Fakultet kemijskog inženjerstva
i tehnologije

Zavod za fiziku

FIZIKA I.

TITRANJE

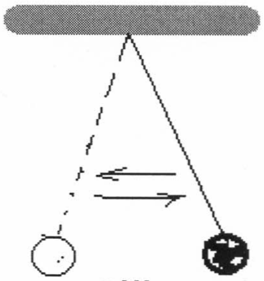
(interna skripta)

Prof. dr. sc. Vesna Volovšek
Prof. dr. sc. Vjera Lopac

Zagreb, 2010.

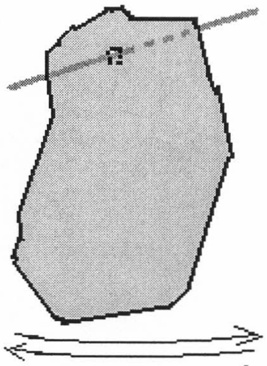
Titranje

Titranje (oscilatorno gibanje) je jedno od najčešćih gibanja u prirodi. To je gibanje pri kojemu materijalna čestica (oscilator) prevaljuje određeni put između dvaju krajnjih položaja, vraća se istim putem, nakon čega se to gibanje periodički ponavlja. Titrati može materijalna točka, kruto tijelo, pa i tekućina u posudi. Primjeri titranja su, na primjer, njihanje male kuglice na dugoj nerastezljivoj niti (Sl. 1),



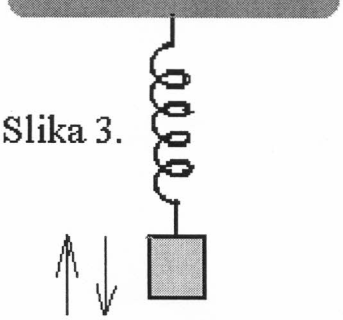
Slika 1.

njihanje tijela bilo kojeg oblika obješenog izvan težišta (Sl. 2),



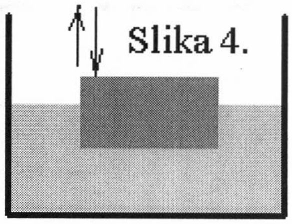
Slika 2.

ili titranje utega obješenog na rastegnutu ili stisnutu oprugu (Sl. 3).



Slika 3.

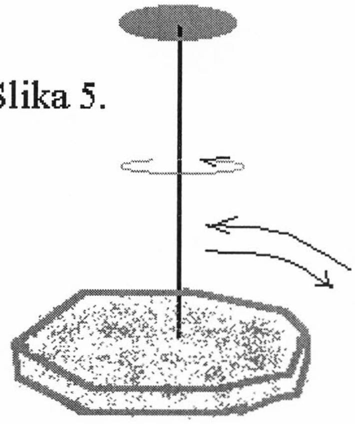
Tijelo koje pliva na površini fluida titra ako ga gurnemo dublje, ili ga dijelom izvučemo iz fluida na kojemu pliva (Sl. 4).



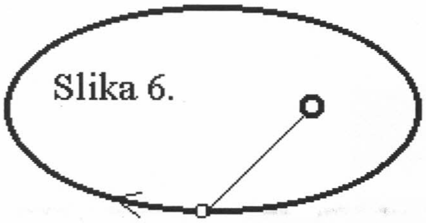
Slika 4.

U svim ovim primjerima uzrok titranja usko je povezan s gravitacijskom silom, a pravac titranja ima komponentu u smjeru vertikale. Neka tijela titraju i bez utjecaja gravitacije, u horizontalnoj ravnini, primjerice tijelo pričvršćeno na horizontalno položenu oprugu ili plosnati predmet obješen na usukanu (tordiranu) nit (Sl. 5).

Slika 5.

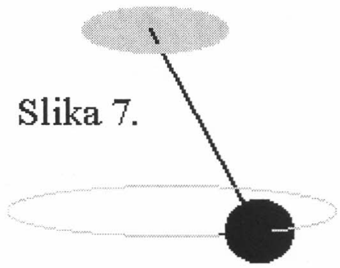


U širem smislu, titranjem možemo nazvati i svako periodičko gibanje po zatvorenoj stazi, primjerice gibanje čestice po kružnici. Pri tome se ne samo položaj čestice, nego i njezina brzina i akceleracija periodički ponavljaju u određenim vremenskim razmacima. Takvo periodičko gibanje izvode planeti gibajući se po elipsama oko Sunca (Sl. 6).



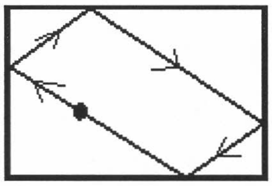
Slika 6.

Slično se ponaša i sferno njihalo, kuglica obješena na napetu nit, a kojoj gibanje nismo strogo ograničili na vertikalnu ravninu (Sl. 7).



Slika 7.

Periodičko gibanje čestice u ravnini ne mora nužno pretpostavljati zakrivljenu stazu, već staza može biti i poligon. Takav je slučaj kad se čestica nađe u omeđenoj dvodimenzionalnoj udubini, tzv. biljaru, i giba se jednoliko, sve dok ne udari u tvrdu stijenku, te se od nje odbije istom brzinom s kojom je došla (Sl. 8).

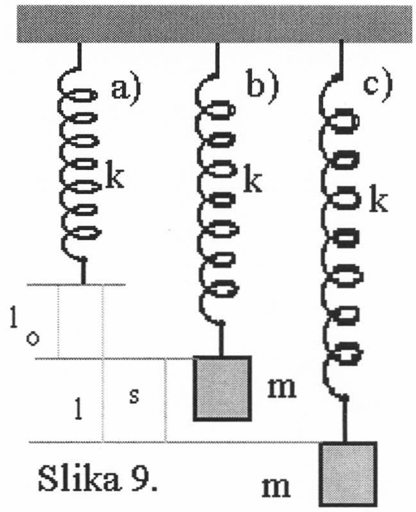


Slika 8.

Pri tome je kut upada, gledano prema okomici, jednak kutu odbijanja. Ako se kuglica nakon nekoliko odboja opet nađe na prvotnoj stazi, njezino je gibanje periodično.

Harmoničko titranje

Harmoničko je titranje jedan posebno pravilan način titrajnog gibanja. Česticu koja harmonički titra nazivamo harmonički oscilator. Kao primjer, zamislimo uteg mase *m* obješen na stisnutu ili rastegnutu oprugu konstante *k*. Gibanju harmoničkog oscilatora uzrok je elastična (harmonička) sila. Ona uteg nastoji vratiti u položaj ravnoteže, a opruzi vratiti ravnotežni oblik. Elastična sila je povratna sila, uvijek usmjerena suprotno od smjera pomaka čestice iz ravnotežnog položaja.

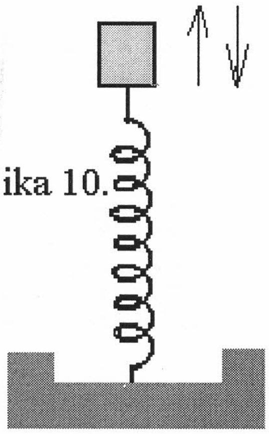


Slika 9.

Na Sl. 9 a prikazana je opruga bez utega. Ona nije ni stisnuta ni rastegnuta, i to je njezin ravnotežni oblik kad nema utega. Objesimo li uteg, opruga će se rastegnuti za određenu duljinu l_0, to veću što je masa utega veća (Sl. 9b). Naime, elastična sila želi oprugu vratiti u prvotni oblik i na prvotnu duljinu, ali joj se suprotstavlja težina utega. Ako uteg miruje, on je u ravnoteži, što znači da su se elastična sila $F_{el} = kl_0$ i težina utega $G = mg$ uzajamno poništile. Stisnemo li sada ili rastegnemo oprugu, tako da položaj utega l bude veći ili manji od l_0, uteg je od položaja ravnoteže udaljen za $s=l-l_0$ (Sl. 9c), a elastičnu silu koja se pri tome javlja možemo pisati kao

$$F_{el} = -k(l - l_0) = -ks\,. \qquad (1)$$

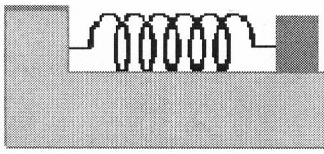
Negativan predznak iskazuje da je sila povratna. Ako je uteg ispod položaja ravnoteže, sila ima smjer prema gore, a ako je iznad položaja ravnoteže, sila ima smjer prema dolje. Napomenimo da uteg ne mora visjeti na opruzi, već može biti i učvršćen na gornjem kraju vertikalno postavljene opruge (Sl. 10).



Slika 10.

Ta su dva načina najčešće zastupljena u pokusima koje s oprugom radimo u školskom laboratoriju.

No moguće je zamisliti i oprugu položenu vodoravno (Sl. 11).



Slika 11.

U tom slučaju ne moramo voditi računa o težini utega, jer je ona uravnotežena reakcijom podloge, a gibanje se zbiva u vodoravnoj ravnini. I sad djeluje elastična sila (1), uvijek usmjerena suprotno od produljenja opruge. No ovako zamišljen pokus u laboratoriju će biti mnogo teže izvesti: tu se naime gotovo uvijek javlja sila trenja koja se suprotstavlja gibanju utega. Dakle i u slučaju horizontalno položene opruge možemo govoriti o harmoničkom titranju, ali samo ako se trenje između utega i podloge može smatrati zanemarivim.

Vratimo se gibanju utega obješenog na oprugu. Ako smo stisnuli oprugu tako da je uteg iznad ravnotežnog položaja, i zatim pustili uteg da se giba, on će se iz mirovanja početi ubrzavati, a najveću će brzinu postići upravo kad dosegne položaj ravnoteže. No baš zbog te velike brzine doći će do izražaja inercija, stoga se uteg neće zaustaviti,već će nastaviti svoje gibanje. Pri tome će se zbog povratne sile postepeno usporavati, sve dok se opet ne zaustavi. Povratna sila izazvat će gibanje u suprotnom smjeru, i uteg će se vratiti u položaj iz kojega je krenuo. Nakon toga cijelo će se gibanje ponavljati na potpuno isti način. Kažemo da je gibanje periodično. Treba naglasiti da postoje razni načini periodičnog gibanja, ovisno o vrsti povratne sile koja djeluje na tijelo. Svako se takvo gibanje može protumačiti uz pomoć drugog Newtonovog zakona (jednadžbe gibanja), ili polazeći od zakona očuvanja energije i količine gibanja.

Harmoničko je titranje samo jedno, najpravilnije, od mnogih vrsta titrajnih gibanja. Prije nego što se upustimo u rješavanje jednadžbi gibanja, pokušajmo povezati harmoničko titranje s jednom vrstom gibanja koju smo već ranije upoznali: s jednolikim gibanjem po kružnici. Može se , naime, pokazati da je harmoničko titranje projekcija jednolikog gibanja po kružnici.

Harmoničko titranje kao projekcija jednolikog gibanja po kružnici

Zamislite da se čestica mase m giba jednoliko kutnom brzinom $\omega = \varphi/t$ u vertikalnoj ravnini po kružnici polumjera A, a obasjava je horizontalni snop svjetlosti (Sl. 12). Na okomito položenom zastoru projekcija čestice (njezina sjena) titra gore – dolje. Tu ćemo projekciju odsad zvati *oscilator*, za razliku od *čestice* koja se vrti po kružnici. Iz trokuta na Sl. 12 vidljivo je da je udaljenost oscilatora od ishodišta

$$s = A\sin\omega t\,. \qquad (2)$$

Brzina gibanja čestice po kružnici je

$$\mathrm{v}_{\check{c}} = A\omega \qquad (3)$$

a njezina projekcija (brzina oscilatora) je

$$\mathrm{v} = A\omega\cos\omega t\,. \qquad (4)$$

Akceleracija oscilatora projekcija je centripetalne akceleracije čestice

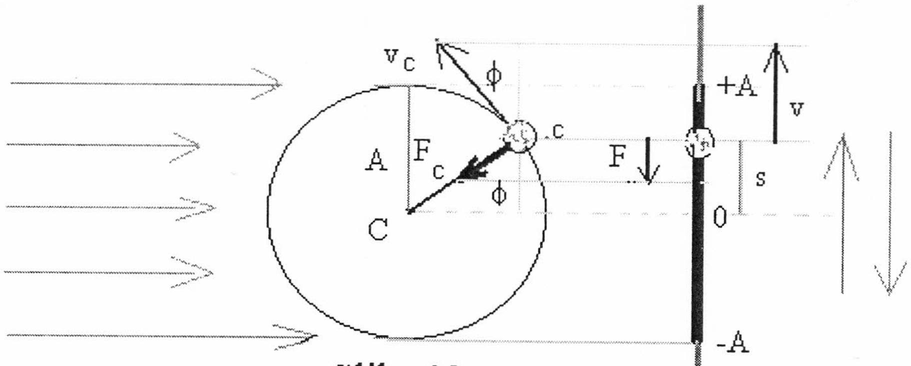
$$a_{\check{c}} = \frac{\mathrm{v}^2}{A} \qquad (5)$$

koja česticu drži u gibanju po kružnici. (Pomnoženo masom, to nam daje centripetalnu silu koja djeluje na česticu

$$F_{\check{c}} = m\frac{\mathrm{v}^2}{A}\ ) \qquad (6)$$

Budući da su centripetalna akceleracija i centripetalna sila usmjerene prema središtu C, njihove su projekcije usmjerene prema ishodištu 0. Stoga je akceleracija oscilatora

$$a = -\frac{\mathrm{v}^2}{A}\sin\omega t\,, \qquad (7)$$



Slika 12.

a sila koja djeluje na oscilator

$$F = -m\frac{\mathrm{v}^2}{A}\sin\omega t\,. \qquad (8)$$

Usporedba s izrazom (2) pokazuje da je sila

$$F = -m\omega^2 s\,. \qquad (9)$$

Sila koja djeluje na oscilator (projekciju čestice) razmjerna je udaljenosti s oscilatora od točke 0, a ima negativan predznak. Riječ je dakle o povratnoj sili, i to o najpravilnijem obliku povratne sile – elastičnoj ili harmoničkoj sili. Ona ima oblik (pri čemu je s elongacija):

$$F = -ks\,. \qquad (10)$$

Zaključujemo da se oscilator harmonički giba po dijelu pravca između $s = -A$ i $s = A$ pod djelovanjem harmoničke sile (10), pri čemu je

$$k = m\omega^2 \qquad (11)$$

ili

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,. \qquad (12)$$

Period T titranja oscilatora jednak je periodu T kružnog gibanja čestice, za koji otprije znamo da je

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \qquad (13)$$

Kad je riječ o titranju, veličinu ω nazivamo kružnom frekvencijom. Oscilator dakle titra s periodom

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (14)$$

i frekvencijom

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (15)$$

Jednadžbe (2), (4) i (7) kazuju kako se osnovne kinematičke veličine, položaj s, brzina v i akceleracija a, pri titranju mijenjaju s vremenom. Položaj s čestice, tj. njezinu udaljenost od ravnotežnog položaja, u bilo kojem trenutku zovemo elongacijom, a najveća moguća udaljenost A je amplituda titranja.

Na Sl. 13 a, b i c prikazano je (punom crtom) kako položaj s, brzina v i akceleracija a ovise o vremenu. Vidimo da su to krivulje tipa sinusoide, koje sve imaju jednak period T. Najveća moguća elongacija, kako smo već naglasili, je A. Najveća moguća brzina ima iznos $v_{max} = A\omega$, a iznos najveće moguće akceleracije je $a_{max} = A\omega^2$. Usporedbom Sl. 13 a i 13 b uočavamo da je brzina najveća u trenutku kad čestica prolazi kroz položaj ravnoteže. Kad je u najudaljenijim točkama A i $-A$, čestica mijenja smjer gibanja, te joj je u tim položajima brzina jednaka nuli. To su tzv. *zaokretne točke*. U našem smo primjeru smatrali da je u trenutku $t=0$ čestica u ravnotežnom položaju $s=0$. To ne mora nužno biti tako, već se ona može nalaziti na nekom drugom mjestu između krajnjih točaka. Tada se vremensko ponašanje čestice može opisati izrazom

$$s = A\sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (16)$$

U trenutku $t=0$ čestica se nalazi u položaju $s_0 = A\sin\varphi_0$, a φ_0 nazivamo početnom fazom. Položaj, brzina i akceleracija oscilatora s početnom fazom φ_0 različitom od nule u ovisnosti o vremenu prikazani su crtkanom linijom na Sl. 13 a, b i c.

Jednadžba gibanja harmoničkog oscilatora

Česticu koja harmonički titra pod djelovanjem harmoničke sile nazivamo harmoničkim oscilatorom. Poznajemo li silu, drugi Newtonov zakon omogućuje nam da doznamo ponašanje čestice u bilo kojem trenutku: njezinu akceleraciju, brzinu i položaj. Kao primjer uzimamo uteg mase m ovješen na oprugu konstante k (Sl. 3). Smatramo da je riječ o materijalnoj točki.

Najprije moramo napisati drugi Newtonov zakon

$$ma = F \qquad (16)$$

uvrstivši harmoničku silu (10). Drugi Newtonov zakon tada glasi

$$ma = -ks \qquad (17)$$

ili

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -ks. \qquad (18)$$

Podijelimo li taj izraz s m i sve članove prebacimo na lijevu stranu, dobivamo

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{k}{m}s=0. \qquad (19)$$

Ovo je diferencijalna jednadžba. Njezino rješenje je funkcija *s(t)*, koja nam daje vremensku promjenu položaja čestice. Ovdje nećemo potanko ulaziti u metode rješavanja takvih diferencijalnih jednadžbi. Umjesto toga, pretpostavit ćemo da je rješenje moguće napisati u obliku

$$s=A\sin(\omega t+\varphi_0). \qquad (20)$$

Taj smo oblik naslutili promatrajući titranje kao projekciju kružnog gibanja. Sad ćemo provjeriti zadovoljava li funkcija (20) jednadžbu (19) i raspraviti o značenju konstanata A, ω i φ_0.

Najprije ćemo izračunati prvu derivaciju

$$\frac{ds}{dt}=A\omega\cos(\omega t+\varphi_0), \qquad (21)$$

a zatim drugu derivaciju

$$\frac{d^2s}{dt^2}=-A\omega^2\sin(\omega t+\varphi_0). \qquad (22)$$

Uvrstimo li to u jednadžbu (19), dobivamo

$$-A\omega^2\sin(\omega t+\varphi_0)+\frac{k}{m}A\sin(\omega t+\varphi_0)=0 \qquad (23)$$

Izlučit ćemo zajedničke faktore, pa dobivamo

$$A\left(-\omega^2+\frac{k}{m}\right)\sin(\omega t+\varphi_0)=0. \qquad (24)$$

Ova jednadžba mora biti zadovoljena u svakom trenutku. Kako funkcija sinus mijenja vrijednost i ne može uvijek biti jednaka nuli, to znači da je jednadžba ispunjena samo ako je prva zagrada jednaka nuli:

$$-\omega^2+\frac{k}{m}=0. \qquad (25)$$

Iz tog uvjeta dobivamo vezu kružne frekvencije titranja ω s masom čestice m i konstantom opruge k. Period titranja T, frekvencija ν i kružna frekvencija ω povezani su izrazima

$$\omega=2\pi\nu=\frac{2\pi}{T}, \qquad (26)$$

odakle dobivamo period

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (27)$$

i frekvenciju titranja

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad (28)$$

Egzaktno rješavanje drugog Newtonovog zakona dovelo nas je do izraza koji smo naslutili promatrajući titranje kao projekciju kružnog gibanja. Funkcija (20) prikazuje vremensko ponašanje čestice, tj. promjenu njezinog položaja (elongacije) s u vremenu. Pri tome konstanta A ima značenje amplitude, tj. najveće udaljenosti čestice od položaja ravnoteže, konstanta ω je kružna frekvencija, a konstanta φ_0 je faza titranja u početnom trenutku. Grafički prikaz te funkcije je upravo onaj prikazan na Sl.13 a.

Obrnutim postupkom, poznajemo li položaj u ovisnosti o vremenu, možemo naći i brzinu kao prvu derivaciju

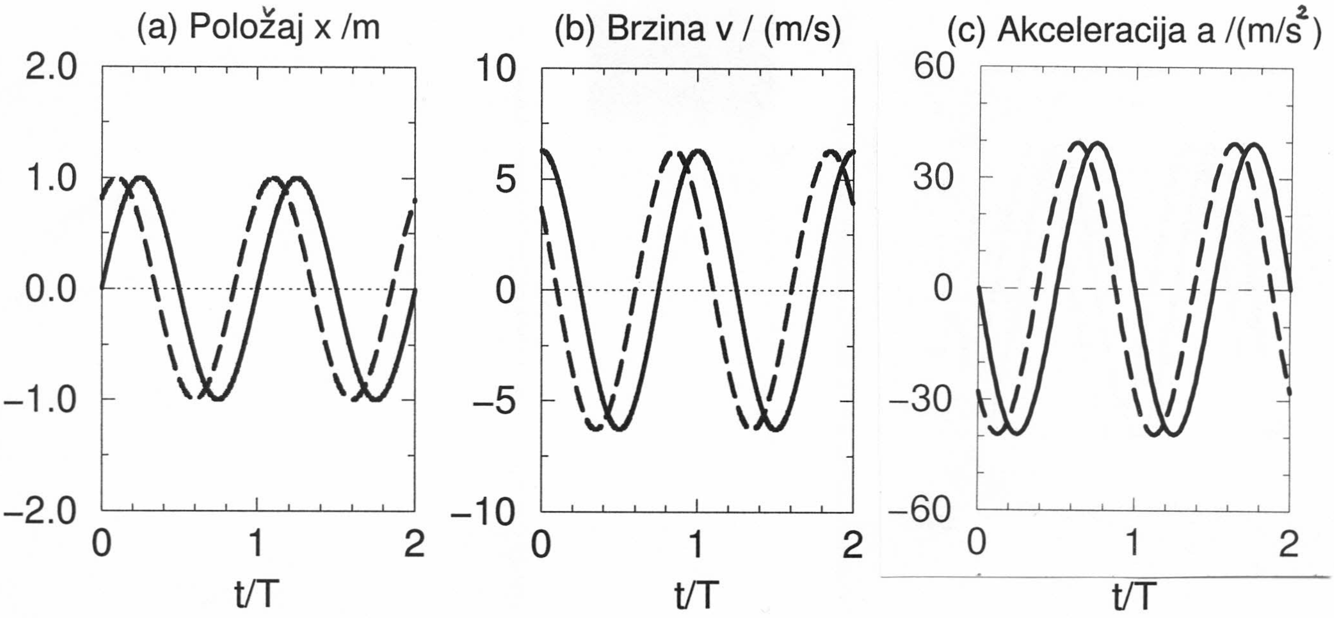
$$v=A\omega\cos(\omega t+\varphi_0) \qquad (29)$$

i akceleraciju kao drugu derivaciju položaja

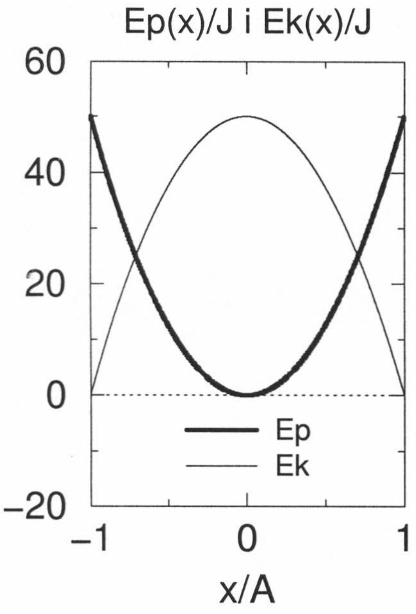
$$a=-A\omega^2\sin(\omega t+\varphi_0). \qquad (30)$$

I te funkcije vidimo na Sl. 13.b) i c).

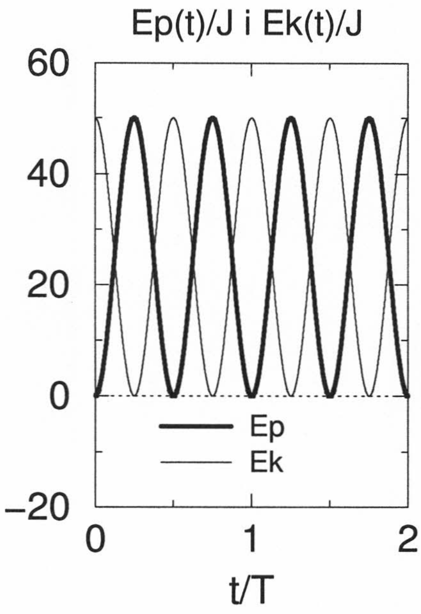
Slika 13.



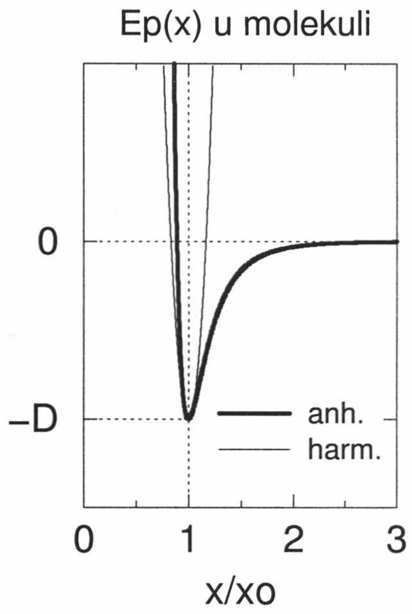
Slika 14.



Slika 15.



Slika 17.



Energija harmoničkog titranja

Harmonička sila jest konzervativna sila. Konzervativne sile su one sile za koje rad ne ovisi o putu, već samo o početnom i konačnom položaju. Za takve je sile moguće definirati potencijalnu energiju E_p i izračunati, za gibanje duž osi x, njezinu ovisnost o položaju x polazeći od izraza

$$F(x) = -\frac{dE_p(x)}{dx}. \qquad (31)$$

Treba izračunati integral

$$E_p(x) = -\int_{x_R}^{x} F(\xi)d\xi + E_p(x_R), \qquad (32)$$

pri čemu je x_R referentna točka. Sjetimo se da smo referentnom točkom nazvali točku u kojoj znamo vrijednost potencijalne energije. U promatranom slučaju pretpostavili smo da je to ujedno i točka u kojoj je potencijalna energija jednaka nuli. Treba voditi računa o tome da se referentna točka i vrijednost potencijalne energije u referentnoj točki svaki puta moraju iznova definirati.

Uz pretpostavku da je u našem slučaju referentna točka ishodište $x_R = 0$ i da je to ujedno ravnotežna točka, te da je u njoj potencijalna energija jednaka nuli $E_P(x_R) = 0$, elongacija je $s = x$, a za potencijalnu energiju harmoničkog oscilatora dobivamo

$$E_p(x) = -\int_0^x (-k\xi)d\xi + 0, \qquad (33)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2. \qquad (34)$$

Ukupna je energija harmoničkog oscilatora zbroj kinetičke i potencijalne energije

$$E = E_k + E_p \qquad (35)$$

$$E = \frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 + \frac{1}{2}kx^2. \qquad (36)$$

Uvrstimo li u (36) prije nađene izraze za položaj x i brzinu v, dobivamo

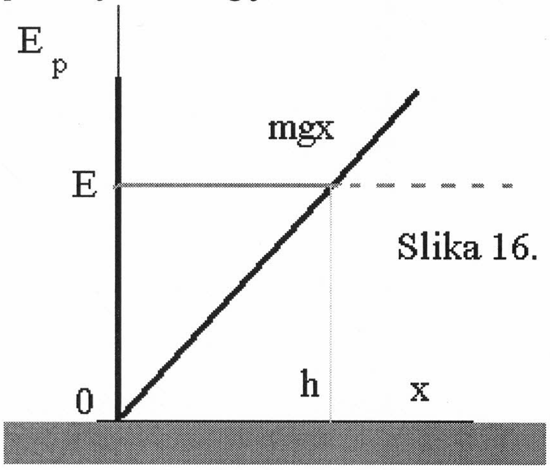
$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\cos^2(\omega t + \varphi_0) + \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) \qquad (37)$$

ili

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 = \frac{1}{2}kA^2. \qquad (38)$$

Ukupna je energija (38) konstantna, što smo i očekivali za konzervativnu silu. Ona linearno ovisi o konstanti opruge k, a razmjerna je i s kvadratom amplitude A. To je ujedno i najveća moguća potencijalna energija koju može poprimiti oscilator, naime potencijalna energija u najudaljenijem položaju, kad je brzina jednaka nuli. To se zbiva u zaokretnim točkama, gdje se čestica zaustavlja, a brzina mijenja smjer. Za vrijeme titranja, kako se čestica udaljava od ravnotežnog položaja, njezina potencijalna energija raste, a kinetička se smanjuje. Kad je potencijalna energija najveća, kinetička je jednaka nuli, a nakon toga ponovno se kinetička energija povećava, a potencijalna smanjuje. Kinetička je energija najveća kad čestica prolazi kroz položaj ravnoteže, a tada je potencijalna jednaka nuli. To je ujedno položaj ravnoteže u kojem ne djeluje sila. Čestica se ipak ne zaustavlja, jer ima inerciju, te se nastavlja gibati na suprotnu stranu. Na Sl. 14. prikazane su potencijalna i kinetička energija čestice koja harmonički titra u ovisnosti o položaju, a na Sl. 15. prikazana je njihova ovisnost o vremenu.

U stvarnosti su mnoga gibanja samo približno harmonička. Javljaju se sile koje odstupaju od linearnog izraza $F = -kx$, i potencijalne energije koje se, prikažemo li ih grafički, više ili manje razlikuju od parabole na Sl. 14. Valja naglasiti da će do periodičkog titrajnog gibanja doći uvijek kad potencijalna energija ima minimum.



Slika 16.

Na Sl. 16. prikazana je potencijalna energija loptice koja se elastično odbija od tvrde podloge. Grafički prikaz je udolina sastavljena od dva pravca, vertikalnog na x=0, uzrokovanog tvrdom podlogom, i nagnutog, koji je zapravo gravitacijska potencijalna energija $E_p = mgx$. Zanemarimo li gubitke energije, loptica bačena na pod odbijat će se od tvrde podloge i zbog gravitacije svaki puta ponovno pasti na tlo. To se gibanje između točaka $x=0$ i $x=h$ periodički ponavlja.

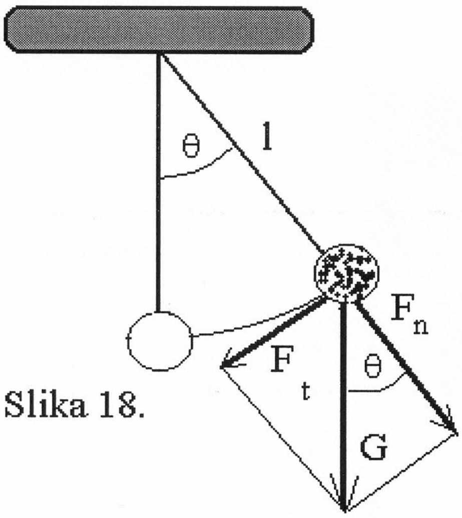
U drugom primjeru, dva atoma u dvoatomnoj molekuli međusobno se približavaju i udaljavaju, titrajući oko ravnotežne udaljenosti $x = x_0$ pod djelovanjem sile koja se razlikuje od harmoničke, pa je zovemo *anharmoničkom* silom. Potencijalna energija takve sile u ovisnosti o udaljenosti x među atomima prikazana je na Sl. 17. Za energije koje se malo razlikuju od najniže moguće, krivulja potencijalne energije približno se može poistovjetiti s parabolom, te će titranje s malim amplitudama biti približno harmoničko. Ovdje je parabola, kojom približno opisujemo titranje molekule s malim amplitudama, dana jednadžbom

$$E_p = -D + \frac{1}{2}k(x - x_0)^2 . \qquad (39)$$

Za veće amplitude titranje je anharmoničko. Dovede li se takvom titrajnom sustavu, sastavljenom od dva atoma, dovoljna količina energije D (energija disocijacije) molekula će se raspasti na dva nepovezana atoma. Mogli bismo navesti i mnogo drugih primjera harmoničkih i anharmoničkih gibanja u prirodi, od atoma do svemira, a sve nam to ukazuje na važnost i univerzalnost titrajnih pojava u svijetu oko nas.

Matematičko njihalo

Njihala su titrajni sustavi koje često susrećemo u svakidašnjem životu. Njihalo ćemo jednostavno načiniti ako na kraj duge i tanke nerastezljive niti objesimo kuglicu ili neki drugi sitan predmet. Time smo se dosta dobro približili onome što se zove jednostavno ili *matematičko njihalo*. Matematičko je njihalo idealan sustav: na kraju savršeno tanke nerastezljive niti duljine l nalazi se materijalna točka mase m, koju u mislima možemo zamijeniti sasvim malom kuglicom iste mase.
Kad kuglicu pomaknemo iz ravnotežnog položaja i pri tome držimo nit napetom (Sl. 18.), kuglica zbog svoje težine i novog položaja ima potencijalnu energiju. Pustimo li je, ona će njihati oko ravnotežnog



Slika 18.

položaja, otklanjajući se na jednu i na drugu stranu za neki maksimalni kut otklona ϑ_0. Je li takvo titranje harmoničko?

Da bismo odgovorili na to pitanje, postavimo jednadžbu gibanja. Prije svega, moramo uočiti da staza kojom se kuglica giba sad više nije pravac kao kod titranja mase na opruzi, već dio kružnice. Zbog napete niti duljine *l,* kuglica je prisiljena gibati se po kružnici polumjera *l*. Za takvo gibanje upotrijebit ćemo drukčiji oblik drugog Newtonovog zakona, onaj koji smo naučili prilikom uvođenja u zakone vrtnje krutog tijela oko čvrste osi. Taj zakon glasi

$$M = I\alpha . \qquad (40)$$

gdje je α kutna akceleracija, M moment sile, a I moment tromosti. Za materijalnu točku on je

$$I = ml^2 . \qquad (41)$$

Kutna je akcerelacija druga derivacija kuta po vremenu, a moment sile koji uzrokuje titranje potječe od gravitacijske sile. Na Sl. 18. vidimo da se težina kuglice $\vec{G}$ može rastaviti na dvije komponente: $\vec{F}_t$, usmjerenu tangencijalno na kružnicu prema položaju ravnoteže, i drugu $\vec{F}_n$, u smjeru niti. Ova druga sila bit će uravnotežena napetošću niti $\vec{N}$, te neće utjecati na gibanje. Preostaje tangencijalna sila iznosa

$$F_t = mg\sin\vartheta \qquad (42)$$

koja stvara moment sile

$$M = -mgl\sin\vartheta . \qquad (43)$$

Zato jednadžbu gibanja možemo napisati kao

$$-lmg\sin\vartheta = ml^2\frac{d^2\vartheta}{dt^2} . \qquad (44)$$

Nakon dijeljenja s ml^2 i prebacivanja svih članova na lijevu stranu, dobivamo diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\vartheta = 0 . \qquad (45)$$

Riješimo li ovu jednadžbu, doznat ćemo kakvo je ponašanje kuta ϑ u ovisnosti o vremenu. Pogledajmo jednadžbu i prisjetimo se one koja se pojavila kod titranja mase na opruzi. Hoće li i ovo titranje biti harmoničko? Uočimo razlike i sličnosti između jednadžbi (45) i (19). Umjesto elongacije *s*, u prvom članu za njihalo se pojavljuje kut otklona ϑ. Umjesto faktora $\frac{k}{m}$, sad imamo $\frac{g}{l}$. U tim je dijelovima jednadžbi lako postaviti analogiju. Najveća je razlika u tome što se sad u drugom članu umjesto ϑ pojavljuje $\sin\vartheta$. Kad bismo smjeli $\sin\vartheta$ zamijeniti sa ϑ i smatrati da je

$$\sin\vartheta \cong \vartheta , \qquad (46)$$

dobili bismo jednadžbu harmoničkog titranja za kut otklona. Pokazuje se da za male kutove to zaista smijemo učiniti. Napiše li se kut u radijanima, vrijednosti kuta i njegovog sinusa gotovo se podudaraju za kutove $\vartheta \leq 6^0$. Jednadžba dakle glasi

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l}\vartheta = 0 \qquad (47)$$

a njezino rješenje možemo pisati kao

$$\vartheta = \vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (48)$$

pri čemu smo po analogiji s rješenjem jednadžbe za titranje opruge zaključili da vrijedi

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \qquad (49)$$

i da je kružna frekvencija

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \qquad (50)$$

Period je titranja

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \qquad (51)$$

a frekvencija

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}. \qquad (52)$$

Za male otklone, kod kojih kutna amplituda ne premašuje 6^0, period titranja ne ovisi o masi. To je osobina titrajnih sustava kod kojih je uzrok titranju gravitacija.

(Ako su otkloni mali, dio kružnice po kojem se giba kuglica može se smatrati približno dijelom pravca, a elongacija je

$$s = l\sin\vartheta \cong l\vartheta \qquad (53)$$

$$s \cong A\sin(\omega t + \varphi_0), \qquad (54$$

pri čemu je amplituda

$$A = l\vartheta_0. \qquad (55)$$

Izjednačimo li dobiveni izraz za ω s onim koji poznajemo iz jednadžbe harmoničkog titranja

$$\omega^2 = \frac{g}{l} = \frac{k}{m}, \qquad (56)$$

vidimo da je za matematičko njihalo konstanta povratne sile

$$k = \frac{mg}{l}.) \qquad (57)$$

Ne smijemo zaboraviti da njihalo titra harmonički samo za male kutove otklona. Ako su kutovi otklona veći, tada je jednadžbu (45) mnogo teže riješiti. Period titranja u tom se slučaju ne može napisati jednostavnim kratkim izrazom, već je dan u obliku reda, u kojem su članovi parne potencije izraza $\sin\frac{\vartheta_0}{2}$. Taj red glasi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \times$$

$$\times\left[1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\vartheta_0}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\vartheta_0}{2} + \cdots\right] \qquad (58)$$

Slijede daljnji članovi, a ako kut nije prevelik, možemo se zaustaviti na nekom od prvih članova u redu. Posebno, za granične kutove za koje titranje prestaje biti harmoničko, tj. $\vartheta \cong 6^0$, možemo se zadržati na drugom članu u uglatoj zagradi i $\sin\frac{\vartheta_0}{2}$ zamijeniti s $\frac{\vartheta_0}{2}$, te dobivamo

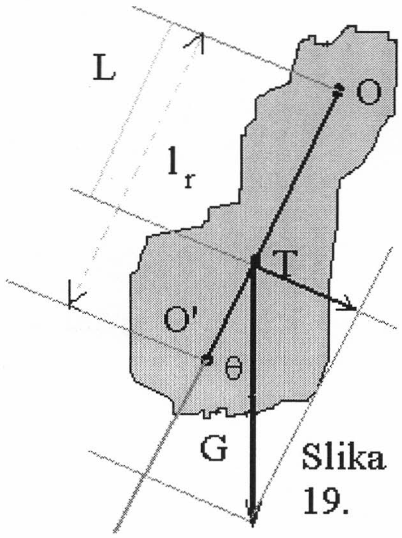
$$T \cong 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left[1 + \frac{1}{16}\vartheta_0^2\right] \qquad (59)$$

Kut je ovdje dan u radijanima, a period, za razliku od ranije opisanih harmoničkih titranja, ovisi o amplitudi.

Fizičko njihalo

Svako kruto tijelo može biti njihalo, ako ga objesimo oko čvrste osi koja ne prolazi njegovim težištem, i tada ga nazivamo *fizičkim njihalom*. Prepustimo li takvo njihalo samom sebi, ono će mirovati, jer se težina uravnotežila sa molekulskim silama koje čine tijelo krutim.

U ravnotežnom položaju moment sile koji uzrokuje težina jednak je nuli. Pomaknemo li njihalo iz položaja ravnoteže (Sl. 19.),



Slika 19.

tad će samo dio težine biti uravnotežen. Spojnica između objesišta O i težišta T , koja ima duljinu L, sad zatvara s težinom $\vec{G}$ kut ϑ, a rezultantni moment sile je različit od nule i iznosi

$$M = -Lmg\sin\vartheta \qquad (60)$$

Za kruto tijelo jednadžba gibanja ima isti oblik kao i u slučaju matematičkog njihala

$$M = I\,\alpha\,. \qquad (61)$$

gdje je kutna akceleracija

$$\alpha = \frac{d^2\vartheta}{dt^2} \qquad (62)$$

Stoga sad jednadžbu gibanja možemo pisati kao

$$I\,\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -Lmg\sin\vartheta\,. \qquad (63)$$

Urednije prepisano, to je

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{Lmg}{I}\sin\vartheta = 0 \qquad (64)$$

Ponovno smo se suočili s jednadžbom u kojoj se pojavljuje $\sin\vartheta$, i za koju znamo da nema jednostavno rješenje. No ako i sada pretpostavimo da su otkloni mali, te da je $\sin\vartheta \cong \vartheta$, jednadžbu možemo napisati kao

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{Lmg}{I}\vartheta = 0\,. \qquad (65)$$

To je jednadžba harmoničkog titranja s kružnom frekvencijom

$$\omega = \sqrt{\frac{Lmg}{I}}\,, \qquad (66)$$

a kut ϑ ovisi o vremenu po formuli

$$\vartheta = \vartheta_0\sin(\omega t + \varphi_0)\,. \qquad (67)$$

Zanimljivo je uočiti da se kružna frekvencija i sad može napisati u obliku sličnom onom koji smo imali kod matematičkog njihala:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l_r}}\,. \qquad (68)$$

Uveli smo novu duljinu

$$l_r = \frac{I}{mL} \qquad (69)$$

i nazvali je *reduciranom duljinom njihala*. To je ona duljina koju bi moralo imati matematičko njihalo da bi titralo s istim periodom kao fizičko njihalo koje upravo opisujemo. Period i frekvenciju titranja fizičkog njihala možemo dakle opisati izrazima

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Lmg}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_r}{g}}$$

(70)

i

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Lmg}{I}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l_r}} \qquad (71)$$

Svaki kruti predmet može biti fizičko njihalo: štap, valjak ili tijelo nekog drugog pravilnog oblika obješeno izvan svog težišta, ali i neko sasvim nepravilno tijelo: stolac, stol, ili višetonski sanduk ovješen na brodskoj dizalici. Izraz (70) kaže nam da u ovim slučajevima period titranja ovisi o masi, zapravo o prostornom rasporedu mase koji je opisan momentom tromosti *I*. Čak i mala kuglica ovješena o beskonačno tanku nerastezljivu nit predstavlja fizičko njihalo, a jedino u graničnom slučaju kad je njezin promjer tako malen da je možemo smatrati materijalnom točkom, postaje matematičkim njihalom, te se izraz (70) svodi na (51).

U izrazu (69) uveli smo *reduciranu duljinu* l_r fizičkog njihala. Ta duljina prikazana je na Sl. 19, i na osi koja spaja težište T i objesište O određuje mjesto koje smo označili s O'. Ova točka zove *se centar titranja* i ima važno fizikalno značenje. Naime, ako na osi koja spaja težište i objesište odredimo bilo koju točku i kroz nju probodemo novu os, opet ćemo dobiti fizičko njihalo. Za razne točke na osi periodi titranja razlikovat će se. Jedino za točku O', period će biti identičan onom koji je njihalo imalo kad se njihalo oko osi O. Za svaki mogući period titranja postoje takve dvije točke O i O' na osi, oko kojih su periodi njihanja jednaki.

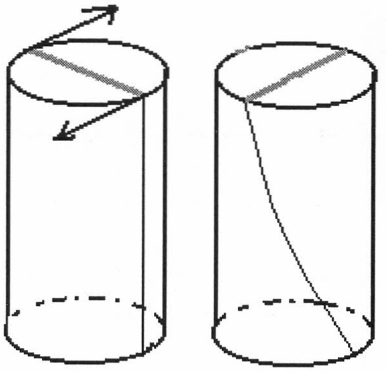
Vidjeli smo da u svim izrazima koji opisuju fizičko njihalo važnu ulogu ima moment tromosti *I* tijela. Kad je riječ o pravilnim tijelima, momente tromosti često znamo izračunati. Kako os ne smije prolaziti kroz težište, jer bi tada tijelo u svakom položaju bilo u indiferentnoj ravnoteži, moment tromosti računamo služeći se Steinerovim poučkom. Pomoću poznatog momenta tromosti i mase tijela, te mjerenjem udaljenosti između težišta i objesišta, možemo i bez pokusa utvrditi kojim će periodom njihati takvo tijelo. Drukčije je kod nepravilnih tijela kojima moment tromosti ne znamo izračunati. Kod njih ćemo se poslužiti pokusom u kojem ćemo mjeriti period ili frekvenciju njihanja, da bismo mogli izračunati moment tromosti. Time smo dobili eksperimentalnu metodu za mjerenje momenta tromosti tijela oko osi koja ne prolazi kroz težište.

Torzijsko njihalo

Torzijsko je njihalo primjer titranja koja nisu uzrokovana gravitacijom. Torzija je deformacija koja nastaje kad na valjkasti predmet tangencijalno na kružnicu presjeka djelujemo parom sila (Sl. 20.).

Povratna sila ovdje je molekulska sila koja usukanu (tordiranu) nit od elastičnog materijala nastoji vratiti u početni oblik. Torzijsko se njihalo sastoji od duge valjkaste niti, na koju

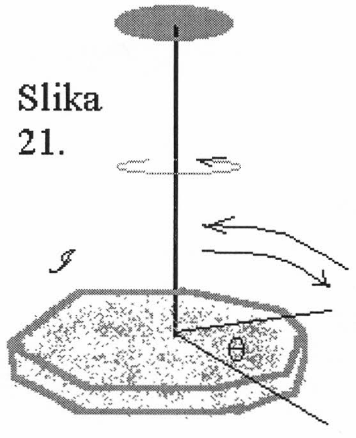
Slika 20.



je u težištu učvršćen plosnati predmet mase m i momenta tromosti I (Sl. 21). Ovisno o jačini vanjskog para sila, nit se može tordirati za bilo koji po volji veliki kut ϑ, no čim sila prestane djelovati, elastična sila stvara moment sile

$$M = -D\vartheta \qquad (72)$$

koji vraća nit u početni oblik.



Slika 21.

Zbog inercije nit se nastavlja uvijati na suprotnu stranu, i ako nema nikakvog trenja, dolazi do harmoničkog titranja. Veličina D je koeficijent torzije i karakteristična je za pojedinu nit. Jednadžba gibanja

$$M = \mathrm{I}\,\alpha \qquad (73)$$

sad izgleda

$$\mathrm{I}\,\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -D\vartheta \qquad (74)$$

ili

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{D}{\mathrm{I}}\vartheta = 0, \qquad (75)$$

i predstavlja jednadžbu harmoničkog titranja kružne frekvencije

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{\mathrm{I}}}, \qquad (76)$$

perioda

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{I}}{D}} \qquad (77)$$

te frekvencije

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{\mathrm{I}}}. \qquad (78)$$

Vremenska ovisnost kuta otklona jest

$$\vartheta = \vartheta_0 \sin(\omega t + \varphi_0) \qquad (79)$$

Uočimo da je, za razliku od matematičkog i fizičkog njihala, torzijsko njihanje harmoničko bez obzira na kut. Jednadžba (75) naime vrijedi za sve, a ne samo za male kutove.

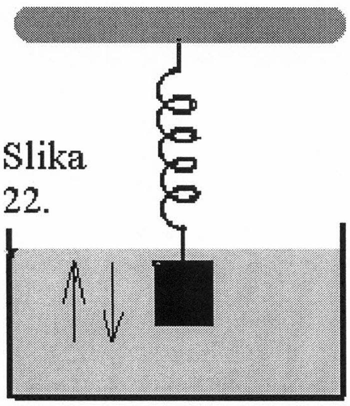
Torzijsko nam njihalo može poslužiti za eksperimentalno određivanje momenta tromosti I nepoznatog plosnatog tijela oko osi koja prolazi kroz njegovo težište. Najprije moramo odrediti koeficijent D torzije niti, a to ćemo učiniti tako da ovjesimo na nit pravilnu ploču poznatog momenta tromosti I_0. Mjereći period titranja T_0, odredimo D, a zatim to isto učinimo s nepoznatim tijelom. Iz izmjerenog titrajnog vremena T i poznatog D

izračunamo, pomoću izraza (77), nepoznati moment tromosti I.

Prigušeno titranje

U dosadašnjim primjerima titranja svaki smo puta zanemarili trenje i otpor zraka. U stvarnosti trenje najčešće nije zanemarivo. Kakav god pripremili pokus s masom koja titra ovješena na oprugu ili njihalima različitih vrsta, opazit ćemo da oscilator titra sa sve manjom i manjom amplitudom, dok na kraju, poslije duljeg ili kraćeg vremena, titranje potpuno ne utrne. Iz poglavlja o energiji sjećamo se da je ukupna energija ovisila o amplitudi. Ako se amplituda titranja smanjuje, znači da se energija gubi u okolinu. Uzrok tome može biti otpor zraka ili drugog sredstva u kojem titra ili se njiše tijelo, trenje na samom objesištu niti njihala, ili to što nit njihala nije sasvim nerastezljiva, pa ona i sama izvodi složene oscilacije na koje se troši energija. Kod mase ovješene na oprugu najvažniji uzrok gubitaka energije (disipacije) jest otpor

Slika 22.



sredstva.

Na Sl. 22 na uteg uronjen u viskoznu tekućinu djeluje sila otpora znatno veća nego na uteg u zraku. Kod malih tijela možemo pretpostaviti da sila otpora ovisi linearno o brzini v, i da naravno ima smjer suprotan smjeru gibanja

$$F_o = -b\mathrm{v}\,, \tag{80}$$

gdje je b neka konstanta karakteristična za oblik i ostala svojstva tijela. Napišemo li drugi Newtonov zakon, sad osim elastične sile moramo uzeti u obzir i silu otpora zraka. Jednadžba gibanja sad glasi

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -ks - b\mathrm{v}\,, \tag{81}$$

pri čemu znamo da je brzina

$$\mathrm{v} = \frac{ds}{dt}\,. \tag{82}$$

Jednadžba gibanja sada glasi

$$m\frac{d^2s}{dt^2} + b\frac{ds}{dt} + ks = 0\,. \tag{83}$$

Prikladno je uvesti nove konstante γ i ω_0, definirane relacijama

$$2\gamma = \frac{b}{m} \tag{84}$$

i

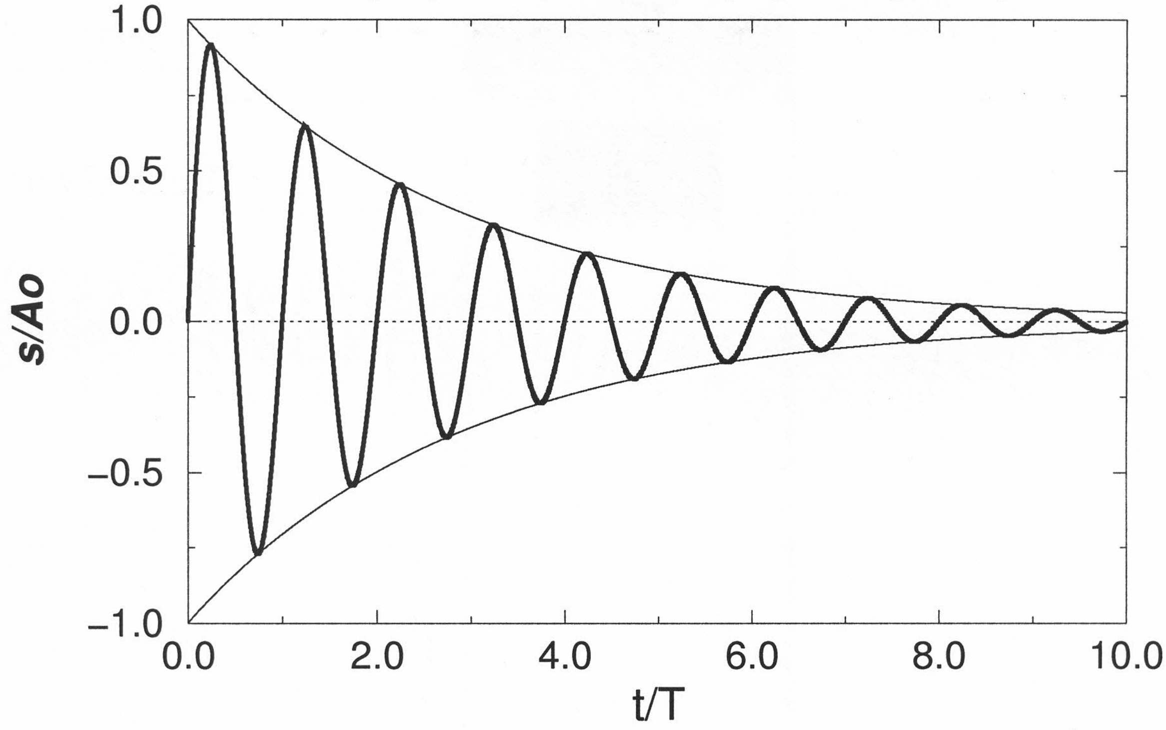
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}\,. \tag{85}$$

Primjećujemo da γ karakterizira jakost sile otpora sredstva, a ω_0 je vlastita kružna frekvencija kojom bi oscilator titrao da nema trenja. Jednadžba gibanja izražena pomoću novih konstanata je

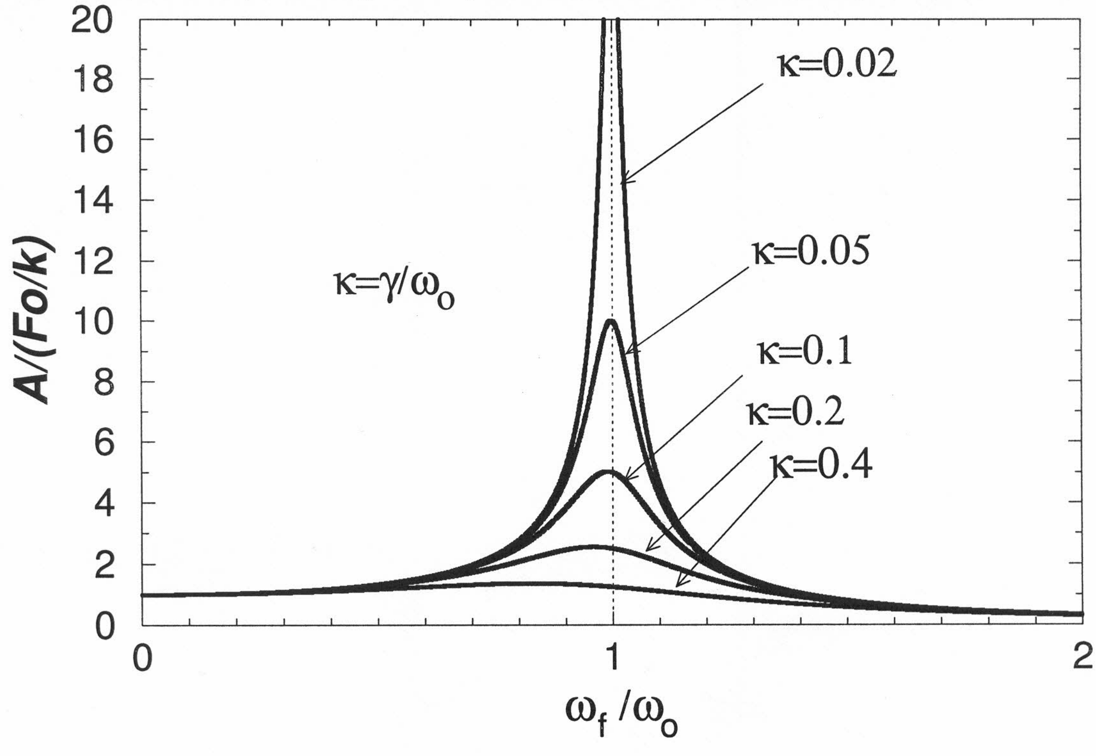
$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\gamma\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0 \tag{86}$$

Njezino je rješenje

Slika 23.
Elongacija i amplituda kod prigušenog titranja



Slika 24.
Amplituda prisilnog titranja u ovisnosti o frekvenciji i otporu sredstva



$$s = A_0 e^{-\gamma \cdot t} \sin(\omega t + \varphi_0). \qquad (87)$$

Možemo reći da je rješenje poprimilo oblik (20), ali s nekim bitnim razlikama. Frekvencija ω razlikuje se od frekvencije ω_0 i nešto je manja:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \gamma^2}. \qquad (88)$$

Dvije frekvencije jače se razlikuju ako je veća sila otpora zraka, ali ta razlika najčešće nije znatna. No najveća se razlika primjećuje u amplitudi. Nova amplituda

$$A = A_0 e^{-\gamma \cdot t} \qquad (89)$$

eksponencijalno se smanjuje s vremenom (Sl. 23). Masa i dalje titra ovješena na oprugu, ali pri svakom sljedećem titraju amplituda joj je manja. Nove amplitude slijede eksponencijalnu krivulju, i nakon nekog vremena utrnu. Koliko brzo će se to dogoditi, nakon više titraja, nakon samo jednog cijelog titraja ili čak i prije nego što se obavi cijeli titraj, to ovisi o konstanti γ, dakle o omjeru jakosti sile otpora i mase.

Prisilne oscilacije. Rezonancija

Govoreći o energiji, naglasili smo da je energija dana kvadratom amplitude. Kod prigušenog titranja amplituda se smanjuje, dakle energija se gubi u okolinu. Često međutim želimo da se titranje nastavi, da ostane harmoničko, da amplituda bude konstantna. To znači da djelovanjem neke vanjske sile moramo nadoknaditi energiju izgubljenu trenjem ili otporom sredstva. To je najjednostavnije učiniti pomoću vanjske periodične sile, koju ćemo predočiti u obliku

$$F = F_0 \cos \omega_f t. \qquad (90)$$

Jednadžba gibanja sad glasi

$$ma = -ks - b\mathrm{v} + F_0 \cos \omega_f t \qquad (91)$$

ili

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\gamma \frac{ds}{dt} + \omega_0^{\,2} s = \frac{F_0}{m} \cos \omega_f t. \qquad (92)$$

Nećemo detaljno opisivati postupak, već ćemo navesti osnovna svojstva rješenja ove jednadžbe. U početnim trenucima nakon $t = 0$ javlja se prolazno nepravilno titranje, koje se nakon nekoliko titraja ustali i postaje harmoničko. Takav sustav ne titra ni vlastitom frekvencijom (85), ni frekvencijom prigušenog titranja (88), već frekvencijom vanjske sile (90) ω_f. Sustav je prisiljen titrati nametnutom frekvencijom, a titranje možemo opisati izrazom

$$s = A \sin(\omega_f t + \varphi_f) \qquad (93)$$

Amplituda je stalna, dakle riječ je o neprigušenom titranju. Međutim, ta amplituda ima zanimljiva svojstva. Ona ovisi o tome kakva je nametnuta frekvencija i koliko se razlikuje od vlastite frekvencije sustava. Deriviramo li dvaput rješenje (93) i uvrstimo li prvu i drugu derivaciju u jednadžbu (92), dobit ćemo da amplituda ovisi o vanjskoj frekvenciji prema izrazu

$$A = A(\omega_f) = \frac{\dfrac{F_0}{m}}{\sqrt{\left(\omega_f^{\,2} - \omega_0^{\,2}\right)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^{\,2}}}. \qquad (94)$$

U brojniku je konstantan izraz. U nazivniku ispod korijena se međutim nalazi kvadrat razlike kvadrata nametnute i vlastite frekvencije. Titra li nametnuti sustav zanemarivo malom frekvencijom $\omega_f \cong 0$, amplituda prisilnog titranja jednaka je F_0/k. Ako je koeficijent b sile otpora veći od granične vrijednosti $b_g = \sqrt{2mk}$, povećanjem nametnute frekvencije amplituda se smanjuje. Međutim, ako je $b \leq \sqrt{2mk}$, odnosno ako je $\frac{\gamma}{\omega_0} \leq \sqrt{\frac{1}{2}}$, s povećanjem vanjske frekvencije ω_f amplituda raste do maksimalne vrijednosti A_R, a daljnjim se povećanjem vanjske frekvencije opet smanjuje Na Sl. 24. prikazana je ovisnost amplitude o vanjskoj frekvenciji za nekoliko vrijednosti omjera γ/ω_0.

Kako se povećanjem vanjske frekvencije približavamo vlastitoj frekvenciji, tako razlika $\omega_f^2 - \omega_0^2$ u (94) postaje sve manja i manja, sve je manji i njezin kvadrat, sve manji dakle i cijeli nazivnik, a amplituda sve veća i veća. Najveću vrijednost amplituda postiže kad je

$$\omega_{f_M} = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \qquad (95)$$

i tada iznosi

$$A_R = \frac{F_0}{2m\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \qquad (96)$$

Pojava izrazitog povećanja amplitude na određenoj frekvenciji naziva se *rezonancijom,* ili preciznije *amplitudnom rezonancijom,* a frekvencija (95) *rezonantnom frekvencijom.* Ako se otpor sredstva može zanemariti, tada će biti $b \cong 0$. Rezonantna je frekvencija, kako je vidljivo i iz (94) i iz (95), tada jednaka vlastitoj frekvenciji sustava, a amplituda će porasti iznad svake granice: $A \to \infty$.

U stvarnosti otpor sredstva može biti malen, ali nikad nije sasvim zanemariv. Amplituda stoga može postati dovoljno velika da je realni titrajni sustav ne može ostvariti, zbog nedovoljne čvrstoće materijala od kojeg je načinjen. Tako ste vjerojatno već znali da pravilno stupanje vojnika preko mosta ili periodični udari vjetra mogu izazvati rezonantno titranje mosta tolikom amplitudom da se most sruši. Poznate su i scene iz filmova kad zvuk trube ili ljudski glas koji izvodi visoki ton pobudi na titranje staklenu čašu, a ona zatim zbog prejakih vibracija pukne. Da bismo pobudili sustav na harmoničko titranje, treba djelovati vanjskom periodičnom silom frekvencije bliske onoj kojom bi sustav titrao da nema prigušenja ni vanjske sile. To ste, i ne znajući, činili ako ste ikada njihali malo dijete na ljuljački u parku.

Prisilne oscilacije temelj su satnih mehanizama. Vanjska sila je gravitacija kod satova s njihalom i utezima, a elastična sila kod satova s oprugom. Razvoj suvremene fizike počeo je tek nakon što su Galileo Galilei (1564-1642) i Christian Huygens (1629-1695) svojim otkrićima i izumima omogućili izradu i široku upotrebu preciznih uređaja za mjerenje vremena. Naime, pokusi sa slobodnim padom i različitim gibanjima tijela nisu bili mogući dok se vrijeme mjerilo samo sunčanim i pješčanim satovima. Legenda kaže da je Galileo Galilei pri prvim pokusima sa slobodnim padom vrijeme mjerio otkucajima vlastitog pulsa. Kasnije je, promatravši njihanje lustera u crkvi, opazio pojavu da period njihanja ovisi o duljini njihala, i na temelju toga Galilei i kasnije Huygens konstruirali su prve točne satove.

Zbrajanje oscilacija

Kad neki titrajni sustav titra samo jednim tipom oscilacija, tada možemo početni trenutak odabrati tako da nam početna faza u (20) bude jednaka nuli. No ponekad na isti sustav istodobno djeluju dvije harmoničke sile, dva uzroka koji izazivaju dva različita titranja. Konačno će titranje biti superpozicija, tj. zbroj tih dvaju titranja. U tom slučaju titranja se, osim u amplitudama i frekvencijama, mogu razlikovati također i u fazi titranja, a te će razlike značajno utjecati na konačno rezultantno titranje.

Razmotrit ćemo neke tipične jednostavnije slučajeve zbrajanja oscilacija.

Zbrajanje oscilacija jednakih frekvencija na istom pravcu

Sustav koji je pobuđen da istodobno titra dvjema različitim amplitudama A_1 i A_2 i dvjema početnim fazama φ_1 i φ_2, a jednakim frekvencijama ω, tako da su mu elongacije

$$s_1 = A_1 \sin(\omega\, t + \varphi_1) \qquad (97)$$

i

$$s_2 = A_2 \sin(\omega\, t + \varphi_2), \qquad (97')$$

izvodit će gibanje iste frekvencije ali s novom amplitudom i novom početnom fazom

$$s = A \sin(\omega t + \varphi). \qquad (98)$$

Do tog se gibanja moralo doći zbrajanjem dviju elongacija (97) i (97'):

$$s = s_1 + s_2, \qquad (99)$$

te je

$$\begin{aligned} A\sin(\omega t + \varphi) &= A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + \\ &+ A_2 \sin(\omega t + \varphi_2) \end{aligned} .(100)$$

Kako naći rezultantnu amplitudu i novu fazu? Upotrijebit ćemo teorem adicije za funkcije sinus i kosinus, te gornji izraz možemo pisati

$$\begin{aligned} &A(\sin\omega t \cos\varphi + \cos\omega t \sin\varphi) = \\ &= A_1(\sin\omega t \cos\varphi_1 + \cos\omega t \sin\varphi_1) + . \\ &+ A_2(\sin\omega t \cos\varphi_2 + \cos\omega t \sin\varphi_2) \end{aligned} \qquad (101)$$

Dvije strane moraju biti jednake u svakom trenutku t, a to je moguće jedino ako su koeficijenti uz $\sin\omega t$ i $\cos\omega t$ na obje strane identični. To nas vodi na izraze

$$A\cos\varphi = A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2 \qquad (102)$$

i

$$A\sin\varphi = A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2 . \qquad (103)$$

Riješimo te dvije jednadžbe i nađemo nepoznanice A i φ:

$$A = \sqrt{A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \qquad (104)$$

i

$$\tan\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} . \qquad (105)$$

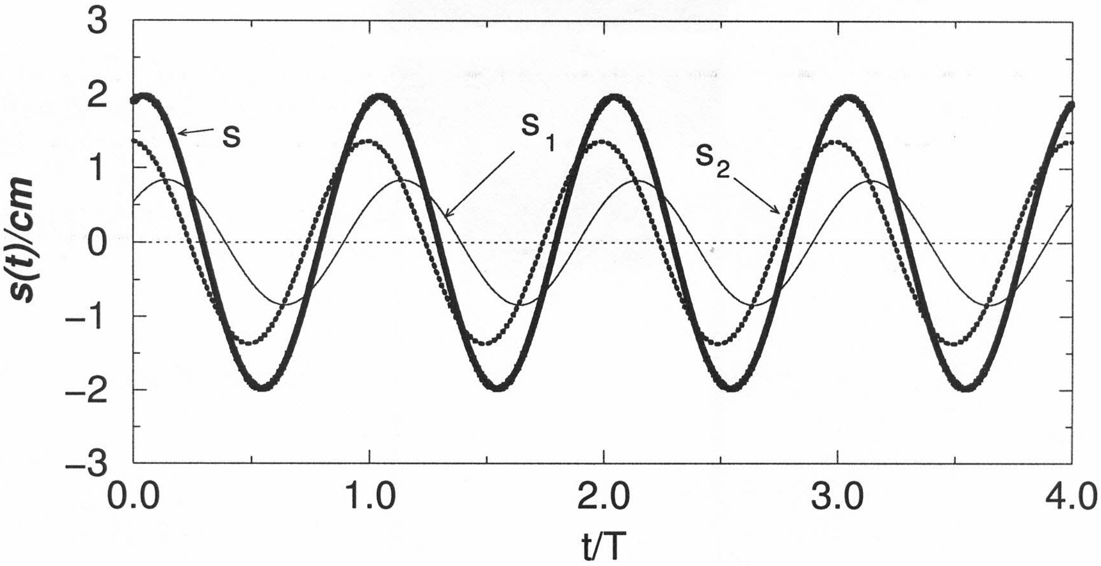
Funkcije (97), (97') i (98) prikazane su na Sl. 25.

Metoda rotirajućih vektora

Isti rezultat dobit ćemo i ako se poslužimo metodom rotirajućih vektora. Ranije smo pokazali da se

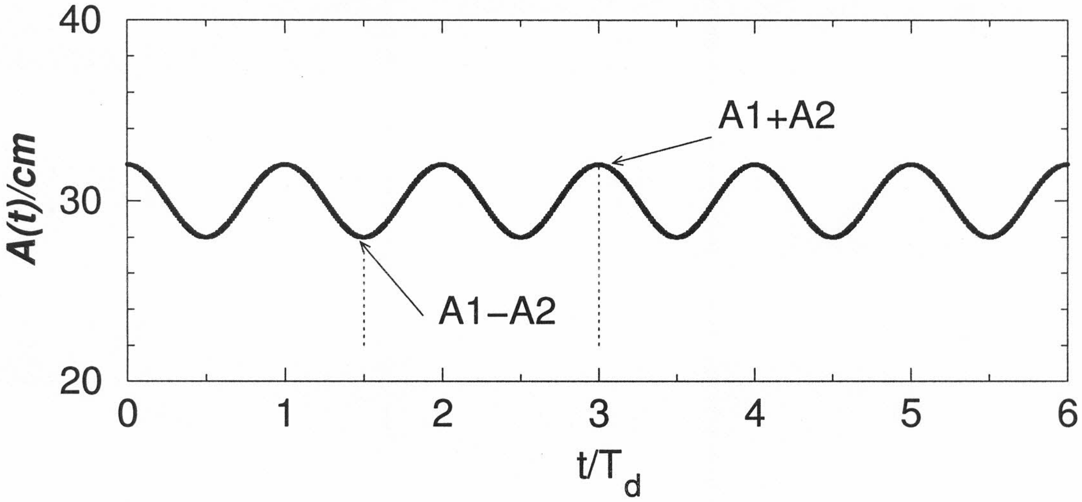
Slika 25.

Zbrajanje titraja jednake frekvencije na istom pravcu



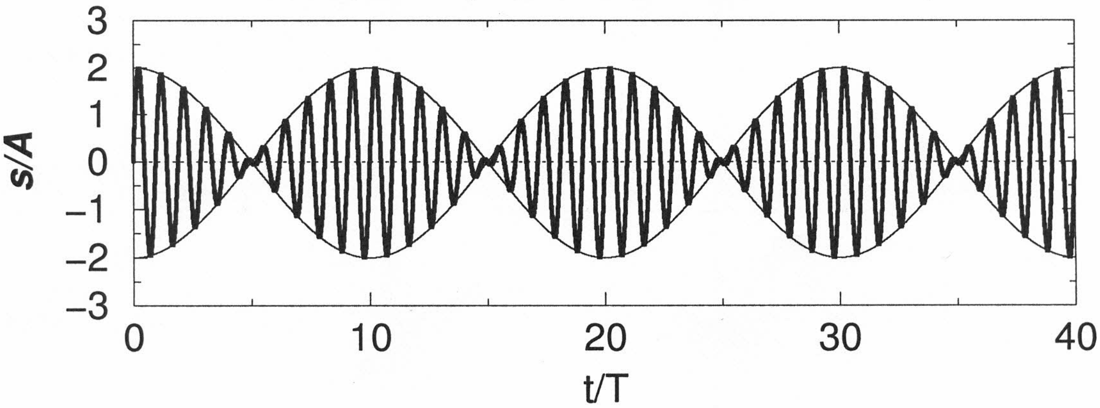
Slika 27.

Promjenljiva amplituda zbroja titraja različitih frekvencija



Slika 28.

Udari pri zbrajanju titranja bliskih frekvencija



titranje može shvatiti kao projekcija kružnog gibanja. To nam je naročito korisno pri zbrajanju oscilacija s jednakim frekvencijama.

Svaku pojedinu oscilaciju prikažemo kao projekciju vektora na os y (Sl. 26). Vektori se razlikuju po iznosima (amplitudama) i početnim fazama, ali tijekom cijelog kruženja međusobno zatvaraju isti kut $\varphi_2 - \varphi_1$. Time tvore paralelogram, a vektorski zbroj, rezultanta, dijagonala je tog paralelograma i ona jednakom kutnom brzinom ω kruži oko ishodišta. Njezin iznos A i faza φ dani su izrazima (104) i (105).

Zbrajanje oscilacija različitih frekvencija na istom pravcu

Zbog jednostavnosti promatrat ćemo slučaj da su obje početne faze titranja jednake nuli, tako da zbrajamo elongacije

$$s_1 = A_1 \sin\omega_1 t. \qquad (106)$$

i

$$s_2 = A_2 \sin\omega_2 t. \qquad (107)$$

U ovom slučaju rezultantno titranje

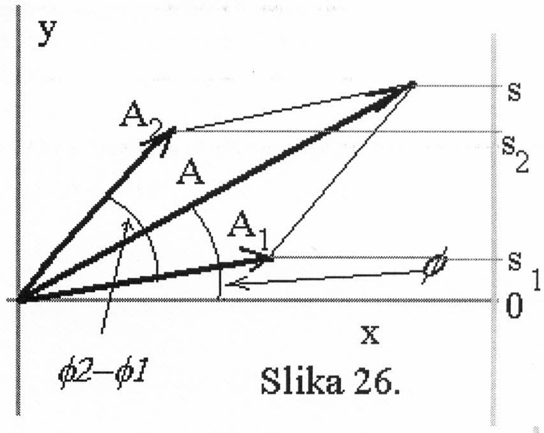
$$s = s_1 + s_2 \qquad (108)$$

nije harmoničko, već se njegova amplituda pravilno mijenja s vremenom po zakonu

$$A = \sqrt{A_1^{\,2} + A_2^{\,2} + 2A_1A_2\cos(\omega_1 - \omega_2)t} \qquad (109)$$

Kažemo da je titranje *modulirano*. Amplituda A se smanjuje i povećava, oscilirajući između minimalne i maksimalne vrijednosti (Sl. 27):

$$|A_1 - A_2| \le A \le A_1 + A_2. \qquad (110)$$



Slika 26.

U posebnom slučaju jednakih amplituda $A_1 = A_2 = A$ titranje se može opisati izrazom

$$s = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right). \qquad (111)$$

Frekvencija uz kosinus manja je od frekvencije uz sinus, tako da izraz (111) možemo shvatiti kao titranje frekvencijom $(\omega_1 + \omega_2)/2$ i moduliranom rezultantnom amplitudom

$$A_R = 2A\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right). \qquad (112)$$

U slučaju da su dvije frekvencije vrlo bliske, pa je

$$\omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega \qquad (113)$$

vrlo malo, elongacija je

$$s = 2A\cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\right)\sin\left[\left(\omega_1 + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right]. \qquad (114)$$

Prikazujemo je na Sl. 28. Rezultat su tzv. *udari*, koje možemo čuti, primjerice, ako istodobno zatitramo dvije jednake glazbene viljuške, od kojih smo jednoj sasvim malo promijenili frekvenciju nalijepivši na nju komadić plastelina. Pojava udara često se javlja i kod električnih titraja, pa je opažamo kad, tražeći stanicu na radioaparatu, naiđemo na dva odašiljača bliskih frekvencija.

Zbrajanje titranja na međusobno okomitim pravcima

Titranja koja smo dosad opisivali zbivala su se u jednoj dimenziji. Čestica je putovala po dijelu krivulje najprije u jednom a zatim u suprotnom smjeru. Matematičko njihalo titralo je po dijelu kružnice u vertikalnoj ravnini, a uteg na opruzi po dijelu pravca u horizontalnoj ili vertikalnoj ravnini.

Zamislimo sada da na česticu djeluju dvije međusobno okomite harmoničke sile, jedna u smjeru osi x, a druga u smjeru osi y. U svakom od dvaju smjerova rezultantno je titranje harmoničko, ali se razlikuje i u amplitudama, i u frekvencijama, i u fazi. Kako nije bitna svaka pojedina početna faza, već njihova razlika δ, ta titranja možemo opisati sljedećim dvama izrazima:

$$x = A_1 \sin \omega_1 t \qquad (115)$$

i

$$y = A_2 \sin(\omega_2 t + \delta). \qquad (116)$$

Rezultantno će se gibanje odvijati u x-y ravnini, a čestica će opisivati krivulju. Njezinu jednadžbu dobijemo ako iz (115) i (116) isključimo vrijeme t. Rezultat izrazito ovisi o omjeru dviju frekvencija ω_2/ω_1 i o razlici faza δ. Dobivene staze po kojima se čestica giba nazivaju se *Lissajousove krivulje.* Ako je omjer frekvencija racionalan broj, to su zatvorene krivulje. Među njima ima ravnih crta, osmica, elipsa i kružnica, kakve dobivamo kad se frekvencije odnose kao mali cijeli brojevi, do vrlo lijepih šara koje postaju sve složenije, kako omjer dviju početnih frekvencija postaje složeniji. Na Sl. 29. prikazano je nekoliko osnovnih Lissajousovih krivulja za jednake amplitude $A_1 = A_2 = A$. Uz svaku krivulju označene su vrijednosti ω_2 / ω_1 i razlike faza δ.

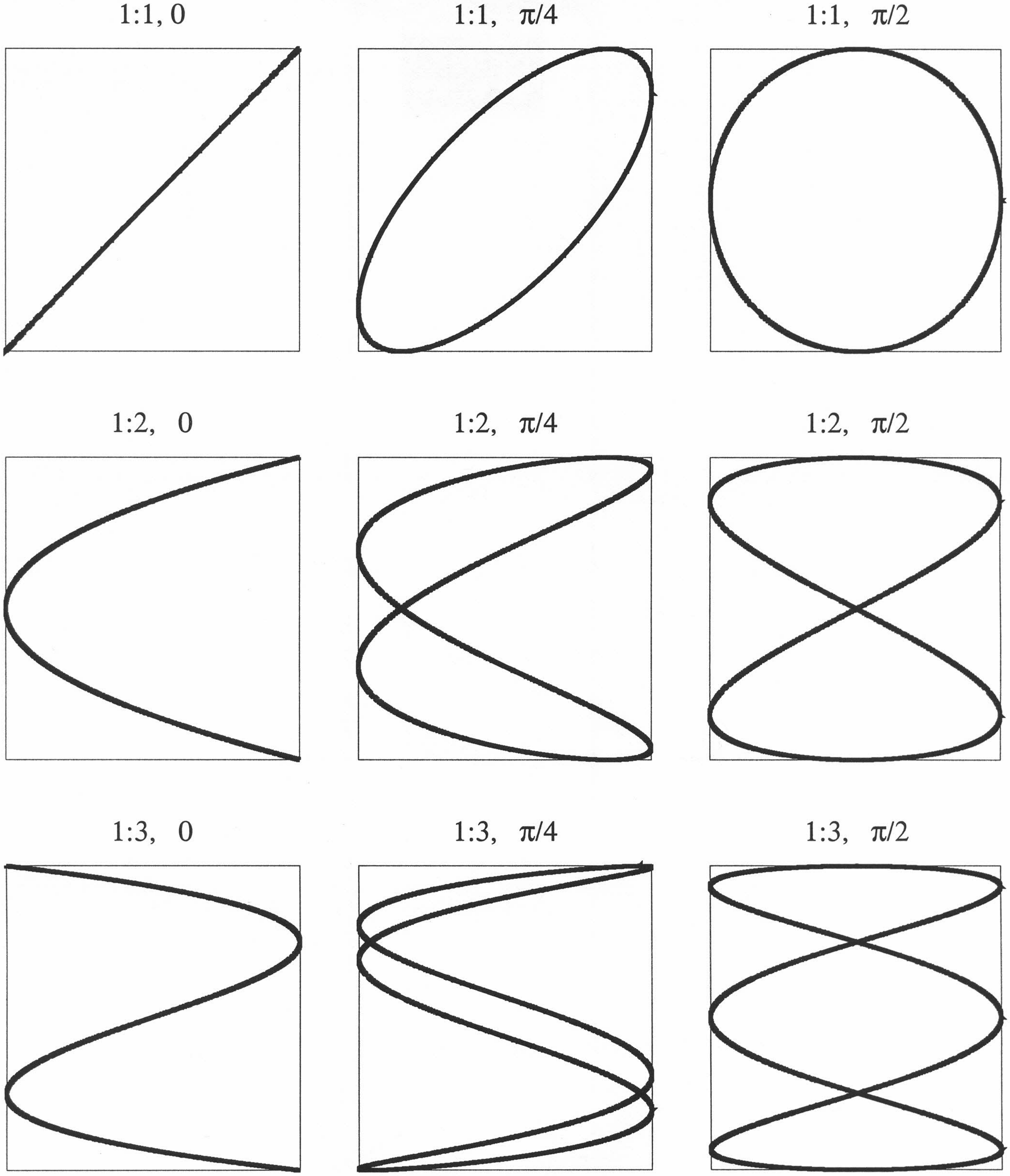
Jednostavan pokus kojim možemo promatrati Lissajousove krivulje načinit ćemo pomoću vrećice napunjene pijeskom i obješene na nit. Vrećica obješena na nit može se njihati u svim smjerovima. Na stol ispod tako dobivenog njihala stavimo bijeli papir, a na dnu vrećice probušimo rupicu, tako da pijesak može istjecati i padati na papir. Dok vrećica miruje, pijesak stalno pada u istu točku na papiru. Zanjišemo li vrećicu, ovisno o početnoj brzini i o početnom smjeru gibanja vrećice, budemo li dovoljno pažljivi, pijesak će iscrtavati različite Lissajousove krivulje.

Vezani oscilatori

U prirodi i tehnici naći ćemo mnogo primjera gdje su dva titrajna sustava, ili više njih, međusobno povezani elastičnom vezom. Zatitramo li jedan od dvaju oscilatora, on može drugome predavati dio svoje energije. Pri tome se amplituda prvog titrajnog sustava smanjuje, dok se amplituda drugog povećava, i obrnuto. Za cijeli titrajni sustav energija je očuvana, dok se svakome oscilatoru zasebno energija može mijenjati.

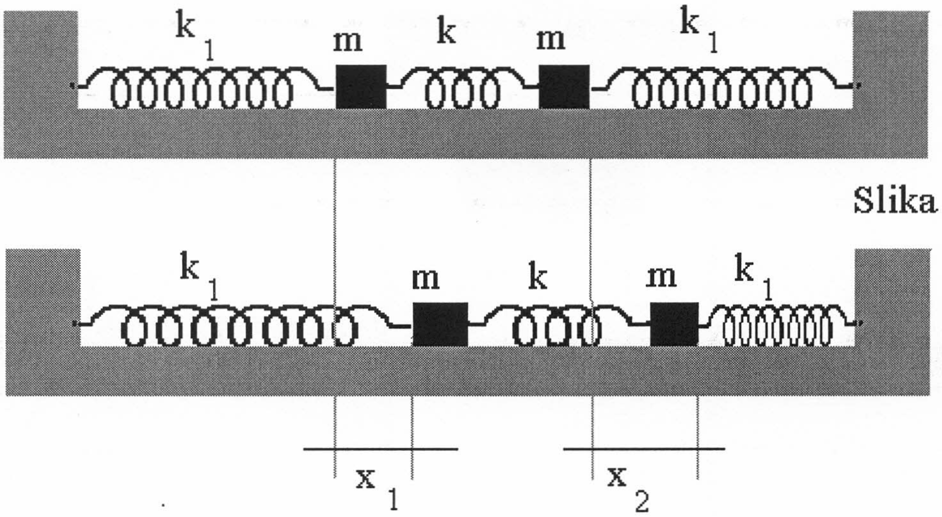
Zamislimo vezani titrajni sustav koji nastaje kad dva jednaka utega masa m

Slika 29. Lissajou-ove krivulje



pričvršćena jednakim oprugama konstante k_1 na suprotne čvrste zidove, povežemo oprugom konstante k (Sl. 30).

oscilatora x_1 i x_2. Taj se član naziva energijom vezanja, i omogućuje prijelaz energije s jednog sustava na drugi. Taj je prijenos veći ako je



Slika 30.

konstanta k veća pa, ovisno o njezinoj veličini, govorimo o jakom ili o slabom vezanju.

Ako je u nekom trenutku gibanja prvi uteg pomaknut udesno za udaljenost x_1 od svog ravnotežnog položaja, a drugi za udaljenost x_2, lijeva se opruga produljila za x_1, srednja za x_2-x_1, a desna se skratila za x_2. U oprugama sada djeluju elastične sile. Rezultante tih sila djeluju na utege, te cijeli sustav sada ima potencijalnu energiju

$$E_p = \frac{1}{2}k_1 x_1^2 + \frac{1}{2}k_1 x_2^2 + + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2 \qquad (117)$$

ili

$$E_p = \frac{1}{2}(k_1 + k)x_1^2 + \frac{1}{2}(k_1 + k)x_2^2 - kx_1x_2 \qquad (118)$$

Taj izraz ima karakterističnu strukturu, kakva se pojavljuje u svim vezanim titrajnim sustavima, od strojnih dijelova do oscilacija u svijetu atoma. Prvi je član energija prvog oscilatora, drugi je energija drugog oscilatora, a treći sadrži u sebi konstantu vezanja k i elongacije obaju

Za svaki od utega sada možemo napisati jednadžbe gibanja – drugi Newtonov zakon. Za elongaciju x_1 prvog utega vrijedi

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1x_1 + k(x_2 - x_1) \qquad (119)$$

a za elongaciju x_2 drugog utega

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k_1x_2 - k(x_2 - x_1) \qquad (120)$$

Uredimo li jednadžbe, dobivamo

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{k_1 + k}{m}x_1 = \frac{k}{m}x_2 \qquad (121)$$

i

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + \frac{k_1 + k}{m}x_2 = \frac{k}{m}x_1 . \qquad (122)$$

Dobili smo sustav vezanih diferencijalnih jednadžbi. Njihova rješenja mogu se podijeliti u dvije grupe, i predstavljaju dva načina gibanja sustava. Postoje dakle dva tipa rješenja. U prvom načinu gibanje jednog utega utječe na drugi, amplitude njihovih titranja se mijenjaju, a tijekom gibanja utezi jedan drugome predaju energiju. Drugi tip rješenja su tzv. *normalni modovi* (načini gibanja), kod kojih se svaki uteg giba neovisno o onome drugome i nema prijenosa energije, Normalni su modovi vrlo posebna rješenja jednadžbi (119) i (120). Za prvi normalni mod dobiju se elongacije

$$x_1 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \qquad (123)$$

i

$$x_2 = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1). \qquad (124)$$

Dva utega titraju u fazi. Frekvencija tog titranja je

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \qquad (125)$$

i ne ovisi o konstanti vezanja *k*.

Drugi normalni mod opisan je elongacijama

$$x_1 = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \qquad (126)$$

i

$$x_2 = -A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2). \qquad (127)$$

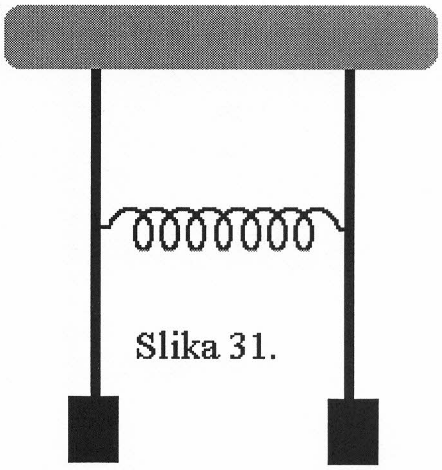
Utezi titraju u protufazi. Frekvencija tog titranja

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_1 + 2k}{m}} \qquad (128)$$

je veća od one prve, a ovisi i o konstanti *k* opruge koja povezuje dva oscilatora.

Oberbeckova njihala

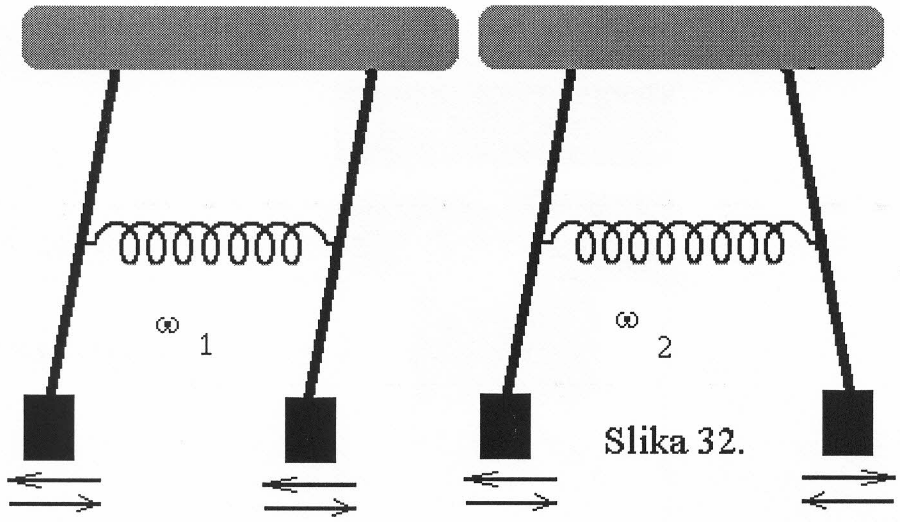
Pokus kojim ilustriramo ponašanje vezanih oscilatora izvodi se pomoću tzv. Oberbeckovih njihala (Sl. 31).



Slika 31.

To su dva identična fizička njihala, od kojih se svako sastoji od metalnog štapa na kraju kojega je metalni valjak Njišemo li ih svakog zasebno s malim amplitudama, oni će izvoditi, neovisno jedan od drugog, harmoničke titraje. No ta se dva njihala mogu povezati oprugom.

Ako sad zanjišemo prvo njihalo, njegova će se amplituda postupno smanjivati, dok će drugo njihalo početi njihati sve jače i jače. Pokus ilustrira prijenos energije s jednog njihala na drugo. Pri tome se amplitude obaju njihala stalno mijenjaju. Postoje međutim dva načina, normalna moda, kako možemo zanjihati vezana Oberbeckova njihala, a da amplitude svakoga od njih ostanu stalne i da ne bude prijenosa energije s jednog njihala na drugo. Prvi je kad njihala zanjišemo potpuno paralelno, u fazi, a drugi kad su faze suprotne (Sl. 32).



Slika 32.

Zanimljivo je da frekvencije tih dvaju modova, dane izrazima (125) i (128), nisu jednake.

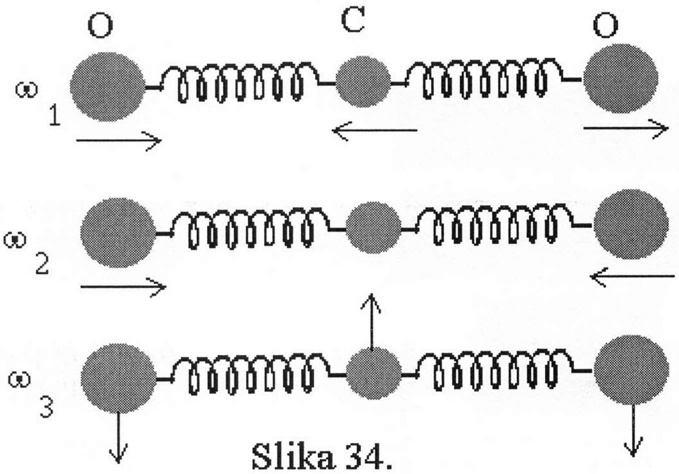
Titranje atoma i molekula

Poznato je da molekule zrače elektromagnetske valove u mikrovalnom i infracrvenom području elektromagnetskog spektra.

Slika 33.

Za potpuno razumijevanje gibanja i zračenja atoma potrebno je poznavati još mnogo činjenica koje nismo učili u mehanici. Ipak, treba reći da se neka svojstva molekula i njihovih zračenja mogu razumjeti ako se molekule predoče kao klasični mehanički sustavi sastavljeni od oscilatora. Primjerice, molekula HCl sastoji se od atoma vodika i atoma klora, koji se nalaze na ravnotežnoj udaljenosti od 0,13 nm (Sl. 33).

Ta udaljenost nije čvrsta, već se atomi približavaju i udaljavaju jedan od drugoga pod djelovanjem sile koja je slična harmoničkoj. Potencijalna energija takve sile u ovisnosti o udaljenosti među atomima prikazana je na Sl. 17. Za razliku od harmoničke potencijalne energije (parabola na Sl. 17), titranje oko ravnotežnog položaja samo je za male energije simetrično. Za nešto veće energije ono je nesimetrično, a za još veće atomi se mogu otrgnuti jedan od drugoga i dolazi do disocijacije molekule. U slučaju molekule HCl kružna frekvencija titranja je $\omega = 5{,}6 \cdot 10^{14} s^{-1}$, a energija disocijacije 4,6 eV. I molekula od tri ili više atoma može predstavljati vezani titrajni sustav. Na Sl. 34 prikazana je molekula CO_2 i tri moguća načina njezinog titranja. Izmjerene frekvencije tih titranja $\omega_1 = 4{,}4 \cdot 10^{14} s^{-1}$, $\omega_2 = 2{,}5 \cdot 10^{14} s^{-1}$ i $\omega_3 = 1{,}3 \cdot 10^{15} s^{-1}$ mogu se izračunati pomoću jednadžbi gibanja. Ovaj nam primjer ukazuje na važnost zakona titranja za razumijevanje strukture i svojstava tvari.



Slika 34.

Zadaci:

1. Vodoravno položena daska titra u horizontalnoj ravnini s amplitudom 1,5 m. Ako je frekvencija 12 titraja u minuti, izračunajte najmanju vrijednost koeficijenta trenja potrebnu da tijelo koje leži na dasci ne sklizne s nje prilikom titranja.

2. Nacrtajte grafički prikaz ovisnosti elongacije o vremenu za česticu koja titra po zakonu

$$s = 0{,}05m \sin\left(\frac{\pi}{6}\frac{t}{s} + \frac{\pi}{4}\right).$$

3. Bakrena kugla obješena na oprugu izvodi vertikalne oscilacije. Kako će se promijeniti period titranja, ako tu kuglu zamijenimo aluminijskom kuglom jednakog polumjera? Gustoća bakra je 8900 kg/m^3, a aluminija 2700 kg/m^3.

4. Četiri jednake opruge, svaka konstante k=100 N/m, ovješene su jedna ispod druge, a na najnižu je obješen uteg nepoznate mase. Kad se taj sustav izvuče iz položaja ravnoteže i pobudi na titranje, opažamo da načini 120 titraja u jednoj minuti. Kolika je masa utega?

5. Kocka stranice a=10 cm, načinjena od drveta gustoće 400 kg/m^3 , pliva na vodi. Ako je potisnemo dublje u vodu i pustimo, ona će početi titrati. Izračunajte period i frekvenciju kojom titra kocka.

6. Homogena okrugla ploča polumjera 99,3 cm predstavlja fizičko njihalo, ako je zanjišemo oko vodoravne osi paralelne s osi simetrije ploče. Izračunajte i grafički prikažite kako period tog titranja ovisi o udaljenosti r osi od središta ploče.

7. Koliki je period fizičkog njihala u obliku homogenog štapa duljine 1 m, ako se taj štap njiše oko osi koja prolazi jednim njegovim krajem?

8. Amplituda matematičkog njihala koje prigušeno titra, smanji se na polovicu za vrijeme od jedne minute. Koliko će se smanjiti za tri minute?

9. Prikažite grafički ovisnost potencijalne i kinetičke energije čestice mase 10 g koja harmonički titra s amplitudom 2 cm i frekvencijom 4 Hz, s početnom fazom jednakom nuli: a) o položaju, b) o vremenu.

10. Otpor pri gibanju utega kroz sredstvo dan je zakonom $F_t=-bv$, gdje je b=3kg s^{-1}. Uteg ima masu 1 kg i obješen je na oprugu konstante k=100N/m. Na uteg djeluje vanjska periodična sila $F = F_0 \cos \omega_f t$.

a) Izračunajte vlastitu frekvenciju ω_0 sustava.

b) Izračunajte rezonantnu frekvenciju ω_f i rezonantnu amplitudu A_R, ako je amplituda vanjske sile jednaka F_0=2N. c) Nađite pripadne frekvencije ν i periode T.