamma \quad (15)$$

- Kut γ pri tom se mjeri od pravca i smisla vektora **a** prema pravcu i smislu vektora **b** u pozitivnom smjeru obilaženja. (U desnom pravokutnom koordinatnom sustavu 0xy pozitivni smisao obilaženja je od pozitivne osi x prema pozitivnoj osi y.)

Vektorsko množenje dva vektora

- Rezultat vektorskog množenja dva vektora (**a** i **b**) je vektor (**c**) okomit na oba vektora, odnosno okomit na ravninu koju čine vektori **a** i **b**. Pretpostavi li se da su vektori **a** i **b** u ravnini x-y tada vektor **c** leži na okomici na tu ravninu, odnosno u osi z s jediničnim vektorom **j_k** te se može pisati:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = c \mathbf{j}_k \quad (16)$$

- Iznos vektora **c** može se dobiti kao razlika umnožaka iznosa neistovjetnih komponentata oba vektora, tj.:

$$c = (a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x) \quad (17)$$

- odnosno kao umnožak iznosa prvog vektora (a) s iznosom drugog vektora (b) i sinusom kuta među njihovim pravcima (γ):

$$c = a \cdot b \cdot \sin \gamma \quad (18)$$

- Kut γ pri tom se mjeri od pravca i smisla vektora **a** prema pravcu i smislu vektora **b** u pozitivnom smjeru obilaženja. (U desnom pravokutnom koordinatnom sustavu Oxy pozitivni smisao obilaženja je od pozitivne osi x prema pozitivnoj osi y .)
- Na ovaj način dobije se iznos i pravac vektora **c**, a za njegovo potpuno definiranje potrebno je poznavati i smisao na pravcu (+ ili –).

- Smisao vektora $\mathbf{c}$ koji je rezultat vektorskog produkta vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ može se odrediti prema pravilu desne ruke. Ovo pravilo ukratko se može opisati na sljedeći način:
Ispružene prste desne ruke (kažiprst, srednji prst, prstenjak i mali prst) usmjerimo u pravcu i smislu vektora $\mathbf{a}$, zatim ih zakrenemo prema pravcu i smislu vektora $\mathbf{b}$ (pripaziti na najbliži put prema pravcu i smislu, tj. strelici vektora $\mathbf{b}$) i ispruženi palac desne ruke pokazuje pravac i smisao vektora $\mathbf{c}$.

