

PRIJENOS TVARI I ENERGIJE

Dr.sc. Antuna Glasnovića, red. prof.

Dr.sc. Aleksandra Sander, izv. prof.

Fakultet kemijskog inženjerstva i tehnologije, Sveučilišta u Zagrebu

Literatura

1. W.J. Beek, K.M.K. Mutzall, *Transport Phenomena*, J. Wiley and Sons LTT, London, 1975.
2. R. Byron Bird and all, *Transport Phenomena*, J. Wiley and Sons LTT, New York, 1971.
3. J.R. Welty, C.E. Wicks, R.E. Wilson, *Fundamentals of Momentum, Heat and Mass Transfer*, J. Wiley, 1976.
4. L.E. Sissom, D.R.Pitts, *Elements of Transport Phenomena*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1972.
5. R.S.Brodkey, H.C.Hershey, *Transport phenomena, A unified approach*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1989.
6. C.O.Bennett, J.E.Myers, *Momentum, Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill Book Company Inc, New York, 1962.
7. B.S.Massey, *Mechanics of fluids*, Van Nostrand Reinhold Company LTD, London, 1970.
8. V.P.Isachenko, V.A.Osipova, A.S. Sukomel, *Heat transfer*, Mir Publishers, Moscow, 1977.
9. J.P. Holman, *Heat transfer*, McGraw-Hill Book Company, Singapore, 1989.
10. D.R.Pitts, L.E. Sissom, *Theory and problems of heat transfer*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1977.
11. M.Zlokarnik, *Stirring, Theory and Practice*, Wiley-VCH, Weinheim, 2001.
12. M.Zlokarnik, *Scale-up in Chemical Engineering*, Wiley-VCH, Weinheim, 2006.

1. UVOD

Prijenos tvari i energije sastavni je dio svih kemijsko inženjerskih disciplina. Kemijsko inženjerstvo je područje znanosti koje se bavi proučavanjem procesa koji obuhvaćaju transformaciju (kemijsku, biološku, fizikalnu) tvari ili energije u korisne proizvode. Pojedinačni procesi kojima se bave kemijski inženjeri nazivaju se jedinične operacije (na primjer destilacija, filtracija) i obuhvaćaju kemijske reakcije, prijenos količine gibanja, tvari i energije.

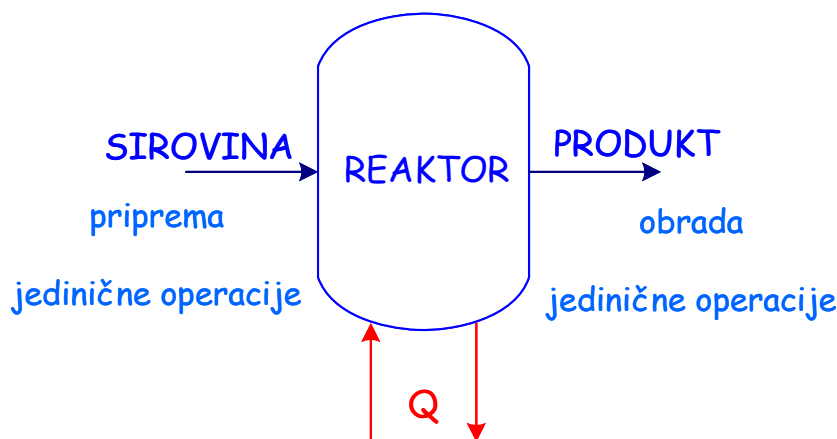
Na bazi tih proučavanja omogućuje se razvoj, projektiranje, dimenzioniranje, vođenje procesa te izbor uređaja i procesne opreme u kojem će se proces industrijski voditi na ekonomičan način. Kemijsko inženjerske studije omogućuju da se na osnovi kvalitativnog razumijevanja kvantitativno matematički opisuje proces.

Prijenos tvari i energije u kemijskom procesu opisuje se bilancama koje primjenjuju osnovne zakonitosti na ukupnu proizvodnju, pojedinačne operacije ili dijelove uređaja, pri čemu koriste principe termodinamike, kinetike reakcija i prijenosne pojave.

Primjena:

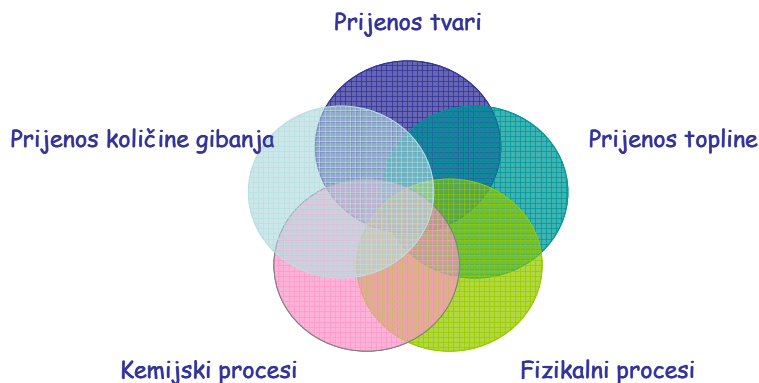
- stvaranje novih boljih materijala i proizvoda (korisnih)
- razvoj i proizvodnja različitih visokovrijednih proizvoda, kao i proizvodnja osnovnih kemikalija
- zračna, automobilska, biomedicinska, ekološka vojna industrija
- biologija i medicina

Tehnološki proces uključuje fizikalne i kemijske pretvorbe od polazne sirovine do konačnog proizvoda.



Slika 1.1. Općeniti prikaz tehnološkog procesa

Prije reaktora sirovinu je potrebno npr. usitniti, homogenizirati, predgrijavati, transportirati. U reaktoru se provodi kemijska reakcija uz miješanje, hlađenje ili zagrijavanje. Iza reaktora potrebno je pak produkte odijeliti npr. filtracijom, destilacijom, ekstrakcijom, sušenjem, homogeniziranjem. Svi postupci kod kojih dolazi do fizičkih promjena poznati su pod nazivom **tehnološke** ili **jedinične operacije**. Tijekom većine separacijskih procesa (jediničnih operacija) odvija se više od jednog procesa (slika 1.2.). Na primjer, tijekom konvekcijskog sušenja zagrijani zrak struji iznad površine vlažnog materijala (prijenos količine gibanja), pri čemu predaje toplinu vlažnom materijalu (prijenos toplote). Prilikom zagrijavanja dolazi do isparavanja vlage s površine materijala, a istovremeno kroz unutrašnju strukturu materijala vlaga se kreće prema površini isparavanja (prijenos tvari). Ako se suši higroskopni materijal može mu se mijenjati i unutrašnja struktura (veličina i raspodjela veličina pora). Dakle osim procesa prijenosa (količine gibanja, toplote i tvari) istovremeno se mogu odvijati i različiti kemijski ili fizikalni procesi. Sve to govori u prilog složenosti takovih procesa.



Slika 1.2. Složenost jediničnih operacija

Prijenos tvari i energije usko je povezan s jediničnim operacijama koje su s obzirom na fizikalne promjene podijeljene u tri osnovne skupine:

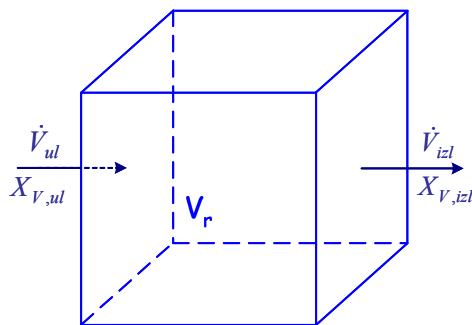
- mehaničke – koje se temelje na pojavama prijenosa količine gibanja (usitnjavanje, homogeniziranje, filtracija, sedimentacija,...)
- toplinske – koje se temelje na pojavama prijenosa topline (zagrijavanje, destilacija, sušenje,...)
- difuzijske – koje se temelje na pojavama prijenosa tvari (destilacija, ekstrakcija, apsorpcija,...).

Ovakva podjela omogućava uočavanje sličnosti ovih operacija. Uočena je određena analogija između osnovnih fenomena u navedene tri skupine operacija tako da je danas razvijen zajednički pristup poznat kao **prijenos tvari i energije** ili **fenomeni transporta**. Na taj način omogućava se bolje razumijevanje i povezivanje zakonitosti u jediničnim operacijama

1.1. OPĆI ZAKON OČUVANJA

Kod svih promjena koje se pojavljuju u prirodi *mora* biti zadovoljen osnovni uvjet očuvanja količine gibanja, energije i mase.

Na slici 1.3. prikazan je općeniti prikaz procesnog prostora, odnosno kontrolnog volumena. Procesni prostor je omeđeni dio prostora kroz koji tokom vremena protječe neka količina *gibanja*, *tvari* ili *energije*. U procesnom se prostoru zbiva barem jedan od mnogobrojnih procesa koji su po pripadnosti dio kemijskog inženjerstva, a može biti npr. šaržni reaktor, destilacijska kolona, zrno katalizatora, filtarski uređaj, izmjenjivač topline itd. Temeljne su značajke procesnog prostora *geometrijski oblik*, *ovisnost procesnih varijabli o vremenu i prostornim koordinatama*, *vrsta procesa unutar prostora*, *prolaz i prijenos količine gibanja, topline i tvari kroz procesni prostor i u njemu*.



Slika 1.3. Općeniti prikaz procesnog prostora

\dot{V} - protok, $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$

V_r - generiranje količine X u kontrolnom volumenu (nestajanje ili nastajanje količine X)

X_V - količina gibanja, tvari ili energije izražena po jedinici volumena tako da se može napisati:

prijenos količine gibanja	prijenos toplinske energije	prijenos tvari
$\frac{m \cdot v}{V} = v \cdot \rho, \text{ N s m}^{-3}$	$\frac{Q}{V}, \text{ J m}^{-3}$	$\frac{m}{V}, \text{ kg m}^{-3}$ ili $\frac{n}{V}, \text{ mol m}^{-3}$

Kod promatranja procesnog prostora moguće je postaviti *mikroskopsku bilancu* koja promatra infinitesimalno male veličine i *makroskopsku bilancu* koja promatra prosječne veličine. Opći zakon očuvanja za procese prijenosa promatra se sa makroskopskog stajališta, a može se pisati u sljedećem obliku:

AKUMULACIJA = ULAZ – IZLAZ + GENERACIJA

$$V \cdot \frac{dX_V}{dt} = \dot{V}_{ul} \cdot X_{V,ul} - \dot{V}_{iz} \cdot X_{V,iz} + V_r \quad (1.1)$$

Brzina akumulacije količine X u nekom procesnom prostoru jednaka je volumnom protoku količine X koja je ušla u sustav, umanjena za volumni protok količine X koja je izašla iz sustava i uvećana (umanjena) za generiranu količinu X u sustavu.

Smisao produkta $\dot{V} \cdot X_V$: **brzina procesa prijenosa** → TOK (količine gibanja, tvari ili energije)

$$\dot{V} \cdot X_V = \left[\frac{\text{m}^3}{\text{s}} \cdot \frac{\text{X}}{\text{m}^3} = \frac{\text{X}}{\text{s}} \right] \quad (1.2)$$

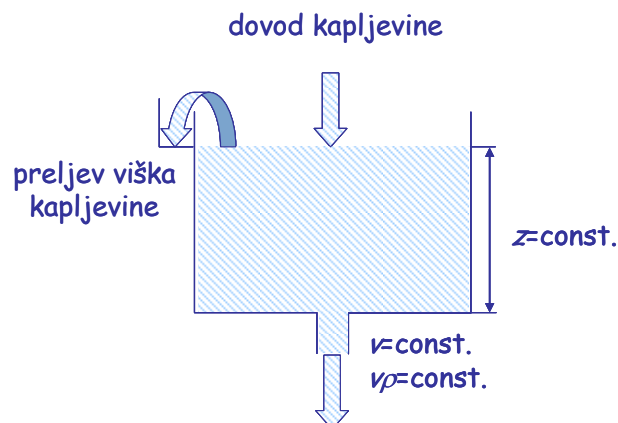
količina gibanja, [kg m s ⁻²]	energija, [J s ⁻¹ =W]	tvar, [kg s ⁻¹]
$\dot{V} \cdot X_V = \dot{V} \cdot \frac{m \cdot v}{V} = \frac{m \cdot v}{t}$	$\dot{V} \cdot X_V = \dot{V} \cdot \frac{Q}{V} = \frac{Q}{t}$	$\dot{V} \cdot X_V = \dot{V} \cdot \frac{m}{V} = \frac{m}{t}$

Potrebno je naglasiti da u ovisnosti o promjeni količine X s vremenom postoje dva karakteristična procesa:

- kada se brzina prijenosa ne mijenja u vremenu, odnosno $dX_V / dt = 0$, govori se o **stacionarnom procesu**,
- kada se brzina prijenosa mijenja u vremenu, odnosno $dX_V / dt \neq 0$, govori se o **nestacionarnom procesu**.

Za pojašnjenje funkcionalne ovisnosti ili neovisnosti brzine prijenosa o vremenu može ilustrativno poslužiti primjer istjecanja vode iz spremnika.

Stacionaran proces



Slika 1.4. Stacionarno istjecanje vode iz spremnika

Dovodi se kapljevina, a preljev osigurava stalnu razinu kapljevine u spremniku.

Prema Torricellijevom zakonu:

Brzina istjecanja jednaka je brzini slobodnog pada s visine koja odgovara visini stupca kapljevine u spremniku.

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot z} \quad (1.3.)$$

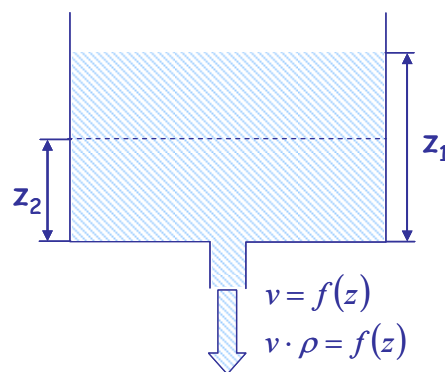
Budući da je razina kapljevine u spremniku konstantna ($z = const.$) slijedi da je i brzina istjecanja konstantna ($v = const.$), odnosno i količina gibanja vode konstantna ($v \cdot \rho = const.$).

Diferenciranjem po vremenu slijedi da je:

$$\frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{uz } \rho = konst. \text{ vrijedi} \quad \frac{d(v \cdot \rho)}{dt} = 0 \quad (1.4.)$$

što znači da je proces stacionaran.

Nestacionaran proces



Slika 1.5. Nestacionarno istjecanje vode iz spremnika

S obzirom da se kapljevina ne dovodi, razina kapljevine u spremniku mijenja se s vremenom (razina se smanjuje a time je i hidrostatski tlak je sve manji).

U početku istjecanja, razina kapljevine u spremniku jednaka je z_1 tako da je i brzina istjecanja jednaka

$$v_1 = \sqrt{2gz_1} \quad (1.5.)$$

Nakon određenog vremena t , razina kapljevine u spremniku se smanjila na z_2 pa je i brzina istjecanja manja:

$$v_2 = \sqrt{2gz_2} \quad (1.6.)$$

Dakle, brzina istjecanja ovisi o razini kapljevine koja opet ovisi o vremenu, tako da je konačno:

$$v = f(t) \quad (1.7.)$$

uz $\rho = konst.$

$$v \cdot \rho = f(t) \quad (1.8.)$$

odnosno

$$\frac{dv}{dt} \neq 0 \quad (1.9.)$$

$$\frac{d(v \cdot \rho)}{dt} \neq 0 \quad (1.10.)$$

što znači da je proces nestacionaran.

Pokretačka sila procesa prijenosa

U tehnološkim procesima uvijek dolazi do neke vrste prijenosa: tvari, toplinske energije ili količine gibanja. Do prijenosa količine gibanja, tvari ili energije dolazi ukoliko postoji pokretačka sila. Tako su odgovarajuće pokretačke sile:

- za protjecanje kapljevine kroz cijev → razlika tlakova
- za prijenos topline sa toplijeg na hladnije tijelo → razlika temperatura

– za prijenos tvari → razlika koncentracija (striktno: razlika kemijskih potencijala)
 Proces se odvija do postizanja ravnotežnog stanja (do izjednačenja tlakova, temperatura ili koncentracija) odnosno kada više ne postoji pokretačka sila.

Gustoća toka (fluks)

U industrijskoj praksi, odnosno za sam proces, od najveće je važnosti brzina procesa koja se u kemijskom inženjerstvu izražava po jedinici površine i naziva se **fluks** (gustoća toka), ϕ .

Razlikuju se:

- fluks količine gibanja (gustoća toka količine gibanja)
- fluks količine topline (gustoća toka topline)
- fluks količine tvari (gustoća toka tvari)

Opća definicija gustoće toka je:

$$\phi = \frac{X}{A \cdot t} \quad (1.11.)$$

Pri čemu je X =količina gibanja, tvari ili topline.

Ako se produkt $\dot{V} \cdot X_V$ koji je sastavni dio zakona očuvanja, izrazi po jedinici površine, dobiva se **gustoća toka**.

$$\frac{\dot{V} \cdot X_V}{A} = \frac{\frac{V}{t} \cdot \frac{X}{V}}{A} = \frac{X}{A \cdot t} \quad (1.12.)$$

Analitički izrazi za procjenu gustoće toka temelje se na *Ohmovom zakonu* za jakost struje, međutim pri proučavanjima je potrebno uzeti u obzir i mehanizme prijenosa količine gibanja, topline i tvari.

$$I = \frac{U}{R} \quad (1.13.)$$

Ovdje je: U – napon (pokretačka sila)
 R – električni otpor

U tehnološkim (jedinичnim) operacijama ova se modelna jednadžba zbog neidealnosti fizičkih pojava ispravlja uvođenjem koeficijenta proporcionalnosti pa je oblik jednadžbe za gustoću toka:

$$\phi = \kappa \cdot \frac{\Delta}{y} \quad (1.14.)$$

gdje su:

- Δ – pokretačka sila (razlika temperatura, koncentracija ili tlakova)
- y – otpor koji se definira kao udaljenost točaka u prostoru između kojih se odvija prijenos
- κ – koeficijent prijenosa (koeficijent proporcionalnosti) koji predstavlja fizička svojstva tvari, a bitno ovisi o *mehanizmu prijenosa*. Često se određuje eksperimentalno.

1.2. MEHANIZMI PRIJENOSA

Pri proučavanju fenomena prijenosa promatra se fluid u gibanju (rjeđe u mirovanju), a brzina prijenosa energije, tvari ili količine gibanja kod fluida u gibanju ovisi o prirodi gibanja fluida (slojevito ili vrtložno gibanje). Tako postoje dva osnovna mehanizma prijenosa: molekularni i vrtložni.

1. Molekularni mehanizam prijenosa.

Odvija se kod slojevitog gibanja fluida kada nema miješanja između slojeva, a gibanje se odvija kod malih brzina. takav prijenos često se naziva statistički prijenos, budući da je uzrokovan slučajnim *Brownovim* gibanjem molekula.

2. Vrtložni mehanizam prijenosa.

Takav mehanizam prijenosa količine gibanja, tvari i energije češći je, a odvija se kod većih brzina kretanjem grupa molekula što je prouzrokovano vanjskom silom (npr. miješanje; velika razlika tlakova koja uzrokuje pokretanje fluida velikim brzinama pa dolazi do vrtloženja). Kod vrtložnog je mehanizma vrijednost gustoće toka mnogo veća jer su ili pokretačka sila ili koeficijent prijenosa ili obje vrijednosti mnogo veće.

Osnovni konceptijski pristup u procesima prijenosa tvari i energije temelji se na analognim pojavama koje se matematički opisuju u principu uvijek u obliku jednadžbe 1.14.:

$$\phi = \kappa \cdot \frac{\Delta}{y}$$

uz određene modifikacije ovisno o hidrodinamičkim uvjetima i geometrijskim karakteristikama sustava.

U ovom dijelu teksta bit će predočeno kako se ta temeljna jednadžba izražava kod molekularnog i vrtložnog mehanizma prijenosa količine gibanja, prijenosa toplinske energije i prijenosa tvari. Međutim, naravno da to studentima s postojećom razinom znanja neće biti jasno sve dok ne prouče i nauče cijelo građivo kolegija Prijenos tvari i energije. Uvidjet će da se na kraju uvijek dobiva slična (u principu ista) zakonitost, a što će biti prikazano i u zadnjem poglavlju u kojem se govori o analogiji prijenosa količine gibanja, prijenosa toplinske energije i prijenosa tvari.

1.2.1. Molekularni mehanizam prijenosa

Vrijednosti gustoće toka kod molekularnog mehanizma prijenosa mogu se općenito izraziti pomoću jednadžbe (1.14.). Ovisno o procesu prijenosa koji se promatra definiraju se koeficijenti prijenosa koji ovise o prirodi tvari:

- prijenos količine gibanja: kinematička difuzivnost, ν
- prijenos količine topline: temperaturna difuzivnost, a
- prijenos količine tvari: difuzivnost tvari, D

Odgovarajuće pokretačke sile izražene po jedinici volumena procesnog prostora su:

– razlika količine gibanja $\Delta(v \cdot \rho) = \Delta\left(\frac{m \cdot v}{V}\right) = X_V \quad [\text{kg m}^{-2} \text{ s}^{-1}] \quad (1.15.)$

– razlika sadržaja topline $\Delta(\rho \cdot c_p \cdot T) = \Delta\left(\frac{m \cdot c_p \cdot T}{V}\right) = X_V \quad [\text{J m}^{-3}] \quad (1.16.)$

– razlika masene koncentracije $\Delta\gamma = \Delta\left(\frac{m}{V}\right) = X_V \quad [\text{kg m}^{-3}] \quad (1.17.)$

Otpor: udaljenost točaka između kojih se odvija prijenos.

Gustoća toka količine gibanja

Prema *Newtonovom* zakonu:

$$\tau = -\nu \cdot \frac{d(v \cdot \rho)}{dy} \quad (1.18.)$$

Ovdje su:

τ - smično naprezanje, odnosno sila po jedinici površine, N m^{-2} (Pa)

ν - kinematička viskoznost, $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$

y - udaljenost, m

$v \cdot \rho = \frac{m \cdot v}{V}$ - količina gibanja po jedinici volumena, $\text{kgm}^{-2} \text{s}^{-1}$

Može se pokazati sljedeće:

Razlika količine gibanja zapravo predstavlja gustoću toka razlike tlakova.

$$F \cdot t = m \cdot v$$

Dijeljenjem jednadžbe sa površinom, dobiva se:

$$\frac{F}{A} \cdot t = \frac{m \cdot v}{A} \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{A} = p = \frac{m \cdot v}{A \cdot t} = \phi$$

Gustoća toka količine energije (topline)

Prema *Fourierovom* zakonu:

$$q = -\lambda \cdot \frac{dT}{dy} \quad (1.19.)$$

Budući da se koeficijent toplinske vodljivosti može izraziti na sljedeći način:

$$\lambda = a \cdot \rho \cdot c_p \quad (1.20.)$$

jednadžba (1.19.) poprima sljedeći oblik:

$$q = -a \cdot \frac{d(\rho \cdot c_p \cdot T)}{dy} \quad (1.21.)$$

Ovdje su:

q	- gustoća toplinskog toka, Wm^{-2}
a	- koeficijent temperaturne vodljivosti, m^2s^{-1}
c_p	- specifični toplinski kapacitet, $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$
$\rho \cdot c_p \cdot T$	- sadržaj topline po jedinici volumena, $\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$

Gustoća toka količine tvari

Prema *Fickovom* zakonu:

$$n = -D \cdot \frac{d\gamma}{dy} \quad (1.22.)$$

Ovdje su:

n	- gustoća toka tvari, $\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$
D	- koeficijent difuzije, m^2s^{-1}
γ	- masena koncentracija, kgm^{-3}

U jednadžbama (1.18.), (1.19.), (1.21.) i (1.22.) predznak (-) znači da se prijenos odvija u smjeru smanjenja količine gibanja, temperature ili koncentracije.

1.2.2. Vrtložni mehanizam prijenosa

Pri višim brzinama strujanja fluida, gibanje grupa molekula uzrokovano je vanjskom silom (miješanje, velika razlika tlakova) te dolazi do miješanja (vrtloženja). Gustoća toka mnogo je veća od gustoće toka pri nižim brzinama strujanja fluida, odnosno kod molekularnog mehanizma prijenosa.

Gustoća toka se kod vrtložnog mehanizma prijenosa može izraziti korištenjem jednadžbe (1.14.) kao i kod molekularnog mehanizma prijenosa, međutim koeficijenti prijenosa ovise ne samo o prirodi tvari već dolazi do izražaja i utjecaj okoline, geometrije sustava i brzine strujanja. Kao posljedica utjecaja navedenih parametara javlja se *otpor* te se koeficijent prijenosa može izraziti u sljedećem obliku:

$$\phi = \frac{\kappa}{y} \cdot \Delta = \kappa' \cdot \Delta$$

Koeficijenti prijenosa mogu se odrediti samo empirijski. U nekim slučajevima kada se ne mogu egzaktno odrediti određene zakonitosti u kojima se pojavljuju teško određivi koeficijenti, primjenjuje se tzv. **dimenzijska analiza**.

Gustoća toka količine gibanja

$$\tau = f \cdot \frac{v^2 \cdot \rho - v_s^2 \cdot \rho}{2} = f \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \quad (1.23.)$$

Ovdje su:

- $\frac{v^2 \cdot \rho}{2}$ - dinamički tlak (kinetička energija fluida izražena po jedinici volumena)
 f - koeficijent proporcionalnosti (trenja)
 v - brzina gibanja, ms^{-1}
 v_s - brzina gibanja fluida uz stjenku (uz uvjet da nema pojave klizanja $v_s = 0$), ms^{-1}

Gustoća toka količine topline

$$q = \alpha \cdot (T - T_s) \quad (1.24.)$$

Ovdje su:

- α - koeficijent prijelaza topline, $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$
 T - temperatura, K
 T_s - temperatura stjenke, K

Gustoća toka količine tvari

$$\dot{m}_A = k \cdot (\gamma - \gamma_s) \quad (1.25.)$$

ili

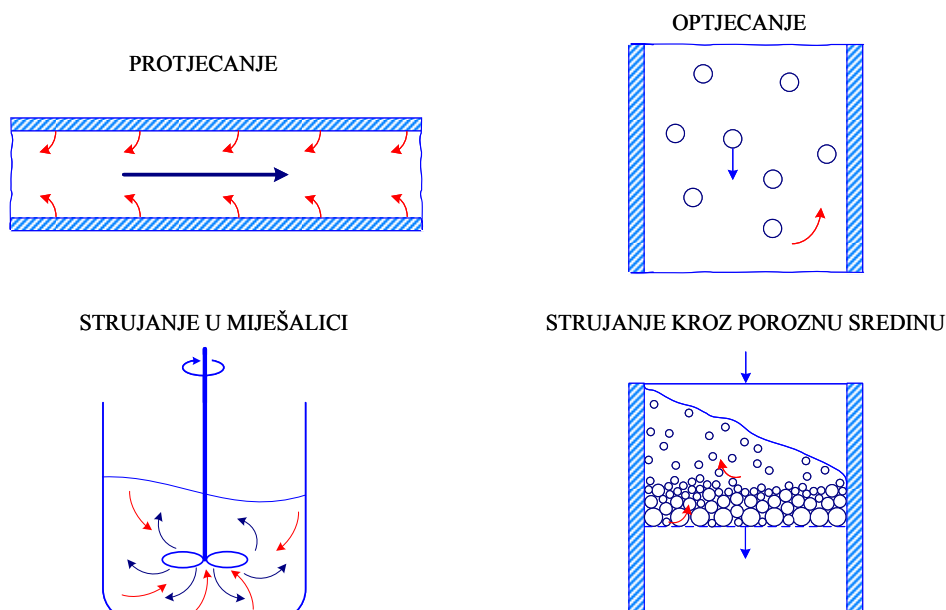
$$\dot{n}_A = k \cdot (c - c_s) \quad (1.26.)$$

Ovdje su:

- k - koeficijent prijenosa tvari, ms^{-1}
 γ - masena koncentracija, kgm^{-3}
 γ_s - masena koncentracija uz stjenku, kgm^{-3}
 c - molna koncentracija mol m^{-3}
 c_s - molna koncentracija uz stjenku mol m^{-3}

2. PRIJENOS KOLIČINE GIBANJA

U dijelu kolegija u kojem se govori o prijenosu količine gibanja uobičajeno je razmatrati četiri karakteristična slučaja koji su prikazani na slici 2.1. Osobitost svakog procesa je da se pokretačkoj sili F_i suprotstavlja sila otpora F_D ili F_R .



Slika 2.1. Karakteristični slučajevi pri proučavanju prijenosa količine gibanja

F_D

Veliki fizičar Isaac NEWTON (1642.–1727.) ukazao je na činjenicu da se silama akcije (F_i) (djelovanja, poželjnoga gibanja) opiru sile reakcije (sile otpora). U mehaničkim jediničnim operacijama (mehaničkim separacijskim procesima) to izgleda ovako:

- Fluid protječe kroz cijev ili uređaj pod djelovanjem razlika tlakova. Međutim, u tom se kretanju fluid taje o stijenke cijevi (uređaja), a trenje postoji i unutar samoga fluida (o čemu će biti govora kasnije). To je trenje uzročnik otpora protjecanju.
- Optjecanje ili taloženje čestica u suspenziji djelovanjem sile teže događa se to brže što je otpor taloženju manji. Međutim, ako je sredina u kojoj se događa taloženje gušća i viskozija, ono je polaganije. Opet se vidi da se otpor (ovaj put predstavljen osobitostima tekućine u kojoj se događa taloženje) suprotstavlja silama koje uzrokuju taloženje čestica.
- Pri miješanju potrebno je miješalo okretati u nekom mediju (suspenziji, emulziji) određenom snagom da bi se tvar po želji izmiješala. Sama tvar pruža otpor koji je veći što je medij u posudi gušći i što je miješanje brže. Da bi se uspješno miješalo, potrebno je svladati taj otpor.
- Pri strujanju kroz sloj čestica npr. filtraciji, čista se tekućina probija kroz porozno platno (filar) i sloj taloga na filtru. Filtar i talog stvaraju otpor kretanju.

2.1. Fizikalne osnove

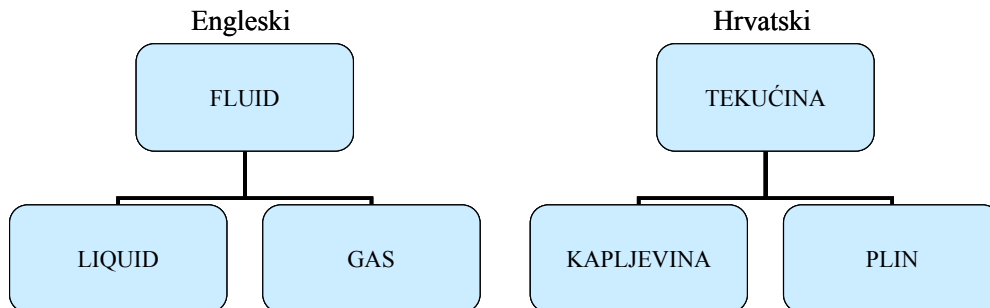
U kolegiju se uglavnom razmatraju ponašanja tekućina odnosno fluida u gibanju.

Fluid je tvar koja se pod djelovanjem smičnog naprezanja, ma kako malenoga, neprekidno deformira. *Smično naprezanje* je tangencijalna komponenta površinske sile podijeljena s mjernim brojem površine. *Neprekidna deformacija* o kojoj se govori u definiciji fluida, ireverzibilna je pojava i naziva se *strujanje fluida*. Za razliku od fluida, *čvrsto (elastično) tijelo* se nakon deformiranja pod djelovanjem smičnog naprezanja (do određene granice), nakon prestanka djelovanja smičnog naprezanja vraća u prvobitni oblik. Djelovanjem smičnog naprezanja fluid u stanju mirovanja ponaša se kao i čvrsto tijelo i svakoj promjeni tlaka odgovara promjena volumena fluida. Razlika je u kvantitativnom odnosu tih promjena, a prema veličini tih promjena fluidi se mogu svrstati u dvije

grupe:

- kapljeviti fluidi ili kapljevine
- plinoviti fluidi ili plinovi

Potrebno je razlikovati nazivlje. Naziv *fluid* latinskog je porijekla. Engleski fluid predstavlja sinonim za hrvatski pojam tekućina. Radi preglednosti prikazuje se podjela fluida (tekućina) na slici 2.2.



Slika 2.2. Uz pojašnjenje nazivlja

Osnovne karakteristike kapljevine: promjenom tlaka neznatno mijenjaju volumen pa se smatraju nestlačivima. Smještene u posudu koju djelomično ispunjavaju, oblikuju slobodnu površinu na granici s okolišnom atmosferom.

Osnovne karakteristike plinova: stlačivi su. S povećanjem tlaka smanjuje im se volumen. Smanjenjem tlaka šire se neograničeno te u zatvorenim posudama ispunjavaju čitav njihov volumen.

Pri proučavanju procesa prijenosa količine gibanja, topline i tvari promatra se vanjsko ponašanje fluida, ne ulazeći u fizikalnu strukturu materije. S tog stanovišta fluid se promatra kao *neprekidna sredina* ili *kontinuum*, koji zadržava neprekidnost fizikalnih svojstava prelazeći u infinitenzimalne volumene.

Kriterij za definiranje ponaša li se neka sredina kao kontinuum je *Knudsenov broj*:

$$Kn = \frac{\bar{\ell}}{L} \quad (2.1.)$$

gdje je:

$\bar{\ell}$ - srednji slobodni put gibanja molekula

L - karakteristična geometrijska dimenzija sustava koji se promatra.

Ako je $Kn \leq 0,01$ plin se ponaša kao neprekidna sredina, odnosno kontinuum. Kapljevine se uvijek smatraju neprekidnom sredinom, jer ih je nemoguće toliko razrijediti da hipoteza kontinuumu nije primjenjiva.

2.2. Fizikalna svojstva fluida

GUSTOĆA se općenito definira:

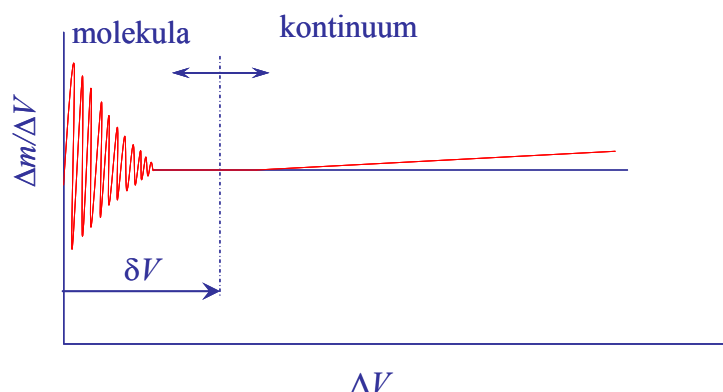
$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow \delta V} \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (2.2.)$$

Gdje su:

Δm - masa sadržana u volumenu, ΔV

δV - najmanji volumen koji okružuje točku

Tijekom strujanja (posebice plinova) gustoća se može mijenjati od točke do točke.



Slika 2.3. Gustoća u točki

Budući da je kod nestlačivih fluida gustoća konstantna, vrijedi:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.3.)$$

U praksi se koristi i relativna gustoća koja predstavlja omjer između gustoće nekog fluida i gustoće standardnog fluida:

$$d = \frac{\rho}{\rho_o} \quad (2.4.)$$

Tablica 2.1. Gustoće referentnih (standardnih) fluida

Fluid	$\rho_0, \text{kg m}^{-3}$
Za plinove (zrak)	
- (0°C, 101325 Pa)	1,292
- (20°C, 101325 Pa)	1,204
Za kapljevine – voda	
- (4°C, 101325 Pa)	999,972

VISKOZNOST se definira kao svojstvo otpornosti fluida prema smičnoj deformaciji. Recipročno svojstvo viskoznosti fluida naziva se *fluidnost*.

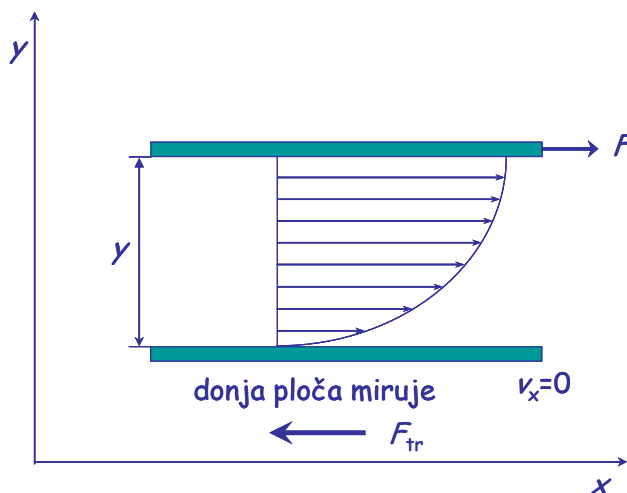
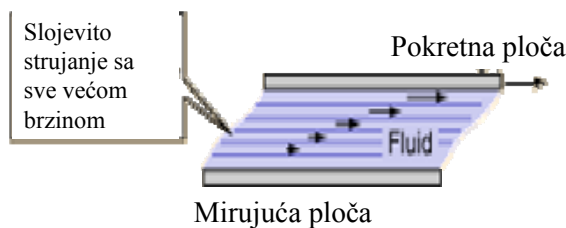
Za objašnjenje svojstva viskoznosti promatra se gibanje kapljevine između dvije paralelne čvrste ploče (slika 2.4.). Ploče su ravne i dovoljno velike da se učinci rubova mogu zanemariti. Donja ploča miruje dok se gornja ploča, pod djelovanjem sile inercije F giba brzinom v . Zbog svojstva viskoznosti dolazi do trenja između čestica fluida i čvrste površine te ta čvrsta površina povlači za sobom prvi zamišljeni sloj, taj sloj povlači za sobom drugi, itd. Donja ploča miruje, a zbog djelovanja sile trenja (F_{tr}) u suprotnom smjeru nastoji zadržati fluid u stanju mirovanja. Zbog toga između te dvije ploče postoji kontinuirani niz zamišljenih slojeva čije se brzine kreću u intervalu između vrijednosti brzine gornje i donje ploče, uz uvjet da nema pojave klizanja između prvog zamišljenog sloja fluida i površine ploče. Sila inercije potrebna da se gornja ploča giba brzinom v_x je:

$$F = \eta \cdot S \cdot \frac{dv}{dy} \quad (2.5.)$$

dok je sila trenja:

$$F_{tr} = -\eta \cdot S \cdot \frac{dv}{dy} \quad (2.6.)$$

pri čemu je S površina ploče koja je u dodiru s fluidom.



Slika 2.4. Newtonov zakon viskoznosti; vektorski prikaz raspodjela brzina pri gibanju fluida između dvije ravne ploče

Newtonov zakon

Sila F proporcionalna je površini koja je u dodiru s fluidom, gradijentu brzine i koeficijentu proporcionalnosti.

Pri malim brzinama i vrlo malim udaljenostima ploča, umjesto dv/dy u jednadžbi (2.5.) može se pisati v/y pa jednadžba poprima sljedeći oblik:

$$F = \eta \cdot S \cdot \frac{v}{y} \tag{2.7.}$$

gdje je η dinamička viskoznost, a brzina se linearno mijenja sa promjenom udaljenosti ploča. Dinamička viskoznost ima jedinicu (Pa s), međutim često se još koriste tablice u kojima su jedinice za viskoznost *Poise* (P) ili *Stokes* (St):

$$1 \text{ P} = 0,1 \text{ Pa s}$$

$$1 \text{ St} = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Viskoznost fluida se izražava i kinematičkom viskoznošću, pri čemu je veza između dinamičke i kinematičke viskoznosti dana sljedećim izrazom:

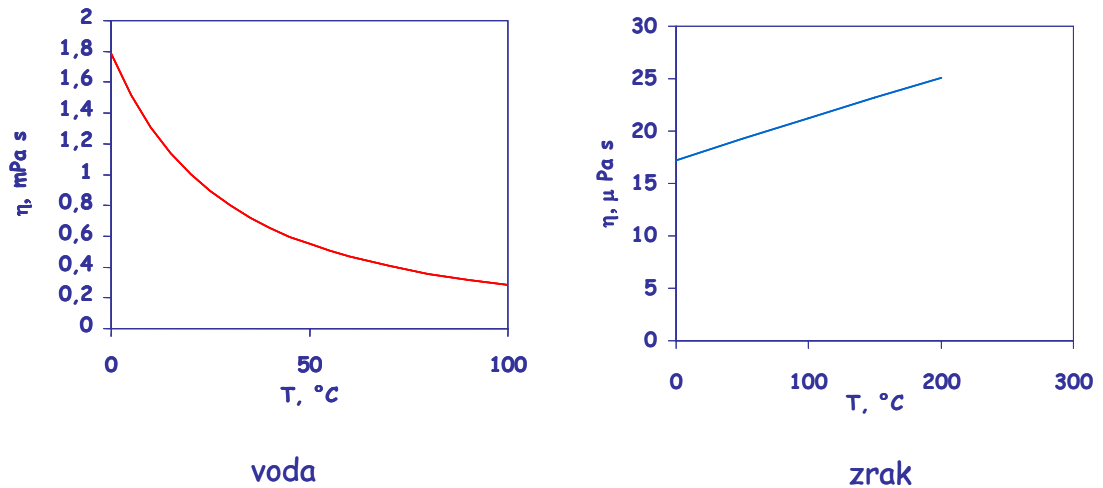
$$\eta = \nu \cdot \rho \tag{2.8.}$$

Na viskoznost utječu temperatura, sastav (koncentracija) i tlak. S povišenjem temperature bitno se smanjuje viskoznost kapljevine, dok kod plinova ona raste (slika 2.5.).

Iz Newtonovog zakona viskoznosti (jednadžba 15) moguće je izraziti smično naprezanje kao omjer sile trenja i površine:

$$\tau = \frac{F_{tr.}}{S} = -\eta \cdot \frac{dv}{dy} \tag{2.9.}$$

$$\tau = \frac{F}{S} = \eta \cdot \frac{dv}{dy} \tag{2.10.}$$



Slika 2.5. Utjecaj temperature na viskoznost

Predznak (+) ili (-) ovisi o tome promatra li se sila koja uzrokuje gibanje ili sila trenja. Uvrštavanjem izraza za dinamičku viskoznost (jednadžba 2.8.) u jednadžbu (2.10.) dobiva se:

$$\tau = -v \cdot \frac{d(v\rho)}{dy} \quad (2.11.)$$

Produkt $(v \cdot \rho)$ predstavlja količinu gibanja izraženu po jedinici volumena $((m/V) \cdot v)$, tako da izraz (2.11.) predstavlja gustoću toka količine gibanja. Navedeni izraz u potpunosti odgovara općem izrazu za gustoću toka (jednadžba 1.14.):

$$\Phi = \kappa \cdot \frac{\Delta}{y}$$

gdje je - kinematička viskoznost predstavlja koeficijent prijenosa, $\kappa = v$
 - pokretačka sila je, $\Delta = d(v \cdot \rho)$
 - udaljenost između ploča je otpor $y = dy$

Fluidi kod kojih smično naprezanje linearno ovisi o gradijentu brzine nazivaju se **Newtonovski fluidi** (voda, zrak, ulje itd.). Ovisnost smičnog naprezanja o smičnoj brzini obično se za različite tipove fluida prikazuje tzv. **reološkim dijagramom** (slika 2.6.).

1. *Elastična krutina* napregnuta je proporcionalno veličini deformacije (proporcionalna sili) i ne ovisi o brzini deformacije.
2. *Idealni fluid* je neviskozni fluid kod kojeg ne dolazi do promjene smičnog naprezanja povećanjem smične brzine.
3. *Newtonovski fluidi* ponašaju se u skladu s Newtonovim zakonom viskoznosti:

$$\tau = \eta \cdot \frac{dv}{dy} = \eta \cdot \dot{\gamma}$$

4. *Nonnewtonovski fluidi* ne ponašaju se u skladu s Newtonovim zakonom viskoznosti.
 - **Binghamovi fluidi** ne ispunjavaju uvjet fluida jer je potrebno određeno početno naprezanje prije nego tangencijalno (smično) naprezanje postane funkcija brzine deformacije (smične brzine). Dakle, to su plastične tvari koje se počinju ponašati kao fluidi tek nakon što je premašena određena vrijednost tangencijalnog naprezanja. To su npr. masti za podmazivanje, mulj otpadnih voda, glinene suspenzije, itd. Ponašanje takvih fluida može se opisati sljedećim modelom:

$$\tau = \tau_0 + \eta_p \cdot \frac{dv}{dy} \quad (2.12.)$$

gdje je τ_0 granica tečenja (popuštanja), a η_p plastična viskoznost.

- Ostwald de Walleovi fluidi mogu se opisati potencijalnim modelom:

$$\tau = K \cdot \left(\frac{dv}{dy} \right)^n \quad (2.13.)$$

gdje je K indeks konzistencije, a n indeks ponašanja toka.

Kod tih se fluida viskoznost mijenja promjenom smične brzine pa se stoga definira prividna viskoznost

$$\eta_a = K \cdot \left(\frac{dv}{dy} \right)^{n-1} \quad (2.14.)$$

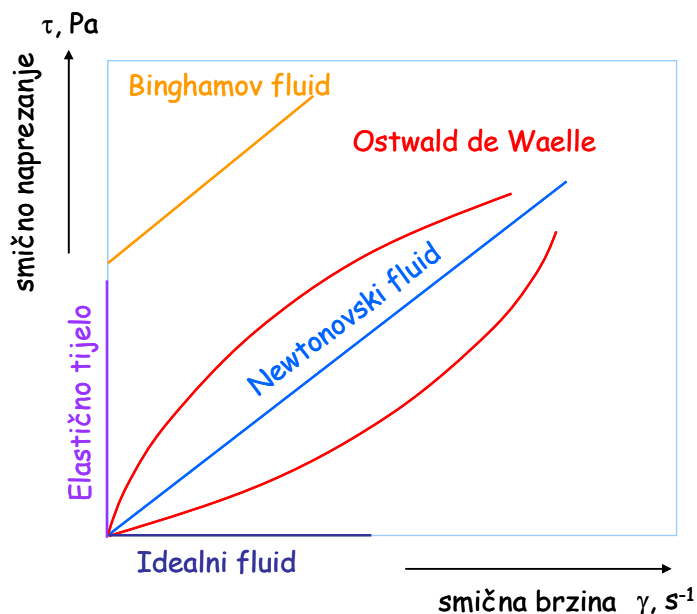
Ovisno o indeksu ponašanja toka, n , razlikuju se:

Pseudoplastični fluidi $n < 1$, viskoznost se smanjuje povećanjem smične brzine.

Dilatantni fluidi $n > 1$ viskoznost se povisuje povećanjem smične brzine.

Pseudoplastični fluidi (emulzije, smole) imaju promjenjiv tok tangencijalnog napreznja ovisno o brzini deformacije. Tek se pri većim brzinama deformacije tok stabilizira.

Najčešći primjer dilatantnih fluida su uljene boje i tiskarsko crnilo.



Slika 2.6. Reološki dijagram

2.3. Zakoni očuvanja pri gibanju fluida

Proučavanje pojava pri prijenosu količine gibanja temelji se na zakonima očuvanja mase, količine gibanja i mehaničke energije, koji proizlaze iz općeg zakona očuvanja (Poglavlje 1.1.).

2.3.1. Zakon očuvanja mase

Masa tvari u zatvorenom sustavu ne mijenja se s vremenom.

Na primjer tijekom kemijske reakcije ukupna masa svih reaktanata mora biti jednaka ukupnoj masi svih produkata.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Brzina} \\ \text{akumulacije} \\ \text{mase u} \\ \text{procesnom} \\ \text{prostoru} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Maseni} \\ \text{protok na} \\ \text{ulazu u} \\ \text{procesni} \\ \text{prostor} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Maseni} \\ \text{protok na} \\ \text{izlazu iz} \\ \text{procesnog} \\ \text{prostora} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Nastajanje} \\ \text{ili nestajanje} \\ \text{mase u} \\ \text{procesnom} \\ \text{prostoru} \end{array} \right\} = 0$$

Promatra se neki sustav, npr. određeni dio cijevi definiranog volumena, koji predstavlja procesni prostor (slika 2.7.). Prema općem zakonu očuvanja vrijedi:

$$\text{AKUMULACIJA} = \text{ULAZ} - \text{IZLAZ} + \text{GENERACIJA}$$

odnosno

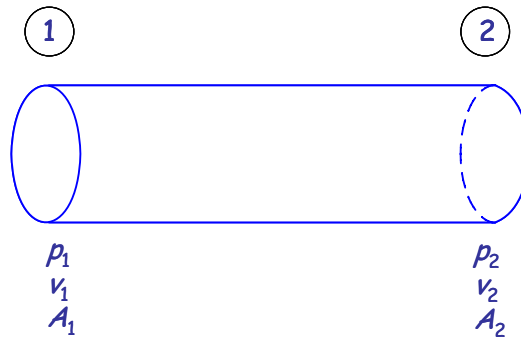
$$V \cdot \frac{dX_V}{dt} = \dot{V}_{ul.} \cdot X_{V, ul.} - \dot{V}_{izl.} \cdot X_{V, izl.} + V_r \quad (2.15.)$$

Količina X_V predstavlja masu jediničnog volumena (gustoća):

$$X_V = \frac{m}{V} = \rho \quad (2.16.)$$

Uvrštenjem jednadžbe (2.16.) u opći zakon očuvanja dobiva se:

$$V \cdot \frac{d\rho}{dt} = \dot{V}_{ul.} \cdot \rho_{ul.} - \dot{V}_{izl.} \cdot \rho_{izl.} + V_r \quad (2.17.)$$



Slika 2.7. Procesni prostor

Za stacionarne procese vrijedi $d\rho/dt = 0$; nema nastajanja i nestajanja mase, dakle nema generacije ($V_r = 0$), pa iz jednadžbe (2.17.) slijedi:

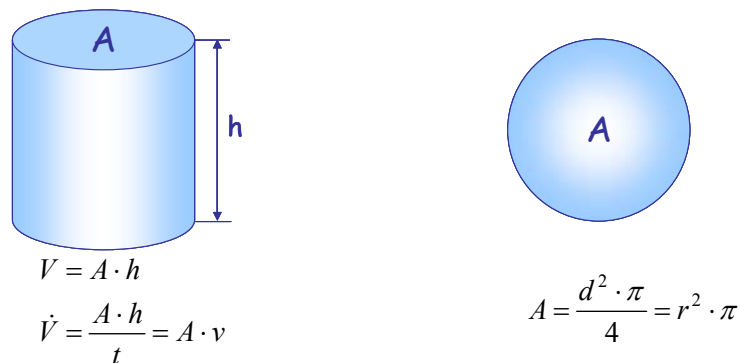
$$\dot{V}_{ul.} \cdot \rho_{ul.} = \dot{V}_{izl.} \cdot \rho_{izl.} \quad (2.18.)$$

$$\dot{m}_{ul.} = \dot{m}_{izl.} \quad (2.19.)$$

Jednadžba (2.19.) vrijedi za sve fluide (kapljevine i plinove).

Promatra li se kapljevine pri izotermnom strujanju ($T_1 = T_2$) njena je gustoća konstantna ($\rho_{ul.} = \rho_{izl.}$)

te iz jednadžbe (2.18.) proizlazi da je i volumni protok konstantan ($\dot{V}_{ul.} = \dot{V}_{izl.}$).



Slika 2.8. Volumni protok kroz cijev kružnog presjeka

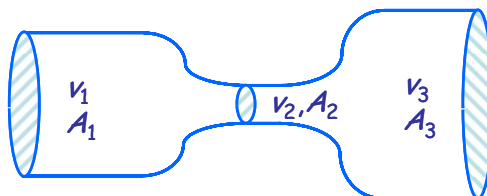
Volumni protok izražava se kao umnožak brzine i poprečnog presjeka cijevi (slika 2.8.):

$$\dot{V} = v_1 \cdot A_1 \quad (2.20.)$$

S obzirom da je volumni protok konstantan, za izotermno strujanje nekompresibilnih fluida vrijedi:

$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 = \dots = v_i \cdot A_i \quad (2.21.)$$

iz čega je vidljivo da su brzine protjecanja obrnuto proporcionalne površinama poprečnog presjeka cijevi (slika 2.9.).



$$v_1 \cdot A_1 = v_2 \cdot A_2 = v_3 \cdot A_3$$

Slika 2.9. Cijev različitih površina poprečnog presjeka

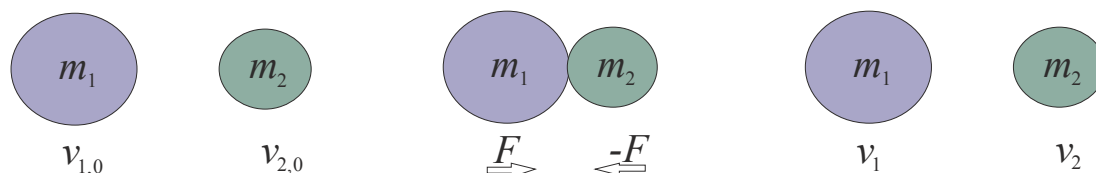
2.3.2. Zakon očuvanja količine gibanja

Ukupna količina gibanja fluida u zatvorenom sustavu se ne mijenja.

Zakon očuvanja količine gibanja može se pojasniti sudarom dvaju tijela koja se gibaju različitim brzinama, pri čemu svako tijelo posjeduje određeni moment gibanja (slika 2.10.). U trenutku sudara tijela djeluju jedno na drugo istom silom ali suprotnog predznaka. Pri tome tijela izmjenjuju određenu količinu gibanja. Izmijenjene su količine gibanja jednake vrijednosti, ali suprotnog smjera, pa je u konačnici ukupna količina gibanja prije sudara jednak količini gibanja nakon sudara.

$$F_1 = -F_2$$

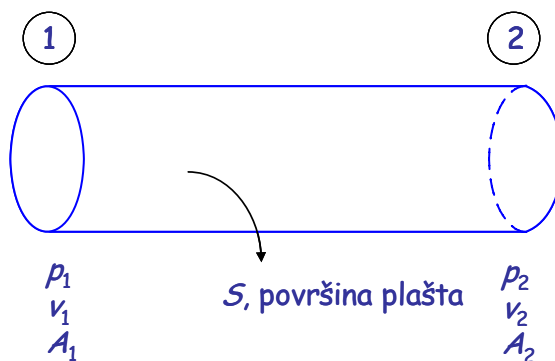
$$m_1 \cdot \Delta v_1 = m_2 \cdot \Delta v_2$$



Slika 2.10. Zakon očuvanja količine gibanja

U kemijskom se inženjerstvu promatra količina gibanja izražena po volumenu procesnog prostora:

$$X_V = \frac{m \cdot v}{V} = \rho \cdot v \quad (2.22.)$$



Slika 2.11. Procesni prostor

Opći zakon očuvanja sada se piše u sljedećem obliku:

$$V \cdot \frac{d(v\rho)}{dt} = \dot{V}_{ul.} \cdot (v\rho)_{ul.} - \dot{V}_{izl.} \cdot (v\rho)_{izl.} + V_r \quad (2.23.)$$

Budući da kod stacionarnih procesa nema promjene količine gibanja s vremenom ($d(v\rho)/dt = 0$) i uz uvjet da nema generacije ($V_r = 0$) iz jednadžbe (2.23.) slijedi:

$$\dot{V}_{ul.} \cdot (v\rho)_{ul.} = \dot{V}_{izl.} \cdot (v\rho)_{izl.} = 0 \quad (2.24.)$$

Može se pokazati da produkt $\dot{V} \cdot (v \cdot \rho)$ predstavlja silu:

$$\dot{V} \cdot (v \cdot \rho) = \frac{V}{t} \cdot \frac{v \cdot m}{V} = \frac{v \cdot m}{t} = F \quad (2.25.)$$

iz čega slijedi da se zakon očuvanja količine gibanja može izraziti na sljedeći način:

$$\sum_{i=0}^N F_i = 0 \quad (2.26.)$$

Karakteristične sile koje se javljaju pri gibanju fluida su sila tlaka koja uzrokuje gibanje i sila trenja:

$$F_{p1} = F_{p2} + F_{tr.} \quad (2.27.)$$

$$p_1 \cdot A_1 = p_2 \cdot A_2 + \tau \cdot S \quad (2.28.)$$

Ako se član $p_2 \cdot A_2$ prebaci na lijevu stranu gornje jednadžbe dobiva se:

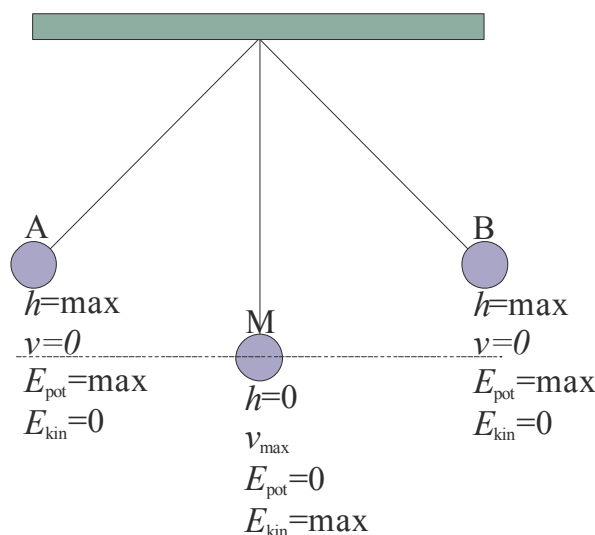
$$\Delta p \cdot A = \tau \cdot S \quad (2.29.)$$

gdje je $(\Delta p \cdot A)$ sila tlaka potrebna za gibanje fluida brzinom v , a $(\tau \cdot S)$ je sila trenja koja je uzrokovala gubitak energije koji je izražen padom tlaka (Δp) .

Dakle, zbog viskoznosti dolazi do prijenosa količine gibanja na nepokretnu površinu i zbog toga dolazi do pada tlačne sile u smjeru gibanja fluida.

2.3.3. Zakon očuvanja energije

Ukupna količina energije zatvorenog sustava ne mijenja se s vremenom.



Slika 2.12. Zakon očuvanja energije pri gibanju obješene kuglice

Zakon očuvanja energije može se objasniti gibanjem obješene kuglice (slika 2.12.). U točki A, $v = 0$, pa je i $E_{kin} = 0$ jer kuglica miruje na visini h . S druge strane, potencijalna energija je maksimalna. Ukupna energija je sada:

$$E_{uk} = E_{kin} + E_{pot} = E_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

Ako se obješena kuglica pusti, brzina će se postepeno povećavati. Istovremeno visina opada s udaljenošću. U točki M brzina je maksimalna a visina $h = 0$, pa je $E_{pot} = 0$. Ukupna je energija:

$$E_{uk} = E_{kin} + E_{pot} = E_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$$

To znači da se potencijalna energija u potpunosti transformirala u kinetičku energiju.

Međutim kuglica se ne zaustavlja u točki M već se dalje kreće prema točki B u kojoj se na kraju i zaustavi. Sada je kao i u točki A $v=0$ i $E_{kin} = 0$, pa je ukupna energija:

$$E_{uk} = E_{kin} + E_{pot} = E_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

Drugim riječima kinetička se energija transformirala u potencijalnu. Dakle, ukupna se energija tijekom gibanja ne mijenja.

Fluid u gibanju posjeduje određenu količinu (sadržaj) energije koja se u skladu sa zakonom očuvanja izražava po jedinici volumena:

$$X_V = E_V = p + \rho \cdot c_p \cdot T + \sum \Delta H_V + \frac{1}{2} v^2 \cdot \rho + \rho \cdot g \cdot z \quad (2.30.)$$

gdje je:

p - tlak, energija koja je ovisna o tlaku fluida, Pa, Jm^{-3}

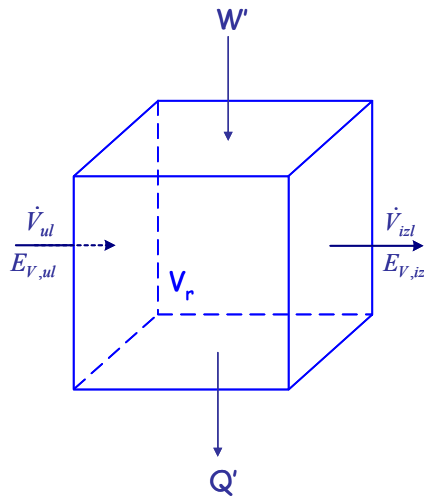
$\rho \cdot c_p \cdot T$ - toplinska energija fluida, Jm^{-3}

$\sum \Delta H_V$ - promjena entalpije vezana uz promjenu agregatnog stanja, Jm^{-3}

$\frac{1}{2} v^2 \cdot \rho$ - kinetička energija fluida, Jm^{-3}

$\rho \cdot g \cdot z$ - potencijalna energija, ovisna o mjestu u prostoru, Jm^{-3}

Primjenom općeg zakona očuvanja ($X_V = E_V$) na kontrolni volumen (slika 2.13.)



Slika 2.13. Procesni prostor

$$V \cdot \frac{dE_V}{dt} = \dot{V}_{ul} \cdot E_{V,ul} - \dot{V}_{izl} \cdot E_{V,izl} + W'_V - Q'_V \quad (2.31.)$$

W'_V - dio dovedenog mehaničkog rada koji se pretvara u toplinu, Jm^{-3}

Q'_V - odvedena toplina, Jm^{-3}

U hidrodinamičkom se sustavu pretpostavlja da je $W'_V = Q'_V$.

Ako su zadovoljene sljedeće pretpostavke:

Stacionaran proces $\frac{dE_V}{dt} = 0$

Zakon očuvanja mase $\dot{V}_{ul} = \dot{V}_{izl}$

Nadalje, kod izoternog strujanja je $T_{ul.} = T_{izl.}$, iz čega slijedi da je $\rho_{ul.} = \rho_{izl.}$, odnosno $(\rho \cdot c_p \cdot T)_{ul.} = (\rho \cdot c_p \cdot T)_{izl.}$.

Nema promjene agregatnog stanja: $\sum \Delta H_V = 0$

jednadžba (2.30.) poprima oblik:

$$E_V = \rho \cdot g \cdot z + p + \frac{v^2 \cdot \rho}{2} + \rho \cdot c_p \cdot T \quad (2.32.)$$

Primjenom zakona očuvanja za **neviskozni (idealni) fluid** vrijedi:

$$E_{V_{ul.}} = E_{V_{izl.}}$$

$$\left(\rho \cdot g \cdot z + p + \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \right)_{ul.} = \left(\rho \cdot g \cdot z + p + \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \right)_{izl.} \quad (2.33.)$$

odnosno:

$$\rho \cdot g \cdot z + p + \frac{v^2 \cdot \rho}{2} = \text{const.} \quad (2.34.)$$

Jednadžba (2.34.) predstavlja jednadžbu očuvanja energije, odnosno **Bernoullijevu jednadžbu** koja vrijedi za neviskozni (idealni) fluid, a koja se može iskazati riječima:

U zatvorenom (izoliranom) hidrauličkom sustavu, zbroj svih vrsta mehaničke energije je stalan.

Pri gibanju **realnog fluida** dolazi do nepovratnog gubitka energije zbog svojstva viskoznosti, a taj gubitak energije je u zakonu očuvanja ugrađen u generacijski član V_r .

Jednadžba (2.33.) se za strujanje realnih (viskoznih) fluida nadopunjava s generacijskim članom:

$$\rho_1 \cdot g \cdot z_1 + p_1 + \frac{v_1^2 \cdot \rho}{2} = \rho_2 \cdot g \cdot z_2 + p_2 + \frac{v_2^2 \cdot \rho}{2} + V_r \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right] \quad (2.35.)$$

gdje je: $V_r = E_{gub} = \rho \cdot g \cdot h_w$, a h_w predstavlja gubitak energije izražen visinom stupca kapljevine.

Dijeljenjem jednadžbe (2.35) s gustoćom dobiva se bilancu za 1 kg mase fluida u gibanju:

$$z_1 \cdot g + \frac{p_1}{\rho} + \frac{v_1^2}{2} = z_2 \cdot g + \frac{p_2}{\rho} + \frac{v_2^2}{2} + h_w \cdot g \quad \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right] \quad (2.36.)$$

Nadalje, jednadžba (2.36.) podijeljena sa g daje hidraulički smisao Bernoullijeve jednadžbe:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{v_1^2}{2 \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{v_2^2}{2 \cdot g} + h_w \quad [\text{m}] \quad (2.37.)$$

Ovaj oblik jednadžbe praktično je koristiti kod kapljevina u kojima su energije pojedinih članova iskazane u obliku visina stupca fluida, odnosno vezane su za težinu (masu) fluida.

U jednadžbi (2.37.):

z - geometrijska visina (geodetska); mjera za potencijalnu energiju položaja, m

$\frac{p}{\rho \cdot g}$ - tlačna visina; mjera za energiju statičkog tlaka, m

$\frac{v^2}{2 \cdot g}$ - brzinska visina; mjera za kinetičku energiju, m

h_w - gubitak energije trenjem; mjera za gubitak energije uslijed otpora, a izražen je padom tlaka pri

$$\text{gibanju } h_w = \frac{p_1 - p_2}{\rho \cdot g} = \frac{\Delta p}{\rho \cdot g}, \text{ m.}$$

Bernoullijev zakon očuvanja energije, gdje su energetske članovi izraženi odgovarajućim visinama, može se ilustrativno prikazati slikom (slika 2.14.).

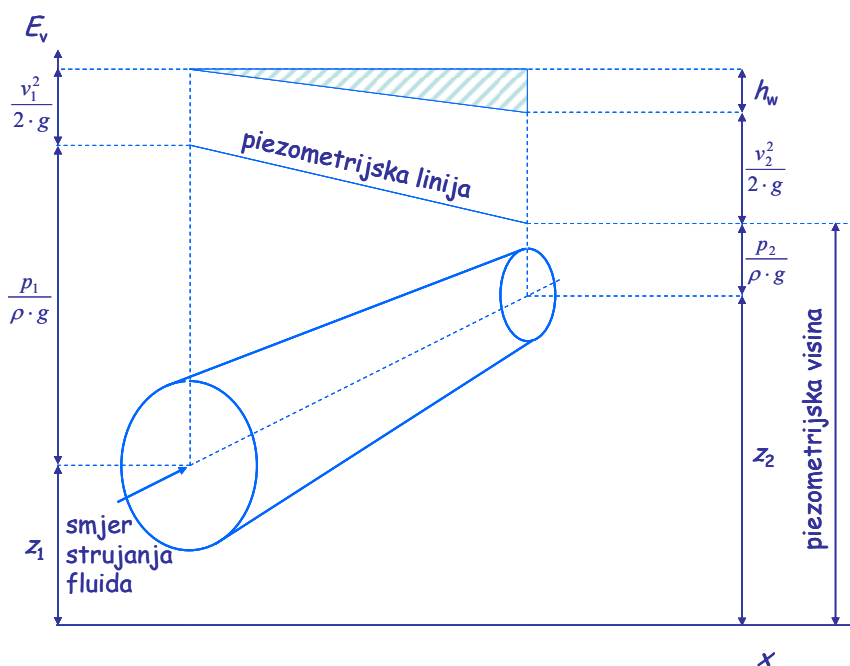
Promatra se strujanje fluida od presjeka **1** do presjeka **2**. Iz slike je vidljivo da je presjek **2** na većoj visini, tako da je potencijalna energija (izražena geodetskom visinom) u položaju **2** veća ($z_2 > z_1$).

Površina poprečnog presjeka cijevi na položaju **1** je manja nego na položaju **2** te iz jednadžbe kontinuiteta slijedi da je brzina u presjeku **2** veća, tako da je i kinetička energija veća ($v_2^2 / (2 \cdot g) > v_1^2 / (2 \cdot g)$).

Zbog svojstva viskoznosti dolazi do nepovratnog gubitka neergije, gubi se tlačna energija u smjeru strujanja te je $p_1 > p_2$, odnosno $p_1 / (\rho \cdot g) > p_2 / (\rho \cdot g)$. Ta razlika tlakova izražava gubitak energije koji je izražen gubitkom visine h_w .

Tlak se može izraziti kao energija po jedinici volumena:

$$E_V = \left[\frac{\text{J}}{\text{m}^3} \right] = \left[\frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{m}^3} \right] = \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] = [\text{Pa}]$$



Slika 2.14. Uz Bernoullijev zakon očuvanja energije

Mjerenje energetskih članova Bernoullijeve jednadžbe

Izražavanje Bernoullijeve jednadžbe u hidrauličkom obliku (jednadžba 2.37.) je pogodan način obzirom da se onda pojedini članovi jednadžbe mogu izmjeriti.

Suma *geodetske visine i tlačne visine* naziva se **piezometrijska visina** (zbroj potencijalne i tlačne energije izražen visinom). Piezometrijska visina mjeri se pomoću **piezometrijske cijevi**. (slika 2.15.).

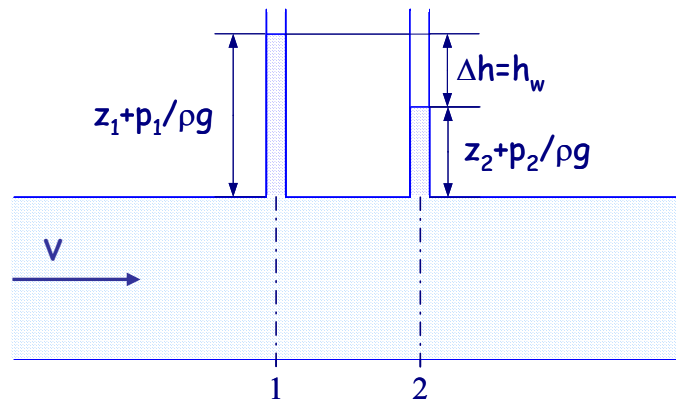
$\Delta h = h_w$ - izražava gubitak energije

Uz pretpostavku da nema dovođenja rada između presjeka 1 i 2; presjeci su isti, $v_1 = v_2$, $A_1 = A_2$, tada je i $z_1 = z_2$ pa se može napisati:

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + h_w \quad (2.38.)$$

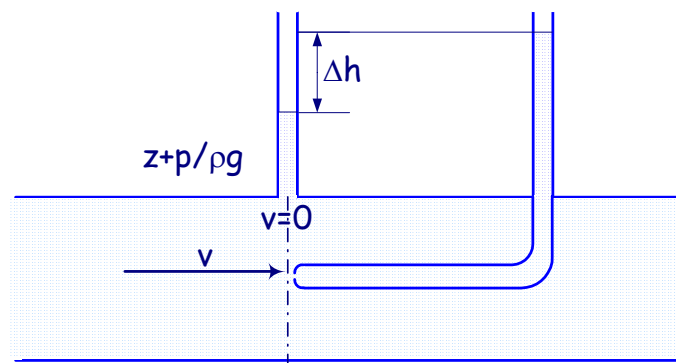
odnosno

$$h_w = \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} \quad (2.39.)$$



Slika 2.15. Mjerenje gubitka energije pomoću piezometrijske cijevi

Pitotova cijev služi za mjerenje kinetičke energije fluida (slika 2.16.).



Slika 2.16. Mjerenje brzine strujanja fluida pomoću Pitotove cijevi

$\Delta h \neq h_w$, Δh izražava kinetičku energiju fluida $v^2 / (2 \cdot g)$.

$$z + \frac{p}{\rho \cdot g} + \Delta h = z + \frac{p}{\rho \cdot g} + \frac{v^2}{2 \cdot g} \quad (2.40.)$$

Budući da se energetske članovi mjere na istom presjeku $z + p / (\rho \cdot g) = \text{konst.}$, odnosno $h_w = 0$, razlika razina manometarske kapljevine (Δh) izražava kinetičku energiju fluida:

$$\Delta h = \frac{v^2}{2 \cdot g} \quad (2.41.)$$

te konačno:

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta h} \quad (2.42.)$$

2.4. Protjecanje

Protjecanje je strujanje fluida kroz cijev, kanal, i općenito strujanje fluida između čvrstih površina različitih geometrijskih karakteristika.

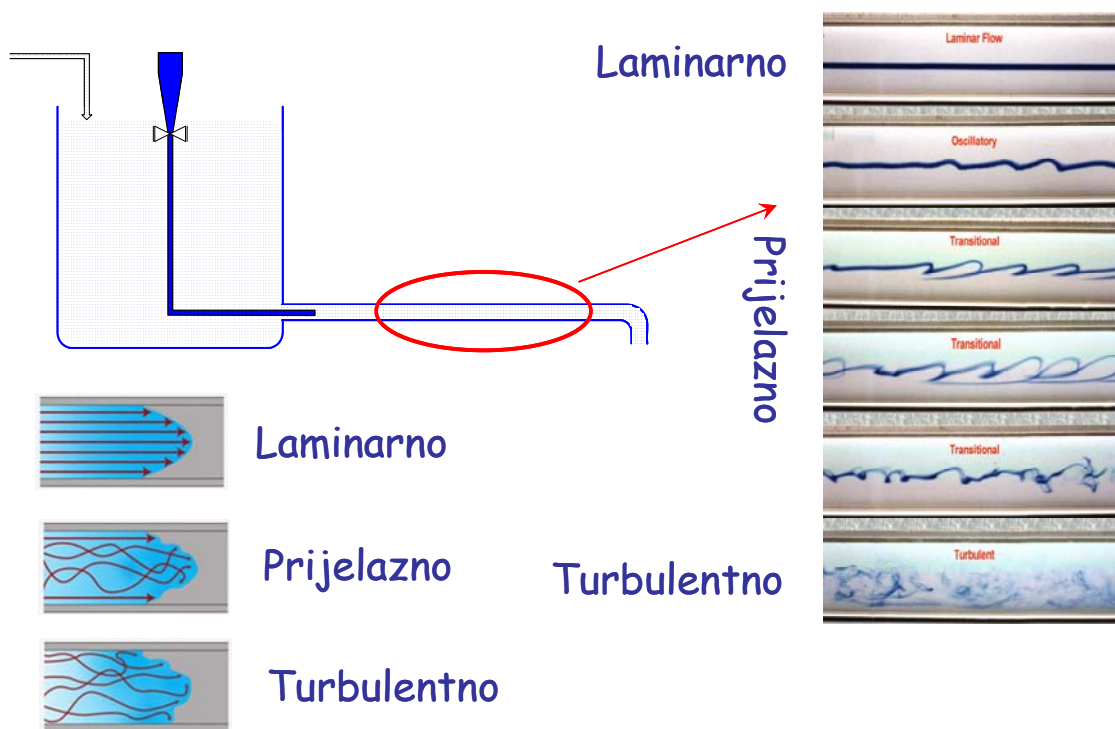
2.4.1. Vrste strujanja

Osborne Reynolds još je koncem prošlog stoljeća istraživao pojave pri strujanju pomoću jednostavnog i praktičnog uređaja (slika 2.17.). Iz spremnika u kojem se održava konstantna razina kapljevine istječe voda u ravnu cijev. Na ulazu u cijev ugrađena je u sredini tanka kapilara kroz koju se pušta tanak mlaz obojene kapljevine.

Kod vrlo malih brzina uočeno je da se obojena kapljevina ne miješa između slojeva, već da struji u sredini toka u obliku niti pa se zaključuje da se čestice fluida gibaju pravocrtno i da nema miješanja između slojeva. To je tzv. **slojevito** ili **laminarno strujanje**.

Povećanjem brzine strujanja dolazi do djelomičnog remećenja slojevitog strujanja te obojena tekućina struji u obliku krivudave linije. Takvo stanje strujanja naziva se **prijelazno područje**.

Kod još većih brzina strujanja, poprečni presjek cijevi je jednolično obojen, što znači da je došlo do potpunog miješanja slojeva, odnosno pojave vrtloženja i to se gibanje naziva **vrtložno** ili **turbulentno strujanje**.



Slika 2.17. Reynoldsov eksperiment

Reynolds je na temelju svojih eksperimenata zaključio da brzina gibanja nije jedini faktor koji utječe na vrstu strujanja, već je potrebno uzeti u obzir još i fizikalna svojstva fluida, gustoću i viskoznost, te promjer cijevi. Kriterij koji uzima u obzir sve te veličine, a na temelju kojeg se definira vrsta strujanja je **Reynoldsova značajka** ili **Reynoldsov broj** koji se definira na sljedeći način:

$$\text{Re} = \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\eta} \quad (2.43.)$$

ili

$$\text{Re} = \frac{v \cdot d}{\nu} \quad (2.44.)$$

Eksperimentalno je utvrđeno da kritična vrijednost **Reynoldsovog broja** koja predstavlja granicu između laminarnog i prijelaznog područja pri strujanju kroz glatku cijev iznosi $Re_{kr} = 2320$. Postoje ekstremni slučajevi, npr. tanka glatka kapilara $Re \approx 50000$, a strujanje je još uvijek laminarno ili npr. izrazito hrapava površina cijevi gdje je i kod $Re < 2320$ strujanje turbulentno.

2.4.2. Laminarno strujanje

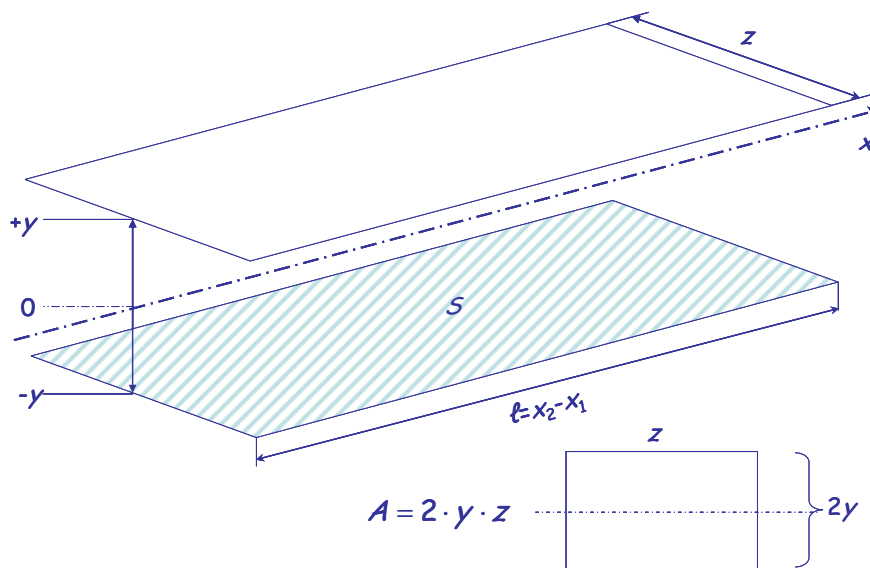
Laminarno strujanje je, kako je navedeno ranije, *slojevito* strujanje, strujnice ne mijenjaju smjer te nema miješanja između slojeva.

Prijenos količine gibanja uzrokovan je isključivo površinskim trenjem. Količina gibanja se čestoprenosi s fluida na nepokretnu površinu molekularnim mehanizmom što ima za posljedicu *gubitak energije* koji se izražava *padom tlaka*.

Kod analize laminarnog gibanja važno je utvrditi koja se količina gibanja prenosi na nepokretnu čvrstu površinu, odnosno utvrditi *gustoću toka* i utvrditi kakva je raspodjela brzina. Raspodjela brzina neće biti ista ako fluid struji između dvije paralelne ploče, između dvije koncentrične cijevi ili kroz okruglu cijev.

2.4.2.1. Raspodjela brzina pri laminarnom stacionarnom strujanju između dvije paralelne ploče

Promatra se strujanje fluida između dvije ravne ploče definiranih dimenzija koje su udaljene za $2 \cdot y$ (slika 2.18.). Fluid struji između ploča u smjeru osi x



Slika 2.18. Laminarno strujanje između dvije paralelne ploče

Prema zakonu očuvanja količine gibanja slijedi da je suma sila koje djeluju u sustavu jednaka nuli:

$$\sum_{i=1}^N F_i = 0$$

$$V \cdot \frac{d(v\rho)}{dt} = \dot{V}_{ul.} \cdot (\rho v_x)_{ul.} - \dot{V}_{izl.} \cdot (\rho v_x)_{izl.} + \sum F_x \quad (2.45.)$$

Karakteristične sile koje djeluju u promatranom sustavu su sila tlaka koja uzrokuje gibanje i sila trenja koja se opire tome (jednadžba 2.29).

$$\Delta p \cdot A = \tau \cdot S$$

Površina A predstavlja površinu poprečnog presjeka između dvije ploče ($A = 2y \cdot z$), a površina S predstavlja površinu koja je u dodiru s fluidom ($S = 2z \cdot \ell$).

$$\Delta p \cdot 2 \cdot y \cdot z = \tau \cdot 2 \cdot z \cdot \ell \quad (2.46.)$$

Dijeljenjem jednadžbe (2.46.) s ($2 \cdot z$) dobiva se:

$$\tau = \frac{\Delta p}{\ell} \cdot y \quad (2.47.)$$

Ako je $y = 0$ iz jednadžbe (2.47.) slijedi da je $\tau = 0$ što znači da je najmanji otpor strujanju u osi, tako da je tu brzina najveća (v_{\max}). Ako je pak $y = d/2$ tada je smično naprezanje maksimalno (τ_{\max}) te je brzina strujanja prvog zamišljenog sloja uz ploču jednaka nuli (pretpostavlja se da nema pojave klizanja).

Odnos između maksimalne i srednje brzine strujanja

Uvrsti li se izraz (2.48.) u Newtonov zakon viskoznosti, dobiva se:

$$-\eta \cdot \frac{dv}{dy} = \frac{p_1 - p_2}{\ell} \cdot y \quad (2.48.)$$

odnosno:

$$\frac{dv_x}{dy} = -\frac{\Delta p}{\ell} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot y \quad (2.49.)$$

Separacijom varijabli i integriranjem slijedi raspodjela brzina (slika 2.19.):

$$\int_0^{v_x} dv_x = -\frac{\Delta p}{\ell} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \int_{\pm \frac{d}{2}}^y y \cdot dy \quad (2.50.)$$

$$v_x = -\frac{\Delta p}{\ell} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \left(\frac{y^2}{2} - \frac{d^2}{8} \right) \quad (2.51.)$$

$$v_x = \frac{\Delta p}{\ell} \cdot \frac{1}{2\eta} \cdot \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right) \quad (2.52.)$$

Pad tlaka po dužini izražava se gradijentom tlaka koji ima negativan predznak, budući da tlak opada s dužinom:

$$\frac{\Delta p}{l} = \frac{p_1 - p_2}{x_1 - x_2} = \frac{p_1 - p_2}{-(x_2 - x_1)} = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \quad (2.53.)$$

te slijedi:

$$v_x = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot \frac{1}{2\eta} \cdot \left(\frac{d^2}{4} - y^2 \right) \quad (2.54.)$$

U osi strujanja $y = 0$ te iz jednadžbe (2.54.) slijedi da je maksimalna brzina:

$$v_x = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot \frac{1}{8\eta} \cdot d^2 \quad (2.55.)$$

Kako je po definiciji protoka:

$$\dot{V} = v_{\text{sr}} \cdot A = v_{\text{sr}} \cdot d \cdot z \quad (2.56.)$$

a diferencijalni protok $v_x \cdot z \cdot dy$, integriranjem diferencijalnog protoka po cijelom poprečnom presjeku dobiva se:

$$v_{sr} \cdot d \cdot z = \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} v_x \cdot z \cdot dy \quad (2.57.)$$

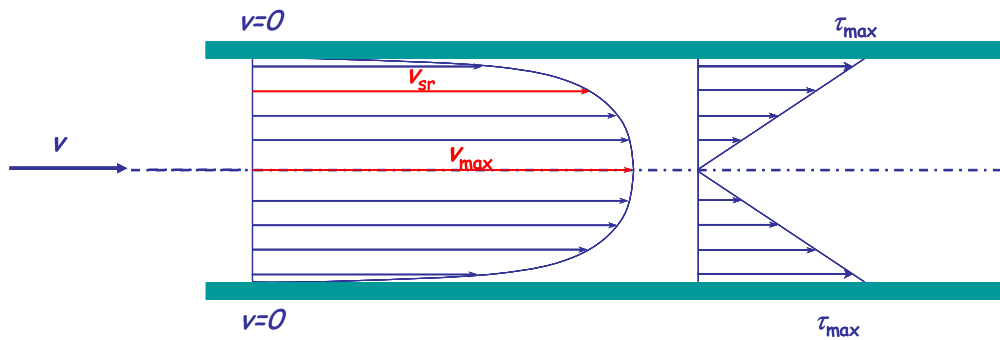
$$v_{sr} \cdot d = \left(-\frac{dp}{dx}\right) \cdot \frac{1}{2\eta} \cdot \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} \left(\frac{d^2}{4} - y^2\right) \cdot dy \quad (2.58.)$$

odnosno izraz za srednju brzinu strujanja:

$$v_{sr} = \left(-\frac{dp}{dx}\right) \cdot \frac{1}{12\eta} \cdot d^2 \quad (2.59.)$$

te slijedi da je odnos između maksimalne i srednje brzine strujanja:

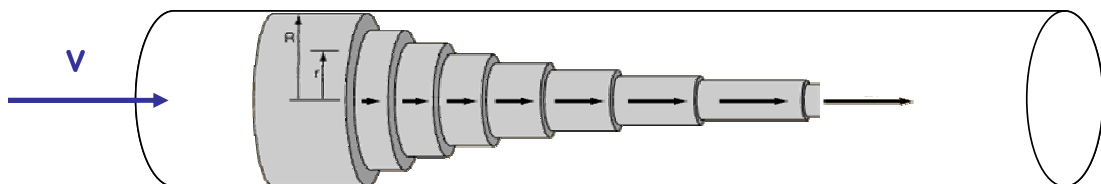
$$\frac{v_{max}}{v_{sr}} = \frac{3}{2} \quad (2.60.)$$



Slika 2.19. Vektorski prikaz raspodjele smičnog naprezanja i brzine strujanja u ovisnosti o udaljenosti od površine ploče

2.4.2.2. Raspodjela brzina pri laminarnom stacionarnom strujanju u horizontalnoj cijevi kružnog presjeka

Strujanje se odvija molekularnim mehanizmom, pri čemu strujnice ne mijenjaju smjer (slika 2.20.). Količina gibanja koja se prenosi na nepokretnu čvrstu površinu uzrokovana je površinskim trenjem, što rezultira gubitkom energije.



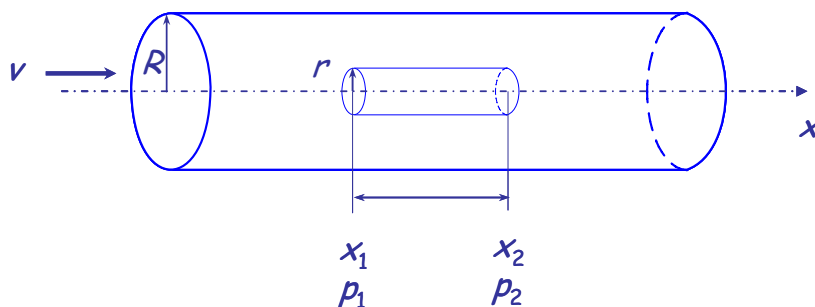
Slika 2.20. Slikovit prikaz laminarnog strujanja u horizontalnoj cijevi kružnog presjeka

Promatra se laminarno strujanje fluida kroz ravnu cijev promjera R u stacionarnim uvjetima.

Za analizu gibanja laminarnog stacionarnog toka polazna je osnova zakon očuvanja količine gibanja.

$$V \cdot \frac{d(v\rho)}{dt} = \dot{V}_{ul.} \cdot (\rho v_x)_{ul.} - \dot{V}_{izl.} \cdot (\rho v_x)_{izl.} + \sum F_x$$

Stacionarno strujanje podrazumijeva $d(v \cdot \rho)/dt = 0$ tako da se član na lijevoj strani jednadžbe gubi.



Slika 2.21. Elementarni volumen fluida pri gibanju kroz horizontalnu cijev kružnog presjeka

Budući da nema generiranja količine gibanja u sustavu ($V_r = 0$), iz zakona očuvanja slijedi da su sve sile koje djeluju u sustavu u ravnoteži, odnosno $\Sigma F_x = 0$.

Postavljanjem bilance karakterističnih sila u sustavu, odnosno izjednačavanjem sile koja uzrokuje gibanje (pokretačka sila) sa silom trenja, dobiva se jednačba 2.29:

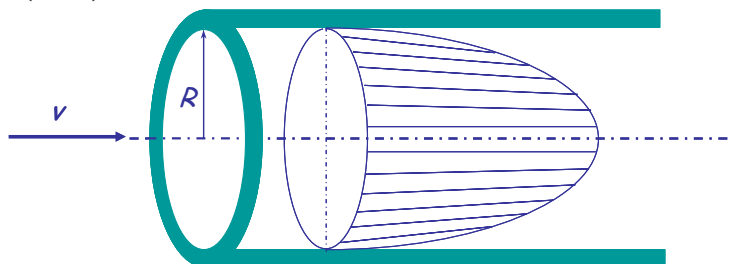
$$\Delta p \cdot A = \tau \cdot S$$

Uvrštenjem površine poprečnog presjeka cijevi, $A = r^2 \cdot \pi$, i površine plašta cijevi, $S = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \Delta x$ u jednačbu 2.29., te obzirom da se ne mijenja površina poprečnog presjeka cijevi $r_1 = r_2 = r$, dobiva se:

$$r^2 \cdot \pi \cdot p_1 - r^2 \cdot \pi \cdot p_2 = \tau \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot (x_1 - x_2) \quad (2.61.)$$

Sređivanjem jednačbe dobiva se za smično naprezanje:

$$\tau = \frac{r}{2} \cdot \frac{p_1 - p_2}{x_1 - x_2} = \frac{r}{2} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \quad (2.62.)$$



Slika 2.22. Prostorni prikaz raspodjele brzina pri laminarnom strujanju kroz cijev kružnog presjeka

Grafični uvjeti:

os cijevi $(r = 0), \tau = 0, v_x = v_{\max}$.

stijenka cijevi $(r = R), \tau = \tau_{\max}, v_x = 0$

Izjednačavanjem Newtonovog zakona viskoznosti ($\tau = -\eta \cdot dv/dy$) s jednačbom (2.62.) dobiva se:

$$-\eta \cdot \frac{dv}{dr} = \frac{r}{2} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \quad (2.63.)$$

Integriranjem jednačbe (2.61.):

$$\int_0^{v_x(r)} dv = -\frac{1}{2\eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot \int_{-R}^r r \cdot dr \quad (2.64.)$$

dobiva se:

$$v_x(r) = -\frac{1}{4\eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot (R^2 - r^2) \quad (2.65.)$$

ili

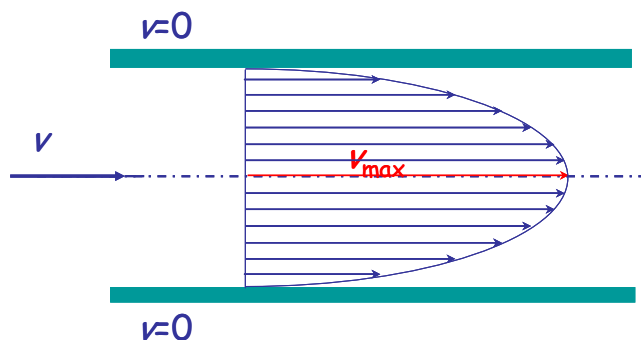
$$v_x(r) = \frac{1}{4\eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot R^2 \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (2.66.)$$

Za $r = 0$ iz jednadžbe (2.66.) slijedi da je u sredini cijevi maksimalna brzina strujanja:

$$v_{\max.} = \frac{1}{4\eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot R^2 \quad (2.67.)$$

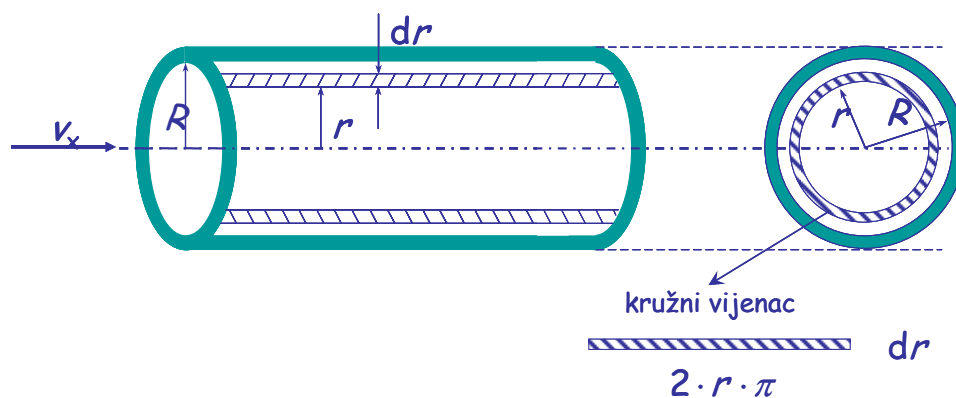
Budući da je za proračune važna srednja brzina strujanja fluida, potrebno ju je definirati. Polazna osnova je izraz za protok:

$$\dot{V} = v_{sr.} \cdot A = v_{sr.} \cdot R^2 \cdot \pi \quad (2.68.)$$



Slika 2.23. Profil brzina i odnos maksimalne i srednje brzine

Protok se može definirati i analiziranjem gibanja dijelica fluida lokalnom brzinom $v_x(r)$ (slika 2.24.).



Slika 2.24. Strujanje elementarnog dijela volumena fluida

Analizom gornje slike (slika 2.24.) slijedi da se protok može pisati kao:

$$\dot{V} = \int_0^R 2 \cdot r \cdot \pi \cdot dr \cdot v_x(r) \quad (2.69.)$$

te uvrštenjem izraza za lokalnu brzinu:

$$\dot{V} = \int_0^R 2 \cdot r \cdot \pi \cdot dr \cdot \frac{1}{4\eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot (R^2 - r^2) = \frac{R^2 \cdot \pi}{8 \cdot \eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \quad (2.70.)$$

Izjednačavanjem gornje jednadžbe s jednadžbom (2.68.):

$$v_{sr.} \cdot R^2 \cdot \pi = \frac{R^2 \cdot \pi}{8 \cdot \eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \quad (2.71.)$$

dobiva se izraz za srednju brzinu strujanja u horizontalnoj cijevi:

$$v_{sr.} = \frac{1}{8\eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot R^2 \quad (2.72.)$$

te konačno odnos između maksimalne i srednje brzine strujanja:

$$\frac{v_{\max}}{v_{sr}} = 2 \quad (2.73.)$$

Poznavanje toga odnosa od izuzetnog je značaja za mjerenje srednje brzine strujanja iz koje se određuje i protok. Npr. pri mjerenju brzine pomoću Pitotove cijevi mjeri se brzina u osi cijevi, koja predstavlja maksimalnu brzinu strujanja iz koje se može izračunati srednja brzina.

2.4.2.3. Gubitak energije pri laminarnom strujanju u horizontalnoj cijevi

Pri strujanju fluida dolazi do nepovratnog gubitka energije, a gubitak energije izražen je padom tlaka. Sređivanjem izraza za srednju brzinu (2.72.) dobiva se:

$$-\int_{p_1}^{p_2} dp = \frac{8 \cdot \eta \cdot v_{sr.}}{R^2} \cdot \int_{x_1}^{x_2} dx \quad (2.74.)$$

i integriranjem slijedi:

$$p_1 - p_2 = \frac{8 \cdot \eta \cdot v_{sr.}}{R^2} \cdot (x_2 - x_1) \quad (2.75.)$$

Zbog praktičnosti se uvodi:

$$(x_2 - x_1) = \ell \quad \text{- dužina cijevi}$$

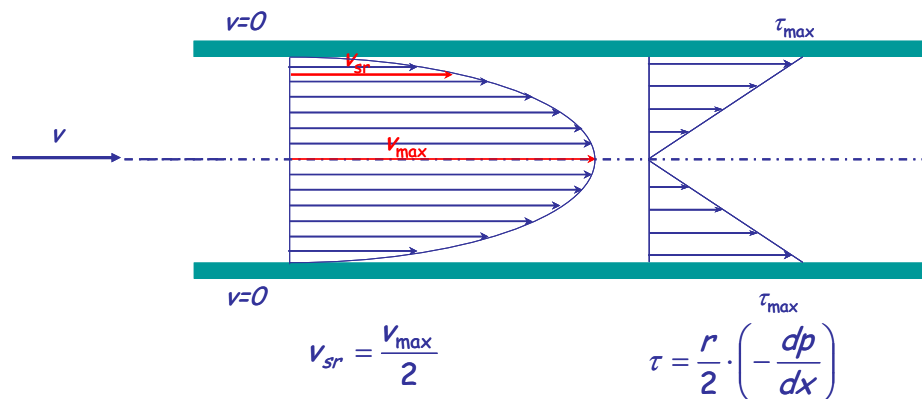
$$(p_1 - p_2) = \Delta p \quad \text{- pad tlaka u cijevi}$$

$$R = \frac{d}{2} \quad R^2 = \frac{d^2}{4}$$

pa iz jednadžbe (2.75.) slijedi **Hagen-Poiseuilleova** jednadžba za pad tlaka:

$$\Delta p = \frac{32 \cdot \eta \cdot \ell \cdot v_{sr.}}{d^2} \quad (2.76.)$$

Na slici 2.25. prikazana je raspodjela brzina i smičnog naprezanja po presjeku cijevi na temelju koje se jasno vidi da je u osi cijevi maksimalna brzina protjecanja, a smično naprezanje jednako je nuli, dok je uz stijenku cijevi obrnut slučaj.



Slika 2.25. Vektorski prikaz brzina i smičnog naprezanja u ovisnosti o položaju u cijevi

Iz Hagen-Poiseuilleove jednadžbe jasno je izražen utjecaj viskoznosti (η) u cijelom toku. To znači da se pri laminarnom strujanju količina gibanja prenosi samo molekularnim mehanizmom, odnosno da do gubitka energije dolazi isključivo zbog viskoznog trenja između samih čestica fluida i čestica fluida i stijenke.

2.4.3. Turbulentno strujanje

Slika 2.17. (Reynoldsov pokus) pokazuje transformaciju laminarnog strujanja u turbulentno. Dakle, turbulentno područje ostvareno je kod većih brzina strujanja kada se postigne neka kritična

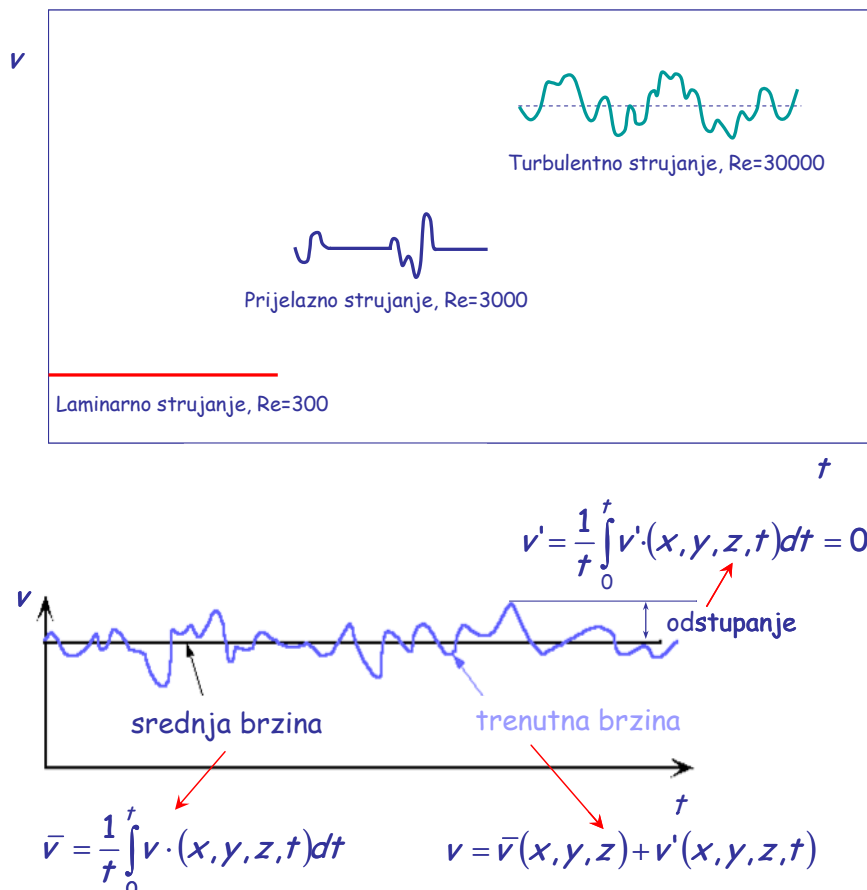
vrijednost Reynoldsovog broja ($Re_{kr} = 2 \cdot 10^3$). Karakteristika turbulentnog strujanja su nepravilne putanje čestica fluida, te su osim komponente brzine u smjeru osnovnog toka prisutne i bočne komponente.

Prema *Hinzeu*, turbulentno gibanje je neravnomjerno stanje strujanja u kojem parametri strujanja podliježu slučajnim promjenama u vremenu i prostoru, pri čemu se statističkim metodama ti parametri mogu osrednjiti.

Prema *Tayloru* i *von Karmanu* postoje dva uzroka zbog kojih dolazi do turbulencije. Do turbulencije dolazi uslijed uspostavljanja određenog gradijenta brzine koji nastaje zbog:

- prisustva nepokretne čvrste površine u polju strujnica (*zidna turbulencija*)
- uspostavljanja gradijenta brzine u slobodnom toku zbog dobivanja određenog impulsa (*slobodna turbulencija*)

Pri turbulentnom se strujanju uvodi pojam **vremenski osrednjeno turbulentno strujanje**. To je matematički model strujanja u kojemu su strujnice pravilne linije. Raspodjela osrednjenih brzina je slična kao u laminarnom području, ali je raspodjela vremenskih brzina bitno različita od raspodjela brzina laminarnog strujanja. Reynoldsov pokus pokazao je da je osnovna karakteristika turbulentnog strujanja neravnomjerno pulzacijsko gibanje čestica.



Slika 2.26. Trenutna brzina strujanja

Na slici 2.26. prikazano je kako se mijenja trenutna brzina strujanja za sve hidrodinamičke uvjete strujanja. Pri malim brzinama koje odgovaraju laminarnom strujanju tok je stacionaran. Daljnjim porastom brzine strujanja strujanje postaje mješovito (laminarno i turbulentno). Pri još većim protocima strujanje postaje turbulentno. Turbulentno strujanje karakterizirano je stalnom srednjom brzinom, iako se djelići fluida gibaju različitim brzinama. Odstupanje brzine od srednje brzine strujanja u jednoj točki ukazuje na nestacionarnost turbulentnog strujanja. Ako je vrijeme dovoljno veliko u odnosu na vrijeme trajanja jednog impulsa tada je srednja brzina mjerodavna veličina. Srednja

vrijednost komponente brzine (\bar{v}) je konstantna dok trenutne vrijednosti brzine (v') fluktuiraju oko srednje vrijednosti.

Trenutna brzina može se izraziti kao funkcija srednje brzine:

$$v(t) = \bar{v}(x, y, z) + v'(x, y, z, t) \quad (2.77.)$$

gdje je vrijednost srednje brzine u točki (x, y, z) definirana integralom:

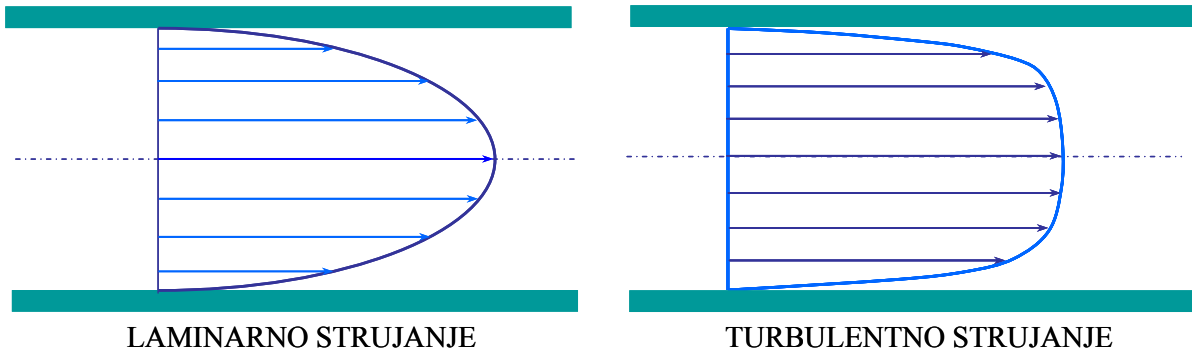
$$\bar{v} = \frac{1}{t} \cdot \int_0^t v'(x, y, z, t) dt \quad (2.78.)$$

pri čemu vrijednost t mora biti velika u odnosu na vrijeme trajanja jednog impulsa.

Srednja vrijednost odstupajućih brzina jednaka je nuli:

$$v' = \frac{1}{t} \cdot \int_0^t v'(x, y, z, t) dt = 0 \quad (2.79.)$$

U potpuno razvijenom turbulentnom toku strujnice fluktuirajućeg gibanja presijecaju strujnice tog kvazi uredenog, osrednjenog strujanja i time se iz sloja u sloj fluida prenosi količina gibanja, topline, tvari i ostale karakteristične veličine. Za razliku od *laminarnog strujanja*, u kojem također postoji prijenos tih veličina iz sloja u sloj, ali u mikroskopskim razmjerima (jer su nosioci tog prijenosa molekule), pri *turbulentnom strujanju* nosioci tog prijenosa su "gрозdovi" čestica fluida (grupe molekula) pa se i miješanje odvija u makroskopskim razmjerima.



Slika 2.17. Prikaz kvazistacionarnog vremenski osrednjenog strujanja

Laminarno:
$$v_{sr.} = \frac{v_{max.}}{2}$$

Turbulentno:
$$v_{sr.} = (0,7 - 0,9) \cdot v_{max.}$$

Raspodjela brzina pri turbulentnom strujanju tekućine kroz cijev kružnog presjeka definirana je empirijskim izrazom:

$$v(r) = v_{max.} \cdot \left(1 - \frac{r}{R}\right)^{1/n} \quad n = 6 - 10 \text{ (najčešće 7)} \quad (2.80.)$$

Strujanje se naziva kvazistacionarno jer je nestacionarno ako $t \rightarrow 0$, međutim ako je t dovoljno dugo u odnosu na vrijeme trajanja jednog impulsa, zbog velikog broja impulsa srednja brzina strujanja je konstantna za određeni radijus ovojnice.

Teorija o turbulentnom tečenju nije egzaktno riješena pa se u praksi koriste empirijske jednadžbe. Za objašnjenje prijenosa količine gibanja u turbulentnom režimu strujanja potrebno je ući u dublju analizu turbulentnog gibanja.

Iz slike 2.28. može se izvesti da je:

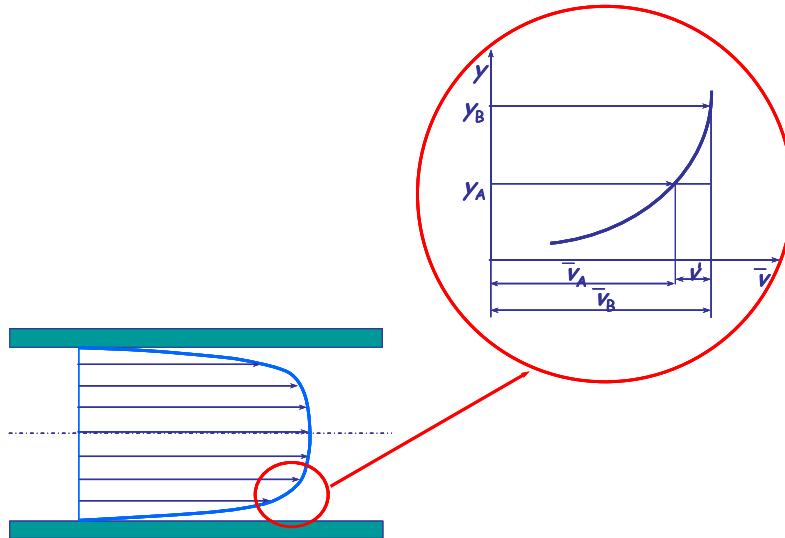
$$tg \varphi = \frac{dy}{dv} = \frac{y_B - y_A}{v'} \quad (2.81.)$$

a odstupajuća brzina:

$$v' = \frac{dv}{dy} \cdot (y_B - y_A) \quad (2.82.)$$

te:

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \frac{dv}{dy} \cdot (y_B - y_A) = \bar{v}_A + v' \quad (2.83.)$$



Slika 2.28. Analiza turbulentnog strujanja

Opis nastanka turbulencije

U nekom dvodimenzionalnom strujnom polju s uspostavljenim gradijentom brzine u y smjeru, promatra se jedan makroskopski djelić fluida na položaju y_A sa srednjom brzinom \bar{v}_A . Sve dok taj djelić fluida ima brzinu \bar{v}_A , on se ponaša kao i okolina. Ukoliko je taj djelić izložen impulsu, trenutno mu se povećava brzina na $\bar{v}_A + v'$. U tom trenutku nastaje vrtlog jer će se taj dijelić (sada vrtlog) razlikovati od svoje neposredne okoline. Daljnje gibanje nastalog vrtloga brzinom $\bar{v}_A + v'$ u toj sredini bilo bi popraćeno intenzivnom energetsom disipacijom (nepovratnim gubitkom energije). Zbog toga se zbog suviška energije vrtlog pomiče u područje većih brzina, područje koje ima istu brzinu (položaj y_B) te se više ne razlikuje od okoline.

Udaljenost od sloja iz kojeg je djelić fluida (konačni volumen) pošao do sloja u kojem se odigralo miješanje naziva se **Prandtlov put miješanja** ($y_B - y_A = \ell'$).

Za objašnjenje fizikalnog smisla Prandtlovog puta miješanja potrebno je postaviti analogiju s definicijom *molekularne difuzivnosti* (kinematičke viskoznosti), koja se može definirati jednadžbom:

$$v = \bar{\ell} \cdot \bar{c} \quad (2.84.)$$

gdje je $\bar{\ell}$ srednji put molekula, a \bar{c} srednja brzina gibanja molekula.

Analogno se može definirati i pojam *turbulentne difuzivnosti*, dakle kao produkt odstupajuće brzine i Prandtlovog puta miješanja:

$$v_T = \ell' \cdot v' \quad (2.85.)$$

Prandtl je pretpostavio da je ℓ' proporcionalno udaljenosti od stjenke:

$$\ell' = k \cdot y \quad (2.86.)$$

gdje je k bezdimenzijska konstanta koja se određuje eksperimentalno. Prema *Nikuradseu* $k = 0,36 - 0,42$.

Gustoća toka količine gibanja

Budući da je, bez obzira na vrijednost Reynoldsove značajke, uvijek prisutan molekularni mehanizam prijenosa količine gibanja (slika 2.29.), ukupna gustoća toka količine gibanja zbroj je dvije gustoće toka količine gibanja:

- Gustoća toka količine gibanja u laminarnom području definirana je Newtonovim izrazom:

$$\tau_{\text{LAM}} = -\eta \cdot \frac{d\bar{v}}{dy} = -\nu \cdot \frac{d(\bar{v}\rho)}{dy} \quad (2.87.)$$

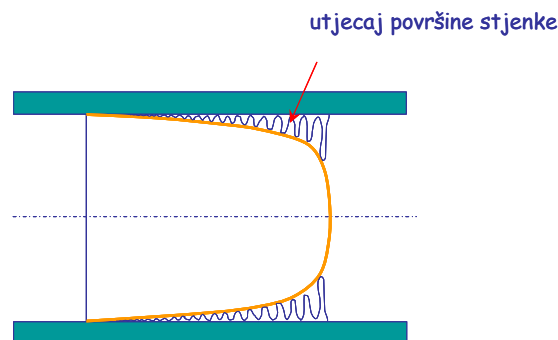
gdje je η dinamička viskoznost, a ν kinematička viskoznost (molekularna difuzivnost).

U laminarnom strujanju otpor je isključivo posljedica viskoznog trenja.

- Analogno laminarnom području, fluks količine gibanja u turbulentnom području može se pisati kao:

$$\tau_{\text{TURB}} = -\eta_T \cdot \frac{d\bar{v}}{dy} = -\nu_T \cdot \frac{d(\bar{v}\rho)}{dy} \quad (2.88.)$$

gdje je η_T turbulentna dinamička viskoznost, a ν_T turbulentna kinematička viskoznost (turbulentna difuzivnost), koja se razlikuje od kinematičke viskoznosti u laminarnom području jer se čestice gibaju i u smjeru osi y .



Slika 2.29. Utjecaj površine stjenke

Zbrajanjem jednadžbi (2.87.) i (2.88.) dobiva se izraz za ukupnu gustoću toka količine gibanja:

$$\tau_{\text{UK}} = \tau_{\text{LAM}} + \tau_{\text{TURB}} = -(\nu + \nu_T) \cdot \frac{d(\bar{v}\rho)}{dy} \quad (2.89.)$$

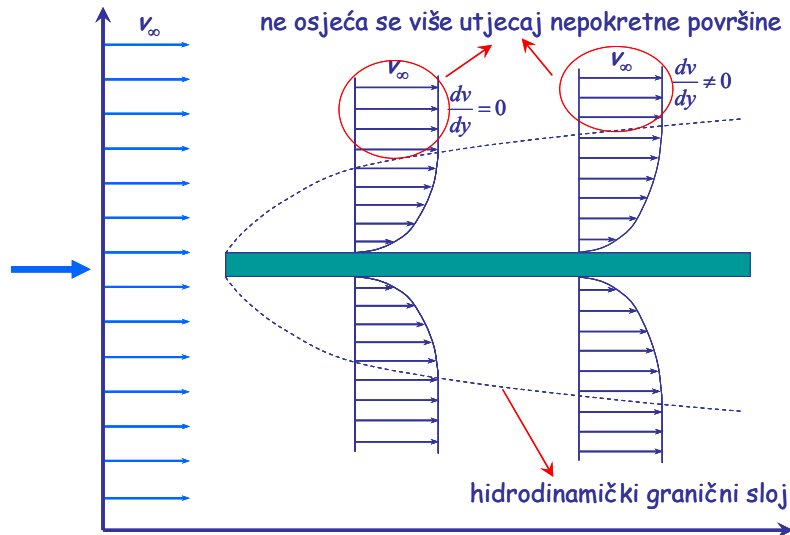
Turbulentni doprinos ukupnom fluksu količine gibanja u razvijenom turbulentnom području višestruko je veći od laminarnog doprinosa. Molekularni mehanizam prijenosa uvijek je prisutan, a kod visokih vrijednosti Reynoldsove značajke, prisutan je samo u tankom sloju fluida neposredno uz stjenku, koji se naziva hidrodinamički granični sloj.

2.4.3.1. Teorija graničnog sloja

Teoriju graničnog sloja postavio je *Ludwig Prandtl* još 1904., a ona je i danas temelj objašnjenja svih pojava prijenosa količine gibanja, topline i tvari.

Pri strujanju viskoznog fluida uz nepokretnu čvrstu površinu zbog svojstva viskoznosti dolazi do pojave kočenja susjednih slojeva fluida. Kod turbulentnog strujanja (kod visokih vrijednosti Reynoldsove značajke) utjecaj kočenja osjetit će se samo na određeni broj zamišljenih slojeva u blizini stijenke, dok se u ostalom dijelu fluida na određenoj udaljenosti od nepokretne površine taj utjecaj ne osjeća i u tom dijelu fluid struji turbulentno. Unutar graničnog sloja nema znatne promjene tlaka, odnosno tlak je isti kao i u masi fluida.

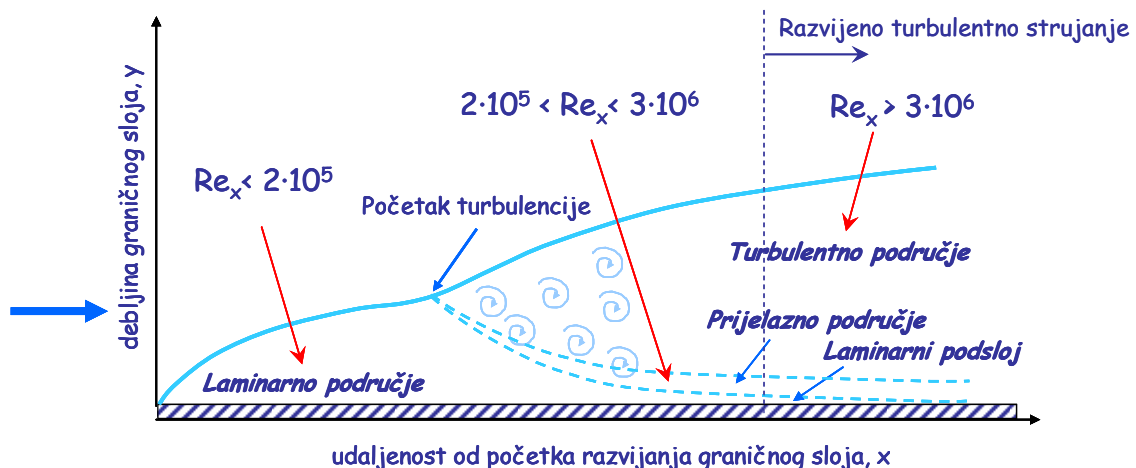
Najjednostavniji slučaj za razmatranje je strujanje uz ravnu ploču (slika 2.30.). Brzina v_∞ je brzina strujanja fluida na koju se ne osjeća utjecaj čvrste stijenke (brzina nesmetanog toka fluida). Dio fluida u kojem se, zbog svojstva viskoznosti fluida, osjeća utjecaj nepokretne površine (na taj način da postoji gradijent brzine dv/dy) naziva se **hidrodinamički granični sloj**. Svojim postojanjem hidrodinamički granični sloj utječe na prijenos tvari, topline i količine gibanja pružajući otpor, pa se zbog toga proces uvijek nastoji voditi u takvim uvjetima da je njegova debljina što manja. Brzina strujanja fluida neposredno uz nepokretnu površinu, uz uvjet da nema klizanja, jednaka je nuli i povećava se s udaljenošću od površine te se asimptotski približava brzini nesmetanog toka, v_∞ .



Slika 2.30. Razvoj hidrodinamičkog graničnog sloja pri strujanju oko ravne ploče

Prandtl je podijelio gibanje fluida u dva područja:

- područje u kojem se osjeća utjecaj čvrste površine na tok fluida
- područje u kojem se ne osjeća utjecaj čvrste površine na tok fluida



Slika 2.31. Struktura graničnog sloja

Granični sloj je vrlo tanak i unutar njega je, zbog svojstva viskoznosti, smično naprezanje vrlo veliko, tako da je i gradijent brzine izrazito velik. Iznad graničnog sloja fluid se može smatrati praktički neviskoznim, gradijent brzine je mali, pa je i smično naprezanje koje je posljedica viskoznosti vrlo malo, što rezultira približno jednakim brzinama unutar tog područja ($dv/dy \approx 0$).

Prandtl je svojim proučavanjima došao do spoznaje da struktura graničnog sloja nije tako jednostavna već se on na nekoj udaljenosti od početka razvoja dijeli u tri područja (slika 2.31.).

Debljina graničnog sloja, δ , uzima se kao udaljenost od nepokretne površine gdje brzina doseže vrijednost od 99% vrijednosti brzine kojom struji masa fluida, v_∞ . Na slici se vidi kako debljina graničnog sloja raste s udaljenošću, x , od mjesta početka razvoja graničnog sloja. Na srazmjerno malim vrijednostima x , strujanje unutar sloja je laminarno, pa se taj dio sloja naziva *laminarni granični sloj*. Na većim udaljenostima uočava se područje u kojem se izmjenjuje laminarno i turbulentno strujanje unutar graničnog sloja. Taj dio hidrodinamičkog graničnog sloja naziva se *prijelazno područje*. Konačno, na nekoj udaljenosti, strujanje postaje turbulentno, pa se govori o *turbulentnom graničnom sloju*. U potpuno razvijenom turbulentnom toku egzistira tzv. *laminarni podsloj*. To je područje fluida u kojem se osjeća utjecaj čvrste površine zbog svojstva viskoznosti, a nalazi se tik uz čvrstu površinu.

Mjesto početka turbulencije (udaljenost od početnog ruba x) može se definirati modificiranom Reynoldsovom značajkom, (Re_x) :

$$Re_x = \frac{v \cdot x \cdot \rho}{\eta} \quad (2.90.)$$

Vrijednost modificirane Reynoldsove značajke ukazuje na hidrodinamičke uvjete strujanja za određeni položaj u smjeru strujanja x , tako da se može smatrati lokalnom Reynoldsovom značajkom.

Za ravnu ploču vrijedi:

$Re_x < 2 \cdot 10^5$	laminarni granični sloj
$2 \cdot 10^5 < Re_x < 3 \cdot 10^6$	prijelazno područje
$Re_x > 3 \cdot 10^6$	turbulentni granični sloj

Blasius je rješavanjem niza diferencijalnih jednačbi predložio izraze za određivanje debljine hidrodinamičkog graničnog sloja za ravnu ploču.

Za laminarno područje:

$$\delta_H = \frac{k \cdot x}{\sqrt{Re_x}} \quad k = 4,64 \quad (2.91.)$$

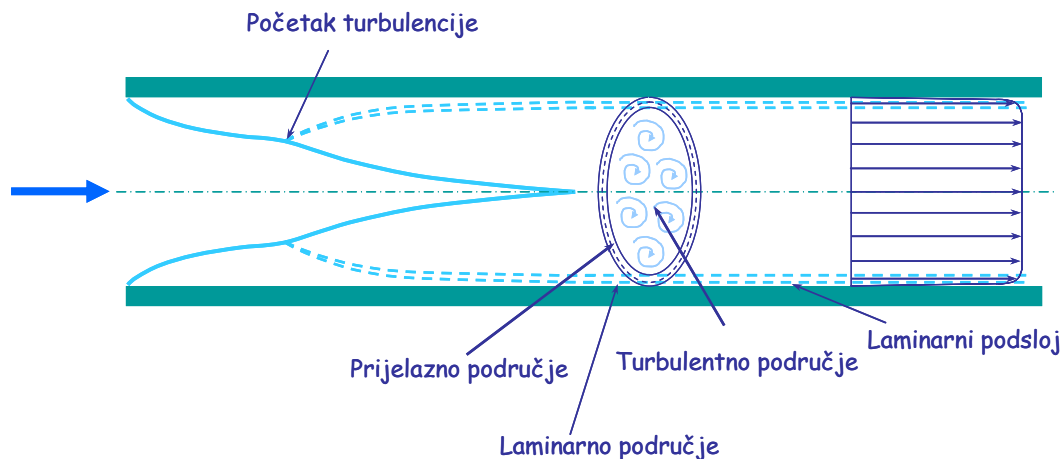
Za turbulentno područje:

$$\delta_H = \frac{k \cdot x}{\sqrt[5]{Re_x}} \quad k = 0,376 \quad (2.92.)$$

Utjecaj hidrodinamičkih uvjeta na debljinu graničnog sloja općenito se može izraziti:

$$\delta_H \approx \frac{1}{Re_x^m} \quad (2.93.)$$

što znači da se debljina hidrodinamičkog graničnog sloja smanjuje povećanjem Reynoldsove značajke.



Slika 2.32. Razvoj hidrodinamičkog graničnog sloja do razvijenog ustaljenog toka fluida u ravnoj cijevi

Na slici 2.32. prikazan je razvoj hidrodinamičkog graničnog sloja pri strujanju fluida kroz cijev kružnog presjeka. Granični se sloj razvija duž cijevi sve do potpuno razvijenog turbulentnog područja kada se slojevi spajaju.

2.4.3.2. Univerzalna raspodjela brzina pri turbulentnom gibanju

Pri visokim vrijednostima Reynoldsove značajke, laminarna gustoća toka količine gibanja može se zanemariti, budući da je višestruko manja od turbulentnog doprinosa:

$$\tau_{UK} = \tau_{TURB} = \nu_T \cdot \frac{d(\bar{v}\rho)}{dy} = \nu_T \cdot \rho \cdot \frac{d\bar{v}}{dy} = \tau_0 \quad (2.94.)$$

Jednadžba (2.94.) ne bi se smjela primjeniti za turbulentno područje u neposrednoj blizini stijenke. Međutim, budući da je debljina graničnog sloja jako mala (laminarni doprinos gustoći toka količine gibanja je stoga također vrlo mali), može se uzeti da je uz stijenku $\tau_{TURB} = \tau_0$, čime se ne čini veća pogreška.

Uvrštavanjem jednadžbe (2.82.) u jednadžbu (2.85.) dobiva se:

$$\nu_T = \ell'^2 \cdot \frac{d\bar{v}}{dy} \quad (2.95.)$$

što uvrštavanjem u jednadžbu (2.94.) daje:

$$\tau = \ell'^2 \cdot \rho \cdot \left(\frac{d\bar{v}}{dy} \right)^2 \quad (2.96.)$$

Iz jednadžbe (2.96.) slijedi:

$$\frac{d\bar{v}}{dy} = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} \cdot \frac{1}{\ell'} \quad (2.97.)$$

Budući da je $\ell' = k \cdot y$, jednadžba (2.97.) može se pisati u obliku:

$$\frac{d\bar{v}}{dy} = \frac{\sqrt{\tau}}{k \cdot y} \quad (2.98.)$$

gdje je $\sqrt{\tau / \rho}$ - brzina trenja (brzina tangencijalnog naprezanja).

Ovdje se ne može govoriti o brzini u klasičnom smislu. Međutim, dimenzijski taj izraz daje (m s^{-1}), tako da to na neki način predstavlja prividnu brzinu.

Integriranjem jednadžbe (2.98.) uz $\sqrt{\tau / \rho} = \omega$ dobiva se:

$$\bar{v} = \frac{\omega^*}{k} \ln y + c \quad (2.99.)$$

Konstanta integriranja (c) iz jednadžbe (2.99.) određuje se iz graničnih uvjeta. Jednadžba (2.99.) može se pisati i u obliku:

$$\frac{\bar{v}}{\omega^*} = \frac{1}{k} \ln y + c \quad (2.100.)$$

gdje je član \bar{v} / ω^* bezdimenzijska brzina i označava se sa v^+ .

Osim bezdimenzijske brzine uvodi se i parametar položaja, odnosno bezdimenzijska udaljenost:

$$y^+ = \frac{\omega^* \cdot y}{\nu} \quad (2.101.)$$

iz čega slijedi da je udaljenost:

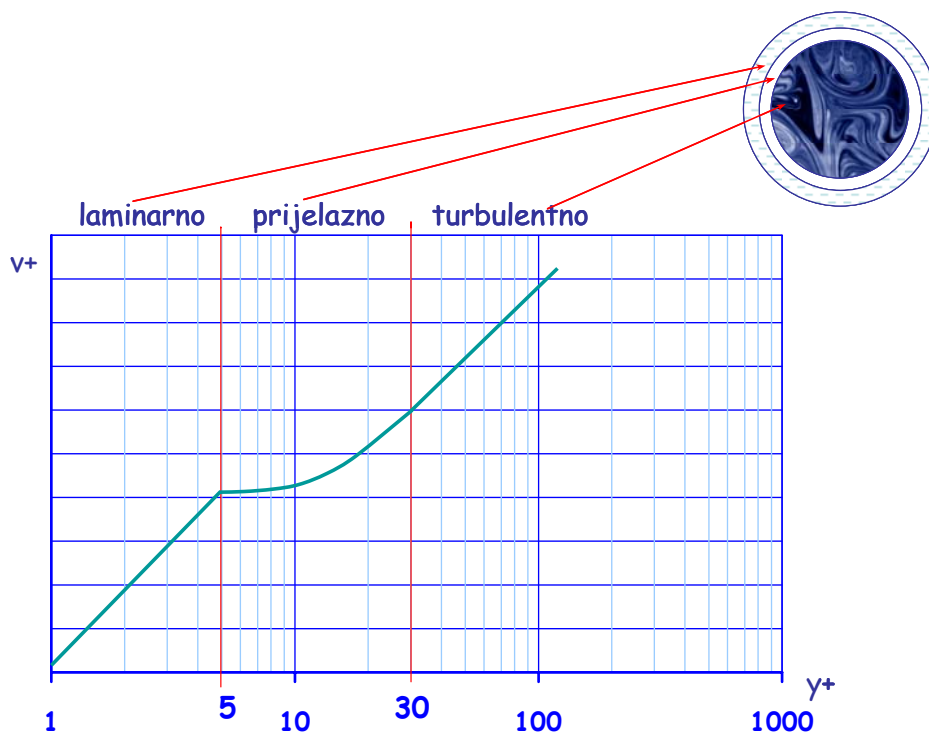
$$y = \frac{\nu \cdot y^+}{\omega^*} \quad (2.102.)$$

Uvrštavanjem bezdimenzijske brzine i jednadžbe (2.102.) u jednadžbu (2.100.) dobiva se:

$$v^+ = \frac{1}{k} \ln \frac{v \cdot y^+}{\omega^*} + c, \quad (2.103.)$$

što sređivanjem daje izraz za *univerzalnu raspodjelu brzina* kod turbulentnog strujanja:

$$v^+ = \frac{1}{k} \ln y^+ + c_1 \quad (2.104.)$$

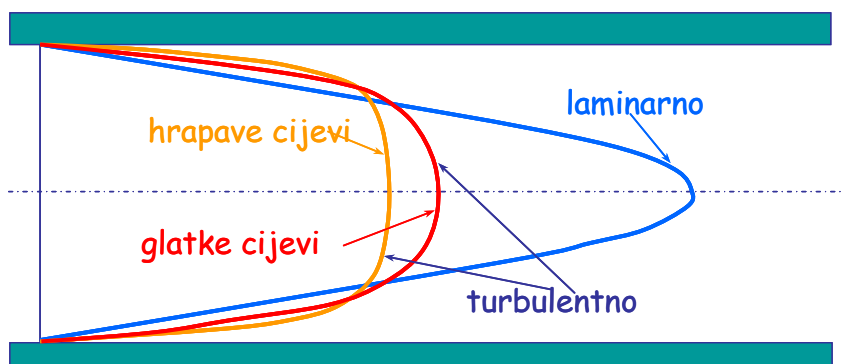


Slika 2.33. Univerzalna raspodjela brzina pri razvijenom toku u cijevi

Za glatku cijev vrijedi (Nikuradze), slika 2.33.:

- laminarno: $0 < y^+ \leq 5$ $v^+ = y^+$
- prijelazno: $5 < y^+ \leq 30$ $v^+ = 5 \cdot \ln y^+ - 3,05$
- turbulentno $y^+ > 30$ $v^+ = 2,5 \cdot \ln y^+ + 5,5$

To su poluempirijske jednadžbe u kojima su koeficijenti eksperimentalno određeni. Jednadžbe daju mogućnost procjene brzine u bilo kojoj točki presjeka kroz koji turbulentno protječe kapljevina.



Slika 2.34. Usporedba profila brzina

Nikuradseovi eksperimentalni rezultati su pokazali da je profil brzina manjeg nagiba ako fluid struji kroz hrapavu cijev, u odnosu na nagib profila brzina dobivenog pri stujanju fluida kroz glatke cijevi (slika 2.34.).

2.4.3.3. Gubitak energije pri turbulentnom gibanju tekućine kroz cijev kružnog presjeka

Procjena gubitka energije, koji se izražava padom tlaka, kod turbulentnog strujanja vrlo je složena zbog kompleksne slike strujnica, zbog prisutnosti graničnog sloja zbog laminarnog i turbulentnog doprinosa gustoći toka količine gibanja.

Iako su eksperimentalno utvrđene varijable koje utječu na pad tlaka, nije poznata diferencijalna jednačba koja opisuje pojavu prijenosa količine gibanja. Ukoliko nije poznata diferencijalna jednačba koja opisuje ponašanje sustava, ali su poznate sve varijable koje bi tvorile tu jednačbu, moguće je izvesti **kriterije sličnosti** iz pretpostavljenog broja poznatih varijabli, koristeći se metodom **dimenzijske analize**.

Dimenzijska analiza je matematička metoda koja omogućuje da se ponašanje nekog fizikalnog sustava izrazimo pomoću smanjenog broja varijabli. Ona ne daje egzaktnu funkciju, nego skup bezdimenzijskih značajki u obliku tzv. **bezdimenzijskih**, odnosno **korelacijskih jednačbi**.

PRINCIP SLIČNOSTI

Princip sličnosti bazira se na saznanju da se pod sličnim uvjetima moraju javiti i slične posljedice. Ako su dva fizikalna sustava slična, može se iz poznavanja jednog predvidjeti ponašanje drugoga. Materijalni objekti i fizikalni sustavi mogu se okarakterizirati s tri karakteristike: *oblik*, *veličina* i *sastav*. Te tri varijable nezavisne su jedna o drugoj.

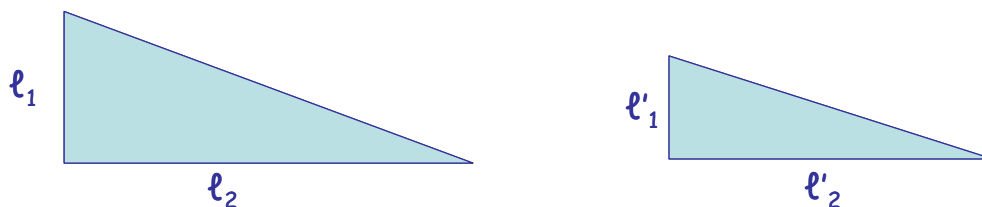
Princip sličnosti odnosi se na oblik. Pod pojmom oblika kemijski inženjer ne podrazumijeva samo *geometrijski oblik*, nego i *sliku strujnica*, *sliku temperaturnog polja* i *sliku koncentracijskog polja*.

Dakle, u kemijskom inženjerstvu važne su četiri sličnosti:

- *geometrijska*
- *mehanička*
- *termička*
- *koncentracijska (kemijska)*

Svaka od tih sličnosti, u prikazanom redosljedu, pretpostavlja one iznad nje same. Npr. dva će sustava biti termički slična ako su geometrijski slična, a ako se nalaze u gibanju moraju biti i mehanički slična.

Geometrijska sličnost



Slika 2.35. geometrijska sličnost

Dva su sustava geometrijski slična ako za svaku točku u jednom sustavu postoji odgovarajuća točka u drugom sustavu. Sličnost može biti izražena odnosom karakterističnih veličina. Iz slike 2.35. slijedi da su dva trokuta slična ako je zadovoljen sljedeći uvjet:

$$\frac{l_1}{l'_1} = \frac{l_2}{l'_2} = a_l = l_+ \quad (2.105.)$$

Odnos karakterističnih veličina koje definiraju sustav, a ne mogu se više razdijeliti (konačne su), naziva se **simpleks**.

Odnosi između jednostavnih fizikalnih veličina (ℓ / m) nazivaju se simpleksi. Simpleksi ne mogu biti odnosi između složenih veličina (npr. F/kgms^{-2}).

Mehanička sličnost

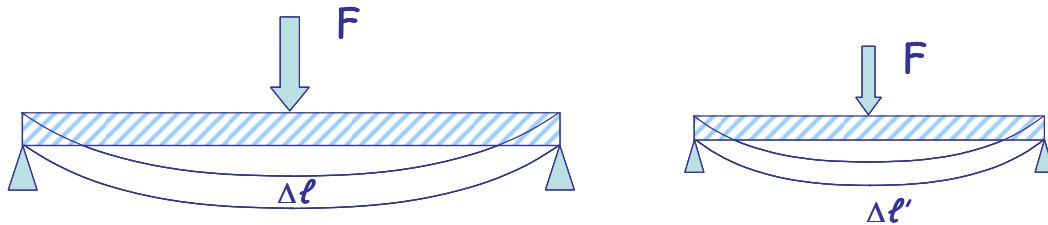
Mehanička sličnost dvaju sustava može postojati tek ako su sustavi geometrijski slični. Mehanička sličnost može biti:

- statička,
- kinematička
- dinamička.

Statička sličnost

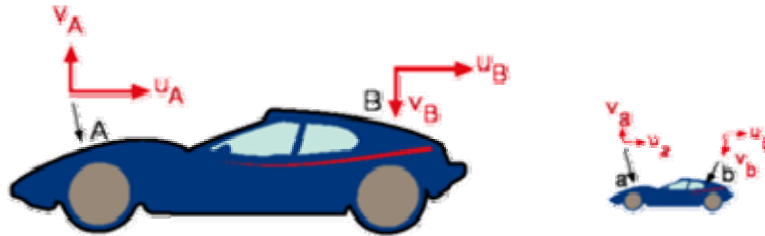
Uvjet statičke sličnosti zadovoljen je ako su deformacije pod djelovanjem sila na geometrijski slična tijela u konstantnom odnosu, pri čemu je deformacija proporcionalna veličini tijela.

$$\frac{\Delta \ell'}{\Delta \ell} = a_\ell = \Delta \ell_+ = \text{konst.} \quad (2.106.)$$



Slika 2.36. Mehanička sličnost → statička

Kinematička sličnost



Slika 2.37. Kinematička sličnost

Geometrijski slični sustavi u gibanju su kinematički slični kad odgovarajuće točke prelaze geometrijski slične puteve u odgovarajućim vremenskim intervalima.

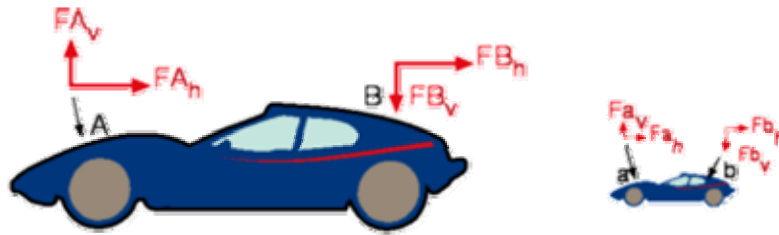
$$\frac{v'}{v} = a_v \quad (2.107.)$$

Dinamička sličnost

Geometrijski slični sustavi u gibanju su i dinamički slični kad su odnosi odgovarajućih sila u odgovarajućim točkama dvaju sustava u stalnom odnosu.

$$\frac{F'}{F} = a_F \quad (2.108.)$$

U prijenosu količine gibanja primjenjuje se dinamička sličnost. Dinamička sličnost podrazumijeva postavljanje odnosa između *inercijske sile* (F_i) koja uzrokuje gibanje i neke sile koja se javlja u sustavu, dakle koja je karakteristična za određenu prijenosnu pojavu.



Slika 2.38. Dinamička sličnost

Npr., pri gibanju viskoznog fluida u cijevi kao sila otpora javlja se sila trenja (F_{tr}), dakle viskozno trenje, te se postavlja odnos između sile inercije i sile trenja.

$$\frac{F_i}{F_{tr}} = \frac{m \cdot a}{\tau \cdot S} = \frac{\rho \cdot l^3 \cdot \frac{v^2}{l}}{\eta \cdot \frac{v}{l} \cdot l^2} = \frac{v \cdot l \cdot \rho}{\eta} \quad (2.109.)$$

$$Re = \frac{v \cdot l \cdot \rho}{\eta} \quad (2.110.)$$

Jednadžba (2.110.) predstavlja *Reynoldsovu značajku* koja je bezdimenzijski kriterij sličnosti. Linearna dimenzija l definira mjerodavnu geometrijsku karakteristiku sustava (npr., kod strujanja u cijevi to je promjer cijevi d).

Pri definiranju tih odnosa bitno je baratati s konačnim, a ne s diferencijalnim veličinama. Isto tako numeričke konstante (npr. π , 2) mogu ući u vrijednost značajke.

Reynoldsova značajka može se definirati i na temelju odnosa gustoće toka količine gibanja i laminarnog doprinosa gustoći toka količine gibanja:

$$Re = \frac{\tau_{UK}}{\tau_L} = \frac{f \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2}}{\eta \cdot \frac{v}{l}} = \frac{v \cdot l \cdot \rho}{\eta} \quad (2.111.)$$

Za cijev vrijedi već spomenuti izraz za Reynoldsovu značajku (jednadžba 2.43.):

$$Re = \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\eta}$$

Vrijednost Reynoldsove značajke ukazuje na dominirajući mehanizam prijenosa.

Odnos sile inercije i sile gravitacije izražava se *Froudeovom značajkom*:

$$Fr = \frac{F_i}{F_g} = \frac{m \cdot a}{m \cdot g} = \frac{\frac{v^2}{l}}{g} = \frac{v^2}{l \cdot g} = \frac{v^2}{d \cdot g} \quad (2.112.)$$

Pri strujanju realnog fluida dolazi do gubitka energije koji se izražava padom tlaka. Dakle, na temelju dinamičke sličnosti vrijedi:

$$\frac{F_i}{F_p} = \frac{m \cdot a}{p \cdot A} = \frac{\rho \cdot l^3 \cdot \frac{v^2}{l}}{p \cdot l^2} = \frac{\rho \cdot v^2}{p} \quad (2.113.)$$

Pri izražavanju gubitka energije uobičajeno je koristiti *Eulerovu značajku*:

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho \cdot v^2} \quad (2.114.)$$

Eulerova značajka mjera je za količinu izgubljene energije pri strujanju viskoznog fluida.

Brojnik u Eulerovoj značajci:

Δp predstavlja gubitak energije izražen padom tlaka. Može se pokazati da tlak, p , predstavlja tlakčnu energiju izraženu po jedinici volumena.

$$p : \text{Pa} \Rightarrow \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{m}} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

Nazivnik u Eulerovoj značajci:

$v^2 \cdot \rho$ zapravo predstavlja kinetičku energiju (raspoloživu energiju) fluida izraženu po jedinici volumena procesnog prostora:

$$v^2 \cdot \rho = \frac{v^2 \cdot m}{V}$$

Termička sličnost

Geometrijski slični sustavi su i termički slični ako su odgovarajuće temperaturne razlike u konstantnom odnosu, a ako su sustavi u gibanju moraju biti i kinematički, odnosno dinamički slični.

$$\frac{\Delta T'}{\Delta T} = a_T = \Delta T_+ = \text{konst.} \quad (2.115.)$$

Koncentracijska (kemijska) sličnost

Geometrijski i termički slični sustavi su kemijski slični ako koncentracijske razlike među geometrijski odgovarajućim točkama u oba sustava stoje u konstantnom odnosu. Ako su sustavi u gibanju, moraju biti i dinamički slični.

$$\frac{\Delta c'}{\Delta c} = a_c \quad (2.116.)$$

DIMENZIJSKA ANALIZA

Dimenzijska analiza matematička je metoda koja omogućuje dobivanje informacija o obliku funkcionalne ovisnosti među veličinama u fizičkim sustavima za koje, zbog njihove složenosti, ne postoje egzaktna rješenja. Međutim, moguće je odrediti uvjete fizičke sličnosti među zbivanjima te tako i zakone modeliranja i prenošenja rezultata iz eksperimenata na veliko mjerilo tehničke izvedbe. Smisao je dimenzijske analize da se iz predodređenog broja varijabli (koje utječu na odvijanje procesa) izvede korelacijska jednadžba koja povezuje bezdimenzijske značajke i simplekse. Pri tome je nužan eksperiment.

Tri su osnovne metode provedbe dimenzijske analize:

- Buckinghamova metoda (π teorem)
- Rayleighova metoda
- Metoda sustavnog kušanja

Napomena: U ovom kolegiju dane su samo osnovne provedbe dimenzijske analize. Opširan se prikaz može naći u raznoj literaturi (npr. Tehnička enciklopedija).

Buckinghamov teorem ili π - teorem osnovni je teorem dimenzijske analize i sadrži svu njenu bit. Osnovni je princip metode da se svaka dimenzijski homogena funkcija od n dimenzijskih varijabli može svesti na zavisnost $(n-r)$ bezdimenzijskih produkata potencija (bezdimenzijskih grupa), pri čemu je r maksimalni broj dimenzijskih varijabli koje međusobno ne mogu tvoriti bezdimenzijsku grupu, odnosno r je minimalni broj varijabli čijim se jedinicama mogu izraziti jedinice svih n varijabli. Na taj se način pojednostavljuje izvođenje korelacija između karakterističnih varijabli.

Npr., ako je $n = 7$, a $r = 3$ tvori se korelacija između $n - r = 7 - 3 = 4$ bezdimenzijske grupe.

Dimenzijska homogenost kod dimenzijske analize podrazumijeva da svi članovi jednadžbe moraju tvoriti iste dimenzije na obje strane jednadžbe.

Npr.:

$$F = m \cdot a$$

$$[M L T^{-2}] = [M] \cdot [L T^{-2}] = [M L T^{-2}]$$

gdje je

$[M]$	- masa
$[L]$	- duljina
$[T]$	- vrijeme

Rayleighova metoda

Provedba metode razmotrit će se na primjeru strujanja kroz cijev. Eksperimentalnim je istraživanjima utvrđena ovisnost narinute sile, odnosno sile koja uzrokuje gibanje fluida definiranih svojstava, brzinom v , kroz cijev određenih geometrijskih karakteristika.



Slika 2.39. Strujanje fluida kroz cijev

Utvrđeno je da narinuta sila, odnosno sila otpora ovisi o sljedećim varijablama:

Zavisna veličina:	$F, N = kg m s^{-2}, [M \cdot L \cdot T^{-2}]$
Geometrijske karakteristike:	$d, m, [L]$
Fizikalna svojstva:	$\rho, kg m^{-3}, [M \cdot L^{-3}]$
	$\eta, kg m^{-1} s^{-1}, [M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}]$
Procesna svojstva:	$v, m s^{-1}, [L \cdot T^{-1}]$

Odnosno:

$$F = f\left(v, \rho, \eta, d, \frac{l}{d}, \frac{\varepsilon}{d}\right)$$

gdje su $\frac{l}{d}$ i $\frac{\varepsilon}{d}$ simpleksi.

Broj dimenzijskih varijabli: $n = 5$ (F, v, ρ, η, d)

Broj osnovnih dimenzija pomoću kojih su izražene navedene varijable: $r = 3$ (M, L, T)

Budući da navedene varijable i simpleksi utječu na vrijednost sile, postavlja se jednadžba:

$$F = k \cdot v^a \cdot \rho^b \cdot \eta^c \cdot d^e \cdot \left(\frac{l}{d}\right)^f \cdot \left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^g \quad (2.117.)$$

Izraženo dimenzijama:

$$[M L T^{-2}] = [L T^{-1}]^a \cdot [M L^{-3}]^b \cdot [M L^{-1} T^{-1}]^c \cdot [L]^e \quad (2.118.)$$

(konstanta k i simpleksi ne ulaze u dimenzijsku jednadžbu).

Izjednačavanjem eksponenta na istovrsnim dimenzijama lijeve i desne strane jednadžbe, iz jednadžbe (2.117.) slijede tri jednadžbe sa četiri nepoznanice:

$$M: 1 = b + c$$

$$L: 1 = a - 3b - c + e$$

$$T: -2 = -a - c$$

Sustav jednačbi ne može se riješiti budući da sadrži četiri nepoznanice, a samo tri jednačbe. Budući da se u sve tri jednačbe pojavljuje nepoznanica "c" svi eksponenti izražavaju se preko te nepoznanice:

$$b = 1 - c$$

$$a = 2 - c$$

$$e = 2 - c$$

Uvrštavanjem eksponenata izraženih preko nepoznanice "c" u jednačbu (2.117.) dobiva se:

$$F = k \cdot v^{2-c} \cdot \rho^{1-c} \cdot \eta^c \cdot d^{2-c} \cdot \left(\frac{l}{d}\right)^f \cdot \left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^g \quad (2.119.)$$

Grupiranjem varijabli istog eksponenta dobiva se:

$$\frac{F}{v^2 \cdot \rho \cdot d^2} = k \cdot \left(\frac{\eta}{v \cdot d \cdot \rho}\right)^c \cdot \left(\frac{l}{d}\right)^f \cdot \left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^g \quad (2.120.)$$

U jednačbi (2.120.) eksponent "f" je određen eksperimentalno i ima vrijednost jedan što znači da je ovisnost sile o simpleksu l/d linearna.

Nadalje, kako je:

$$\frac{F}{d^2} = \tau = \Delta p \quad (2.121.)$$

- d^2 izražava površinu, tako da sila po površini predstavlja smično naprezanje, (odnosno pad tlaka), a

$$\left(\frac{\eta}{v \cdot d \cdot \rho}\right)^c = \left(\frac{1}{\text{Re}}\right)^c \quad (2.122.)$$

Jednačba (2.120.) može se pisati u sljedećem obliku:

$$\frac{\Delta p}{v^2 \cdot \rho} = k \cdot \left(\frac{1}{\text{Re}}\right)^c \cdot \left(\frac{l}{d}\right)^f \cdot \left(\frac{\varepsilon}{d}\right)^g \quad (2.123.)$$

odnosno:

$$\frac{\Delta p}{v^2 \cdot \rho} = f\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{d}\right) \cdot \frac{l}{d} \quad (2.124.)$$

Izjednačavanjem jednačbe (2.124.) i jednačbe (2.114.) dobiva se:

$$Eu = f\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{d}\right) \cdot \frac{l}{d} \quad (2.125.)$$

Jednačba (2.125.) predstavlja bezdimenzijsku korelacijsku jednačbu koja ukazuje na utjecaj hidrodinamičkih uvjeta i geometrijskih karakteristika na gubitak energije pri protjecanju. Pokazalo se da ukupni broj izvedenih bezdimenzijskih značajki stvarno odgovara izrazu: $n - r = 5 - 3 = 2$ (Eulerova i Reynoldsova značajka).

Riječima se može iskazati: Gubitak energije pri strujanju fluida ovisi o hidrodinamičkim uvjetima strujanja i geometrijskim karakteristikama sustava

Funkcionalna ovisnost $f(\text{Re}, \varepsilon/d)$ izražava se faktorom trenja ξ , a predstavlja utjecaj viskoznih sila i geometrijskih karakteristika pri strujanju fluida.

Dogovorno je, umjesto ξ , uvedeno $\xi/2$ tako da se $1/2$ poveže sa $v^2 \cdot \rho$ te se na taj način dobiva kinetička energija izražena po jedinici volumena (jednačba 2.128.).

$$f\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{d}\right) = \frac{\xi}{2} \quad (2.126.)$$

Jednačba (2.124.) prelazi u oblik:

$$\frac{\Delta p}{v^2 \cdot \rho} = \frac{\xi}{2} \cdot \frac{l}{d} \quad (2.127.)$$

odnosno:

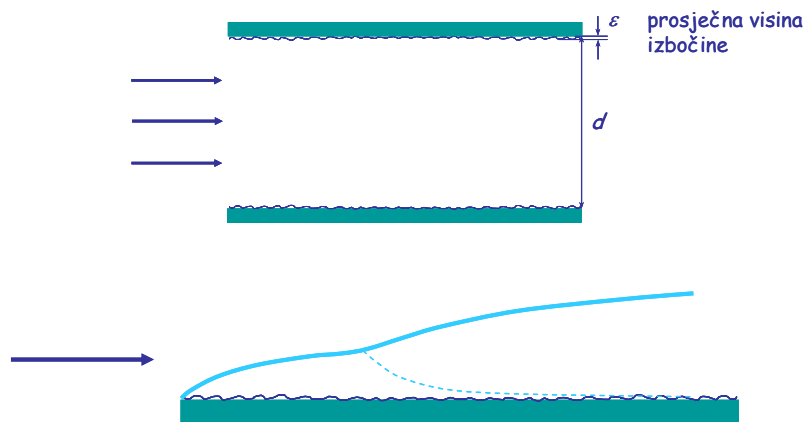
$$\Delta p = \xi \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \quad (2.128.)$$

Jednadžba (2.128.) omogućava procjenu pada tlaka pri strujanju fluida kroz cijev, a naziva se **Darcy-Weissbachova jednadžba**.

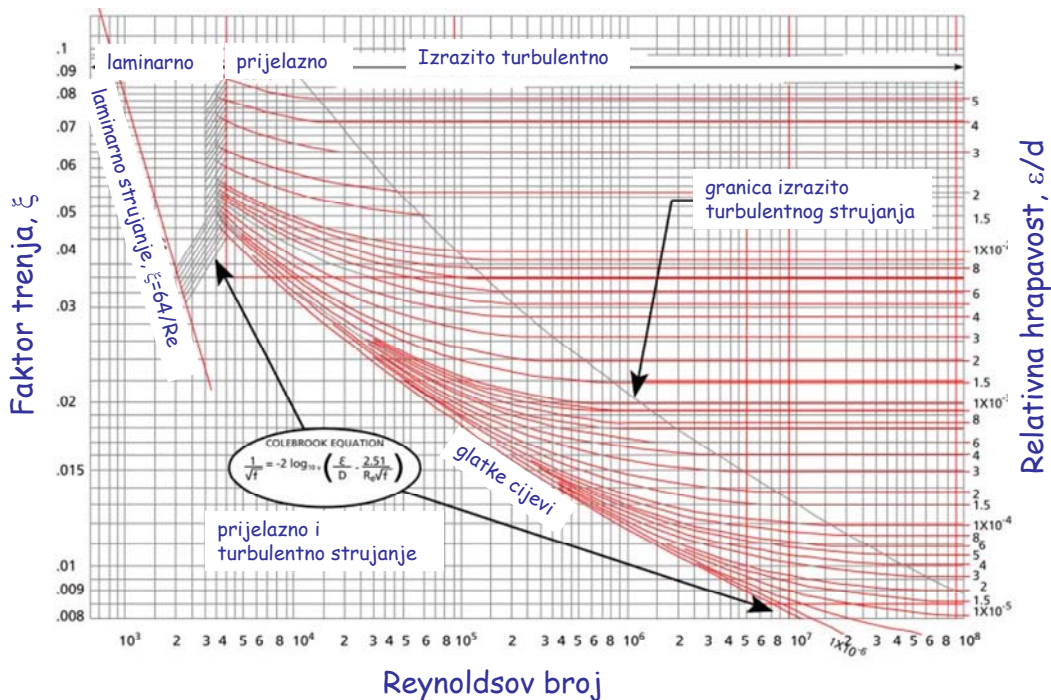
Ovisnost faktora trenja o Reynoldsovoj značajci

Ovisnost faktora trenja o Reynoldsovoj značajci dobiva se eksperimentalno, korištenjem dimenzijske analize. Za pad tlaka kod strujanja fluida kroz cijev općenito vrijedi Darcy-Weissbachova jednadžba (2.128.). Funkcionalna ovisnost $f(\text{Re}, \varepsilon/d) \rightarrow$ eksperimentalno je određena.

Moody i Nikuradze definirali su hrapavost površine (slika 2.40.). Mjerili su pad tlaka u cijevi pri različitim brzinama strujanja fluida, odnosno različitim Reynoldsovima brojevima. Njihovi podaci rezultirali su dijagramom ovisnosti faktora trenja o relativnoj hrapavosti cijevi i brzini strujanja fluida, odnosno Reynoldsovoj značajci (slika 2.41.)



Slika 2.40. Hrapavost površine



Slika 2.41. Moodyev dijagram

Laminarno područje

Za laminarno strujanje vrijede oba zakona, Hagen-Poiseuilleov (jednadžba 2.76.) i Darcy-Weissbachov (jednadžba 2.128.). Izjednačavanjem tih izraza dobiva se:

$$\frac{32 \cdot \eta \cdot l \cdot v_{sr}}{d^2} = \xi \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \quad (2.129.)$$

Kraćenjem i sređivanjem dobije se:

$$\xi = 64 \cdot \frac{\eta}{v_{sr} \cdot \rho \cdot d} \quad (2.130.)$$

odnosno:

$$\xi = \frac{64}{\text{Re}} = f(\text{Re}) \quad (2.131.)$$

Prilikom laminarnog strujanja fluida faktor trenja ovisi samo o Reynoldsovoj značajki i može se primijeniti jednadžba (2.131.). Površina cijevi prekrivena je zamišljenim slojem fluida koji praktički miruje, a čija je debljina dovoljno velika da prekriva površinu cijevi, pa nema utjecaja relativne hrapavosti (ε/d). Zbog toga relativna hrapavost površine cijevi nema utjecaja na gubitak energije, odnosno gubitak energije isključivo je posljedica viskoznog trenja. Količina gibanja prenosi se na čvrstu površinu isključivo molekularnim mehanizmom, a analitički izraz za gustoću toka količine gibanja je:

$$\tau = -\eta \frac{dv}{dy} \quad \text{odnosno} \quad \tau = -\nu \frac{d(v\rho)}{dy}.$$

Turbulentno i prijelazno područje

Kod većih brzina strujanja dolazi do formiranja graničnog sloja koji se smanjuje s povećanjem brzine i udaljenošću, što je izraženo lokalnom Reynoldsovom značajkom, Re_x , (jednadžba 2.93.). Budući da je debljina graničnog sloja takva da hrapava površina nije u potpunosti prekrivena laminarnim podslojem, dolazi do izražaja i oblik, odnosno faktor trenja ovisi i o relativnoj hrapavosti (ε/d).

$$\xi = f\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{d}\right) \quad (2.132.)$$

Čestice koje se gibaju vrtložnim mehanizmom mogu doći u kontakt s površinom toka pa se pored mehanizma molekularnog prijenosa količine gibanja javlja i prijenos količine gibanja uzrokovan otporom oblika. Molekularni mehanizam prijenosa prisutan je samo u laminarnom podsloju.

Izrazito turbulentno područje i izrazito hrapave cijevi

Za visoke vrijednosti Re-značajke i izrazito hrapave cijevi vrijedi:

$$\xi = f\left(\frac{\varepsilon}{d}\right) \quad (2.133.)$$

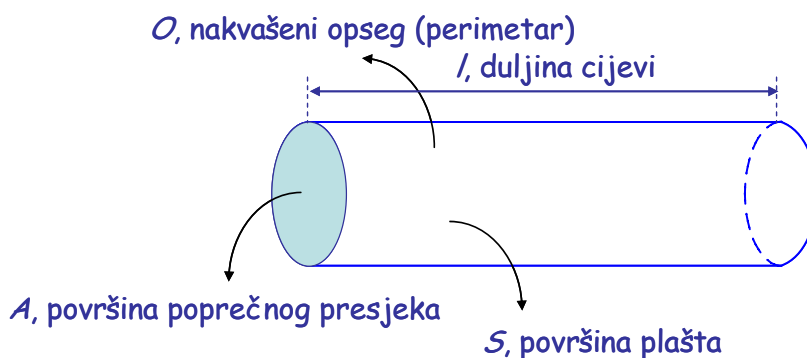
Debljina laminarnog podsloja zanemariva je u odnosu na apsolutnu hrapavost tako da se utjecaj viskoznosti može zanemariti, te faktor trenja ovisi samo o relativnoj hrapavosti cijevi. Količina gibanja prenosi se isključivo vrtložnim mehanizmom (neviskozni fluid).

Tablica 2.2.

	uzrok gubitka energije	mehanizam prijenosa	analitički izraz za gustoću toka	energija koja se gubi
laminarno područje	površinsko trenje	molekularni	$\tau = -\nu \cdot \frac{d(v \cdot \rho)}{dy}$	tlačna
prijelazno i turbulentno područje	preklapanje mehanizama		prevladava $\tau = f\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{d}\right) \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2}$	
izrazito turbulentno područje	hrapavost, otpor oblika	vrtložni	$\tau = f\left(\text{Re}, \frac{\varepsilon}{d}\right) \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2}$	kinetička

2.4.3.4. Gubitak energije pri turbulentnom gibanju tekućine kroz cijev koja nije kružnog presjeka

Dimenzijskom analizom dobivena je Darcy-Weissbachova jednadžba koja omogućava procjenu pada tlaka pri strujanju fluida u cijevi kružnog presjeka. Problem se javlja kada cijevi nisu kružnog presjeka, što znači da je potrebno definirati d .



Slika 2.42. geometrijske karakteristike cijevi kružnog presjeka

Bilanca količine gibanja:

$$\Delta p \cdot A = \tau \cdot S$$

Sa slike 2.42. vidljivo je da se površina plašta S može definirati na sljedeći način:

$$S = O \cdot l \tag{2.133.}$$

gdje je O nakvašeni opseg ili nakvašeni perimetar, a l dužina cijevi pa slijedi:

$$\Delta p \cdot A = \tau \cdot O \cdot l \tag{2.134.}$$

odnosno:

$$\frac{A}{O} = \frac{\tau \cdot l}{\Delta p} \tag{2.135.}$$

A/O se naziva hidraulički radijus I koristi se u američkoj literaturi.

Za cijev kružnog presjeka jednadžba (2.134.) može se pisati na sljedeći način:

$$\Delta p \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} = \tau \cdot d \cdot \pi \cdot l, \tag{2.136.}$$

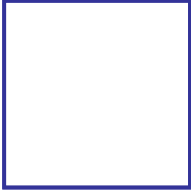

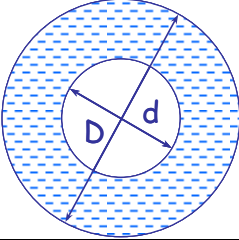
iz čega slijedi:

$$\frac{d}{4} = \frac{\tau \cdot l}{\Delta p} \tag{2.137.}$$

Izjednačavanjem jednadžbe (2.135.) i jednadžbe (2.137.) dobiva se izraz za *ekvivalentni promjer* koji se definira kao omjer između četverostruke površine poprečnog presjeka cijevi i nakvašenog opsega:

$$d_{\text{ekv.}} = 4 \cdot \frac{A}{O} \tag{2.138.}$$

Tablica 2.3. Ekvivalentni promjer za druge poprečne presjeke

		
$d_{ekv} = 4 \cdot \frac{A}{O} = 4 \cdot \frac{a^2}{4 \cdot a} = a$	$d_{ekv} = 4 \cdot \frac{A}{O} = 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2 \cdot a + 2 \cdot b} = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a + b}$	$d_{ekv} = 4 \cdot \frac{A}{O} = 4 \cdot \frac{\left(\frac{D^2 \cdot \pi}{4} - \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \right)}{D \cdot \pi + d \cdot \pi} = D - d$

Darcy Weissbachova jednadžba sada poprima sljedeći oblik:

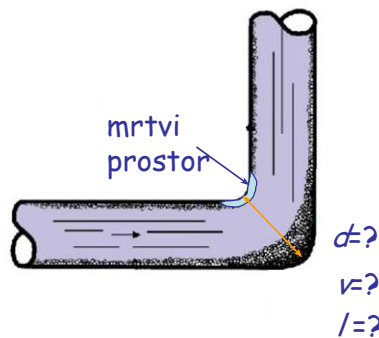
$$\Delta p = \xi \cdot \frac{l}{d_{ekv}} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \quad (2.139.)$$

Reynoldsova značajka definira se na sljedeći način:

$$Re = \frac{v \cdot d_{ekv} \cdot \rho}{\eta} \quad (2.140.)$$

2.4.4. Protjecanje kroz cjevovod

U procesnoj industriji (i u svakodnevnom životu) transport fluida odvija se kroz cjevovod koji se sastoji od ravne cijevi i ugrađenih armaturnih dijelova (ventili, koljena, mjerni instrumenti, suženja, proširenja itd.), a koji uzrokuju dodatni gubitak energije. Konstrukcija armaturnih dijelova je takva da uzrokuje naglu promjenu smjera strujanja i vrtloženje (prisutan je otpor oblika), što uzrokuje dodatni gubitak kinetičke energije. Postavlja se i pitanje kolika je brzina nastujavanja na mjesni otpor, te koliki je stvarni promjer (stvaranje mrtvih prostora), slika 2.43.



Slika 2.43. Pojava mrtvih prostora

Zbog toga se ukupni gubitak energije (pad tlaka) može izraziti kao suma:

$$\Delta p_{UK} = \Delta p_{RC} + \Delta p_A \quad (2.141.)$$

gdje je Δp_{RC} pad tlaka zbog protjecanja kroz ravne cijevi, a Δp_A je pad tlaka zbog protjecanja kroz armaturne dijelove.

Pad tlaka pri protjecanju kroz ravne cijevi definiran je jednadžbom (2.128.):

$$\Delta p_{RC} = \xi \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2}$$

Budući da je kod armature nemoguće definirati promjer, duljinu i faktor trenja, uvodi se faktor mjesnog otpora (ζ), a izraz za pad tlaka armaturnih dijelova poprima sljedeći oblik:

$$\Delta p_A = \zeta \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \quad (2.142.)$$

v - brzina s kojom fluid nastrujava na mjesni otpor.

Iz toga slijedi da je izraz za ukupni pad tlaka kroz cjevovod:

$$\Delta p_{UK} = \xi \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \quad (2.143.)$$

što se može pisati kao:

$$\Delta p_{UK} = \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \cdot \left(\xi \cdot \frac{l}{d} + \sum_{i=1}^n \zeta_i \right) \quad (2.144.)$$

Izjednačavanjem Darcy-Weissbachove jednadžbe i jednadžbe (2.142.):

$$\xi \cdot \frac{l}{d} = \zeta \quad (2.145.)$$

slijedi:

$$l_{ekv.} = \zeta \cdot \frac{d}{\xi} \quad (2.146.)$$

gdje je $l_{ekv.}$ zamišljena duljina ravne cijevi promjera d koja bi pružala isti otpor kao i odgovarajući armaturni dio (slika 2.42.).

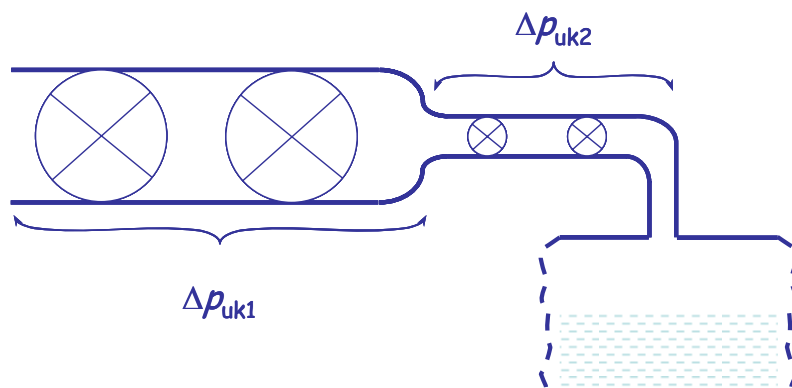


Slika 2.44. Ekvivalentna duljina cijevi

Jednadžba (2.144.) sada se može pisati i u obliku:

$$\Delta p_{UK} = \xi \cdot \frac{l + l_{ekv.}}{d} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \quad (2.147.)$$

Ako su različiti promjeri cijevi (slika 2.45.), mijenja se i brzina strujanja pa je potrebno primijeniti jednadžbu kontinuiteta.



Slika 2.45. Dio cjevovoda s cijevima različitog promjera

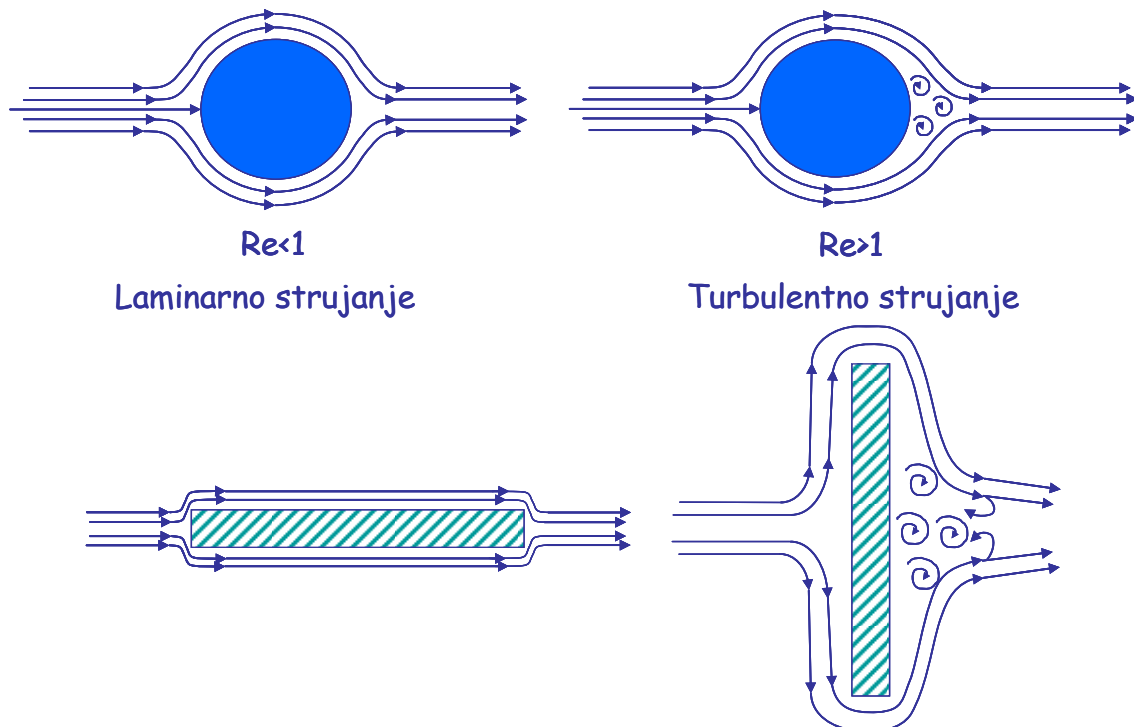
2.5. Optjecanje

Optjecanje je strujanje fluida oko čvrstog tijela. Pojave se praktički ne razlikuju ako je tijelo uronjeno i nepokretno u struji fluida ili se ono giba u mirujućem fluidu, bitno je da postoji relativna brzina između tijela i fluida. Gibanju tijela kroz fluid suprotstavlja se sila koja se naziva hidrodinamički otpor, koji se sastoji od otpora trenja i otpora oblika. Postoje dva granična slučaja (slika 2.44.)

- Isti oblik, različite brzine strujanja (Re)
- Ista brzina strujanja (Re), različit oblik

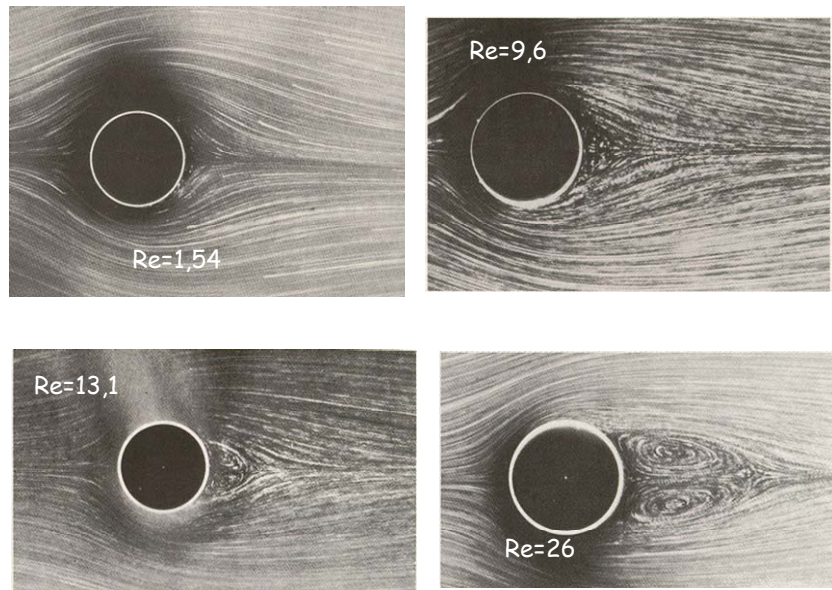
$$Re = \frac{v \cdot d_c \cdot \rho}{\eta}$$

Kod malih Reynoldsa i pogodnog oblika dominira viskozno trenje, međutim uvijek je prisutan i otpor oblika budući da čestice fluida direktno nasmiravaju na čvrsto tijelo. Takvo strujanje naziva se puzeće strujanje (fluid "puze" uz površinu tijela). Kod velikih Reynoldsa i nepogodnog oblika (ploča) dominira otpor oblika. Uslijed inercije čestice fluida, zbog naglog skretanja strujnica, dolazi do otkidanja graničnog sloja. Iza tijela se zadržava nešto fluida koji se intenzivno kovitla budući da je u dodiru sa strujom fluida koji ga tangencijalno dodiruje pri čemu dolazi do određenog prijenosa količine gibanja (dodatni gubitak energije). Za tijela oštih rubova otpor oblika je velik.



Slika 2.46. Granični slučajevi prilikom optjecanja

Na slici 2.47. prikazan je utjecaj brzine strujanja, odnosno Reynoldsove značajke, na strujanje fluida oko mirujućeg cilindra. Može se uočiti da se porastom brzine strujanja povećava turbulencija (vrtloženje) sa stražnje strane cijevi.



Slika 2.47. Strujanje fluida oko mirujućeg cilindra

2.5.1. Ukupni otpor čvrstog tijela pri optjecanju

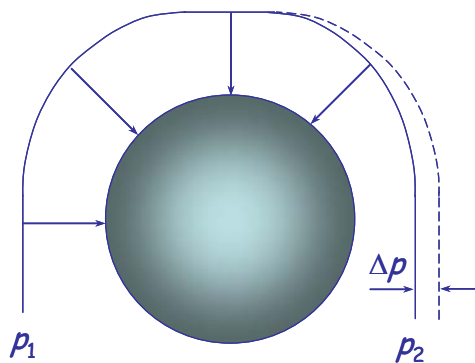
Pri gibanju fluida oko čvrstog tijela (ili obrnuto) javlja se sila otpora (F_D) koja je uzrokovana pojavom viskoznog trenja (zbog svojstva viskoznosti) te otporom koji ovisi o obliku tijela.

$$F_{\text{uk}} = F_D = F_{\text{tr}} + F_i \quad (2.147.)$$

Za razliku od protjecanja, za sve brzine, odnosno Reynoldsove brojeve, kod optjecanja su uvijek prisutna oba otpora (trenje i oblik).

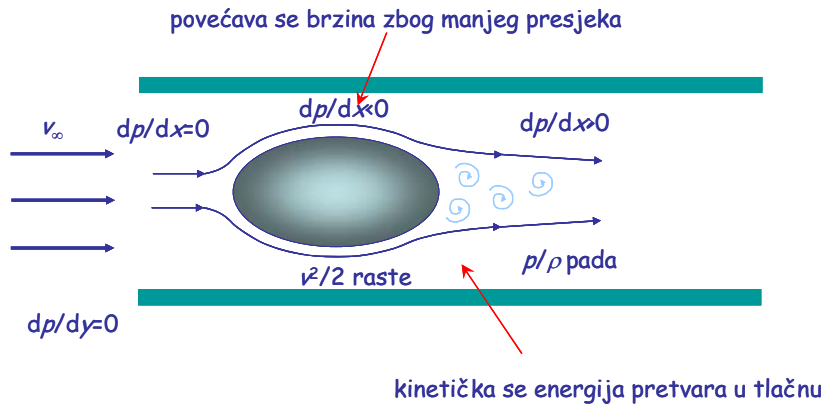
Sila trenja (F_{tr}) - zbog viskoznog trenja dolazi do gubitka energije koji se očituje padom tlaka (gubitak tlačne energije). Pod otporom trenja se podrazumijeva rezultanta svih površinskih sila koje djeluju na površinu tijela u smjeru strujanja fluida. Viskoznost uzrokuje trenje između slojeva fluida i između fluida i površine te taj otpor nazivamo *površinskim trenjem* ili *površinskim otporom*. (engl. *skin friction*)

Sila otpora oblika (F_i) - *inercijski otpor*, *otpor oblika*, gubitak kinetičke energije. Uzrokovan je i ovisan o obliku tijela, a jednak je zbroju svih komponenti tlaka normalnog na površinu tijela. Prevladava kod većih Reynoldsa. (engl. *drag friction*)



Slika 2.48. Gubitak energije kod optjecanja

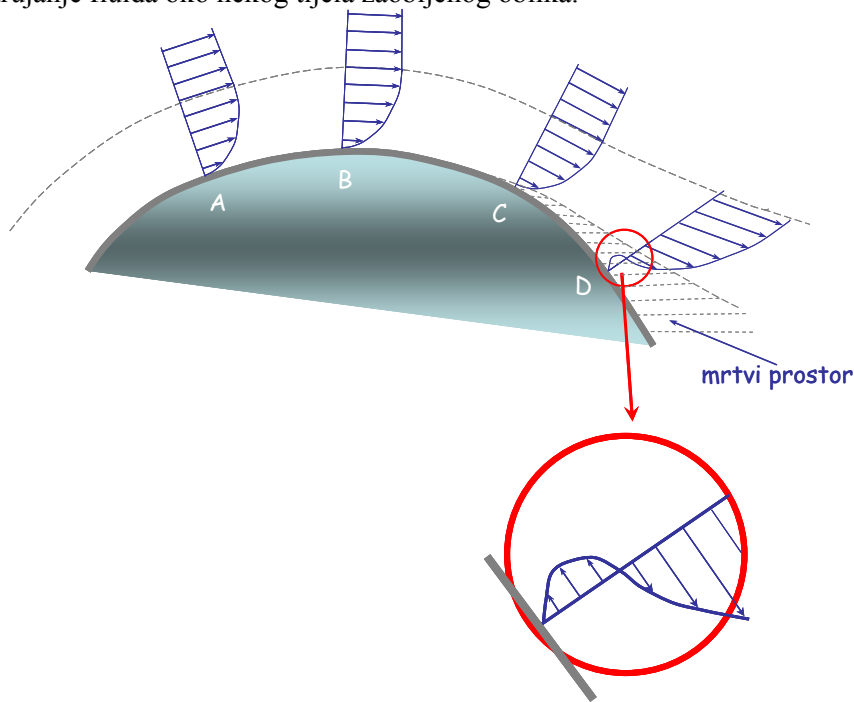
Kada fluid nastruji na tijelo strujnice naglo mijenjaju smjer što rezultira razlikom tlakova ispred i iza tijela (slika 2.48.). Zbog svojstva viskoznosti dolazi do nepovratnog gubitka energije pa preostala kinetička energija nije dovoljna da čestice postignu tlak okoliša (slika 2.49.). Na nekom mjestu kada se sva energija potroši čestica bi se trebala zaustaviti.



2.49. Gradijent tlaka kod optjecanja oko tijela smještenog u cijev

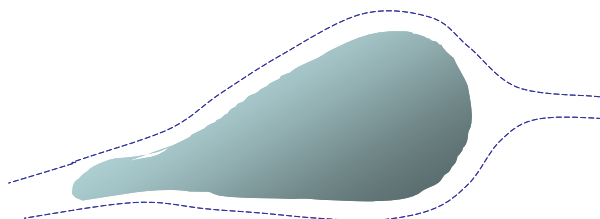
Otkidanje graničnog sloja

Promotrimo strujanje fluida oko nekog tijela zaobljenog oblika.



Slika 2.50. Otkidanje graničnog sloja

U točki C jedan dio fluida miruje ($v=0$). U točki D dolazi do povratnog gibanja jer je tlak okoliša veći što rezultira nastajanjem vrtloga. Zbog svojstva viskoznosti, ostala masa fluida povlači vrtlog polako te se on gubi. Tijela aerodinamičkog oblika (npr. avionsko krilo) nemaju oštre rubove pa strujnice klize preko tijela te nema vrtloženja (slika 2.51.). Za takve oblike je otpor oblike sveden na minimum.



Slika 2.51. Optjecanje oko tijela aerodinamičkog oblika

Ukupni otpor općenito se može pisati kao:

$$F = f \cdot p_k \cdot A$$

gdje je: f faktor ukupnog otpora (eksperimentalno određen),

A je površina - kod malih Reynoldsa to je ukupna površina u dodiru sa strujom fluida
- kod velikih Reynoldsa to je projekcija površine obrnute na smjer strujanja

$$p_k \text{ je kinetički tlak nesmetanog gibanja } p_k = \frac{v_\infty^2 \cdot \rho}{2}$$

Obzirom da je sila jednaka umnošku tlaka i površine na koju taj tlak djeluje, bitno je površinu definirati (površina okomita na smjer strujanja fluida, slika 2.52).

Ukupna sila otpora ovisi o svojstvima tijela i fluida.

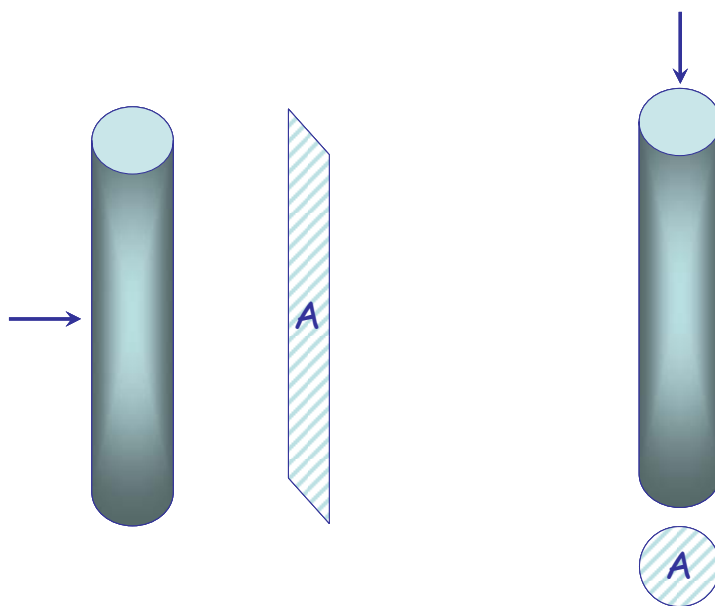
$$F_D = f(v, d, \rho, \eta, \psi) \quad (2.148.)$$

Ovdje je ψ - sfericitet ($\psi \leq 1$) koji se uz:

$$V_{kugle} = V_{tijela} \quad (2.149.)$$

može izračunati prema:

$$\psi = \frac{S_{kugle}}{S_{tijela}} \quad (2.150.)$$



Slika 2.52. Projicirana površina tijela ovisno o smjeru strujanja fluida

Laminarno područje ($Re < 1$)

$$F_{tr} = f_1 \cdot p_k \cdot S \quad (2.151.)$$

gdje je f_1 faktor otpora s obzirom na površinu S .

Stokes je riješio skup diferencijalnih jednačbi koje opisuju pojave pri optjecanju u laminarnom području i dobio izraz za silu otpora kod laminarnog strujanja:

$$F_D = 3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot d \cdot v \quad (2.152.)$$

$$F_D = \underbrace{2 \cdot \pi \cdot \eta \cdot d \cdot v}_{\text{sila trenja}} + \underbrace{\pi \cdot \eta \cdot d \cdot v}_{\text{sila inercije}} \quad (2.153.)$$

Iako se radi o laminarnom području, ukupna sila otpora sastoji se od sile trenja (2/3) i sile otpora oblika (1/3). Dakle, i kod najmanjih brzina strujanja, uvijek je prisutan otpor oblika. To je i bitna razlika u odnosu na protjecanje gdje u laminarnom području otpor oblika nije prisutan.

Prijelazno i turbulentno područje (Re>1)

Odnosi se zbog složenosti rješavaju primjenom dimenzijske analize.

Sila otpora za sva područja Reynoldsovog broja

$$F_D = f(v, \rho, \eta, d, \psi) \tag{2.154.}$$

gdje je ψ sferičnost, a predstavlja odnos površine kugle i površine tijela nepravilnog oblika istog volumena. Primjenom Rayleighove metode slijedi:

$$F_D = k \cdot v^a \cdot \rho^b \cdot \eta^c \cdot d^e \cdot \psi^f \tag{2.155.}$$

Uvode se sljedeće oznake:

M – masa, kg

L – linearna dimenzija, m

T – vrijeme, s

Dimenzijska jednadžba:

$$[M L T^{-2}] = [L T^{-1}]^a \cdot [M L^{-3}]^b \cdot [M L^{-1} T^{-1}]^c \cdot [L]^e \tag{2.156.}$$

Iz jednadžbe (112) slijede tri jednadžbe sa četiri nepoznanice:

$$M: 1 = b + c$$

$$L: 1 = a - 3b - c + e$$

$$T: -2 = -a - c$$

Budući da se u sve tri jednadžbe pojavljuje nepoznanica “c” svi eksponenti izražavaju se preko ove nepoznanice:

$$b = 1 - c$$

$$a = 2 - c$$

$$e = 2 - c$$

Uvrštavanjem eksponenata izraženih preko nepoznanice “c” u jednadžbu (2.155.) dobiva se:

$$F_D = k \cdot v^{2-c} \cdot \rho^{1-c} \cdot \eta^c \cdot d^{2-c} \cdot \psi^f \tag{2.157.}$$

Grupiranjem varijabli istog eksponenta dobijemo:

$$\frac{F_D}{v^2 \cdot \rho \cdot d^2} = k \cdot \left(\frac{\eta}{v \cdot d \cdot \rho} \right)^c \cdot \psi^f \tag{2.158.}$$

U jednadžbi (2.158.) su: $\frac{F}{d^2} = \tau$, $\left(\frac{\eta}{v \cdot d \cdot \rho} \right)^c = \left(\frac{1}{Re} \right)^c$

iz čega slijedi:

$$\tau = f(Re, \psi) \cdot v^2 \cdot \rho \tag{2.159.}$$

Dijeljenjem s $v^2 \cdot \rho$ dobiva se $\frac{\tau}{v^2 \cdot \rho} = \frac{\Delta p}{v^2 \cdot \rho} = Eu = f(Re, \psi)$ što predstavlja korelacijsku jednadžbu

istovjetnu s korelacijskom jednadžbom pri protjecanju, a koja ukazuje na isto značenje: gubitak energije pri protjecanju ovisi o hidrodinamičkim uvjetima i geometrijskim karakteristikama sustava.

Dogovorno je uvedeno da se funkcionalna ovisnost $f(Re, \psi)$ izražava faktorom otpora:

$$f(\text{Re}, \psi) = \frac{C_D}{2} \quad (2.160.)$$

pa jednadžba (2.159.) prelazi u oblik:

$$F_D = C_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \quad (2.161.)$$

To je izraz za silu otpora pri optjecanju koji vrijedi za sve režima strujanja. Površina A predstavlja projiciranu površinu tijela okomitu na smjer strujanja.

Ovisnost faktora otpora o Reynoldsovoj značajci

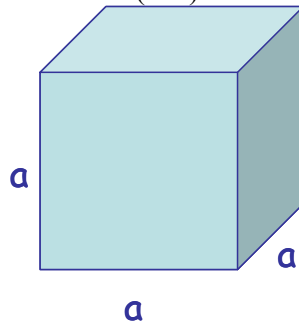
Reynoldsova značajka se za nesferičnu česticu definira na sljedeći način:

$$\text{Re} = \frac{v \cdot d_{\text{ekv}} \cdot \rho}{\eta} \quad (2.162.)$$

gdje je d_{ekv} ekvivalentni promjer, odnosno promjer kugle koja ima isti volumen kao i tijelo nepravilnog oblika:

$$d_{\text{ekv}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot V}{\pi}} \quad (2.163.)$$

gdje je V volumen nepravilnog tijela. Jednadžba (118) izvedena je iz definicije volumena kugle.

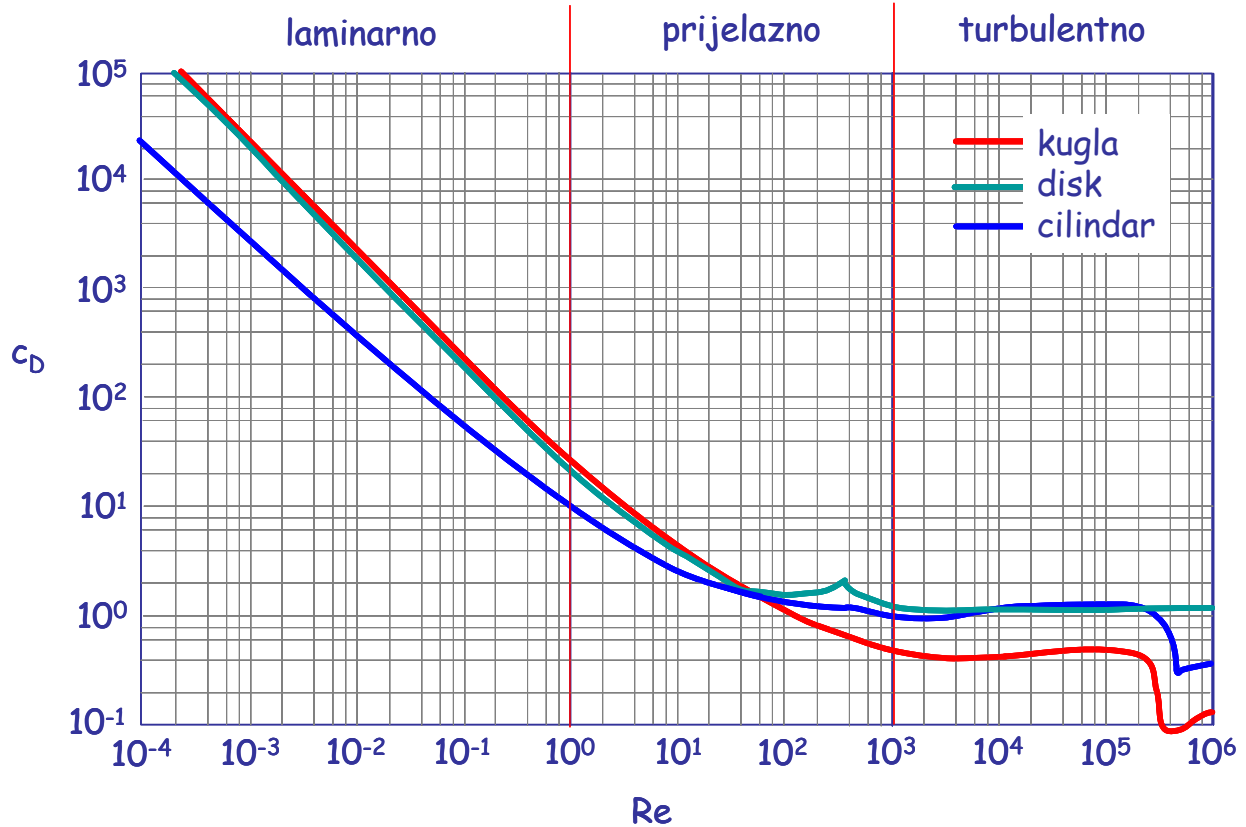


Slika 2.53. Uz ekvivalentni promjer

Tako je na primjer za kocku:

$$V = a^3 \quad (2.164.)$$

$$d_{\text{ekv}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot a^3}{\pi}} \quad (2.165.)$$



Slika 2.54 Ovisnost faktora otpora o Reynoldsovoj značajci

Na slici 2.54. prikazana je ovisnost faktora otpora o Reynoldsovoj značajci za različite geometrijske oblike tijela (kugla, cilindar, ploča).

Laminarno područje

$$Re < 1$$

Količina gibanja se prenosi pretežno molekularnim mehanizmom. Gubitak energije nastaje uslijed površinskog trenja ($2/3$) i manjim dijelom uslijed otpora oblika ($1/3$).

Izjednačavanjem jednadžbe (2.152.) i (2.161.) dobiva se ovisnost faktora otpora u laminarnom području:

$$3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot d \cdot v = C_D \cdot \frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \quad (2.166.)$$

$$C_D = \frac{24 \cdot \eta}{v \cdot d \cdot \rho} \quad (2.166.)$$

$$C_D = \frac{24}{Re} \quad (2.167.)$$

To znači da u laminarnom području nema utjecaja geometrijskog faktora što bi značilo da nije prisutan i otpor oblika, međutim taj otpor je uvijek prisutan. Na slici 4.13. se vidi da postoje odstupanja u ovisnosti.

Prijelazno područje

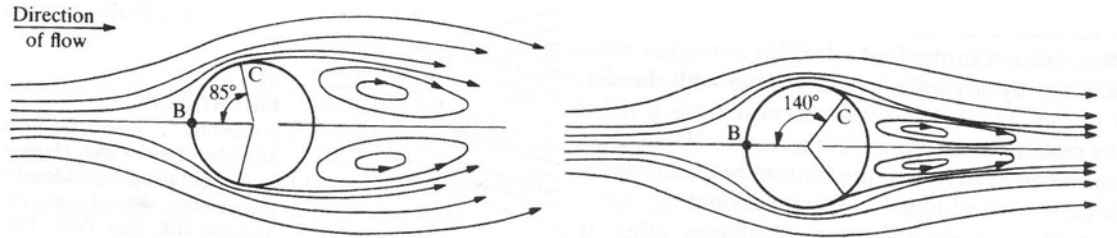
$$1 < Re < 10^3$$

Količina gibanja prenosi se molekularnim i vrtložnim mehanizmom. Dolazi do preklapanja mehanizama prijenosa, a do prijenosa količine gibanja dolazi uglavnom zbog otpora oblika. Kut otkidanja graničnog sloja iznosi 85° . (slika 2.55.)

Područje razvijene turbulencije

$Re > 10^3$

Količina gibanja prenosi se praktički samo vrtložnim mehanizmom tako da su vrijednosti faktora otpora konstantne. Do otkidanja graničnog sloja dolazi zbog trošenja kinetičke energije fluida uz kut otkidanja od 140° (slika 2.55.).



Slika 2.55. Otkidanje graničnog sloja

Za razliku od Moodyjevog dijagrama, ovisnost faktora otpora o Reynoldsovoj značajki je kontinuirana budući da su oba uzroka gubitka energije (površinsko trenje i otpor oblika) istovremeno prisutni u cijelom području Re -značajki.

Tablica 2.4.

Režim strujanja	Re	Sila otpora	Faktor otpora
Laminarno	$Re < 1$	$F_D = 3 \cdot \pi \cdot \eta \cdot d \cdot v$	$c_D = \frac{24}{Re}$
Prijelazno	$1 < Re < 10^3$	$F_D = c_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \rho}{2}$	$c_D = f(Re, \psi)$
Turbulentno	$Re > 10^3$	$F_D = c_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \rho}{2}$	$c_D = f(Re, \psi)$

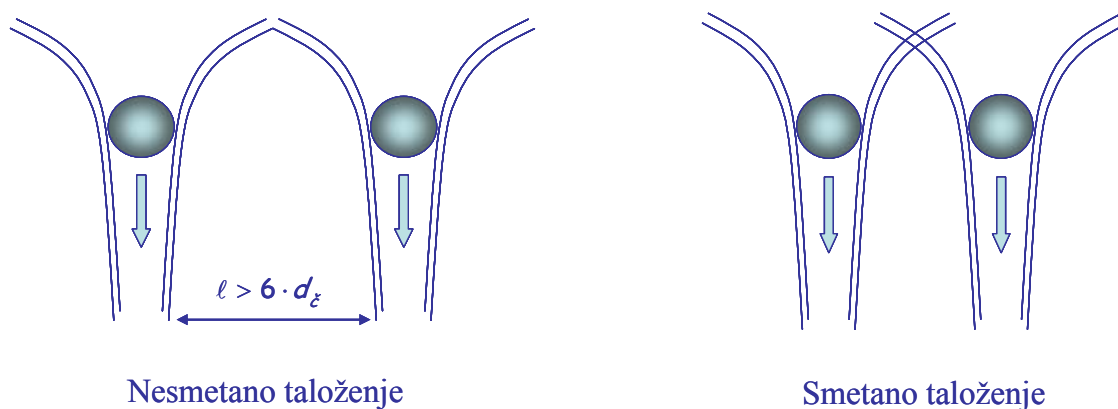
Radi preglednosti u tablici su ovisno o režimu strujanja dani izrazi za silu otpora i faktor otpora.

Tablica 2.5. Neke karakteristične vrijednosti faktora otpora:

$D < L$ $c_D \approx 2$	$c_D = 0,44$	$c_D = 1,20$	$l \approx h$ $c_D \approx 0,6$

2.5.2. Brzina gibanja čestica (fluida)

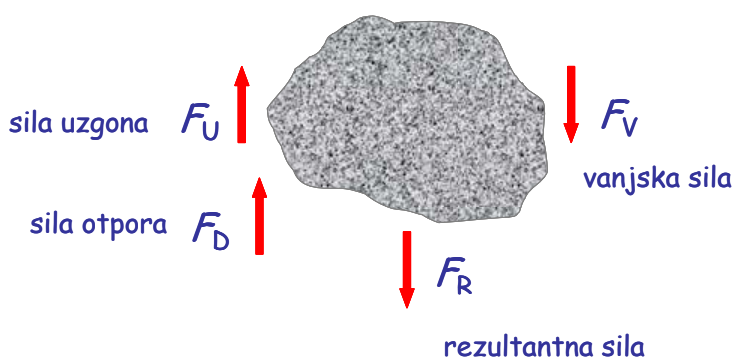
Za provedbu važnih mehaničkih operacija izuzetno je važno poznavati brzinu gibanja čestica (bilo pod djelovanjem sile teže, centrifugalne sile itd.)



Slika 2.56. Nesmetano i smetano taloženje čestica

Za gibanje samo jedne čestice u beskonačno velikom volumenu fluida, ili ako su čestice dovoljno udaljene tako da ne dolazi do preklapanja brzinskih profila, taloženje se smatra *nesmetanim*. U protivnom imamo *smetano* taloženje. Kod smetanog taloženja sile trenja se mijenjaju zbog preklapanja strujnica. Općenito se smatra da je taloženje nesmetano ako je $l > 6d_c$.

Promatrajmo nesmetano taloženje čestice u fluidu. Da bi se ustanovili odnosi između sila koje vladaju na česticu koja se giba u fluidu, postavlja se bilanca sila.



Slika 2.57. Sile koje vladaju na česticu u gibanju

- rezultantna sila:
$$F_R = m \cdot \frac{dv}{dt} \quad (2.168.)$$

- vanjska sila koja uzrokuje gibanje:
$$F_v = m \cdot a \quad (2.169.)$$

- sila uzgona:
$$F_u = m_{\text{fluida}} \cdot a = \frac{m_{\text{čestice}}}{\rho_{\text{čestice}}} \cdot \rho_{\text{fluida}} \cdot a \quad (2.170.)$$

- sila otpora:
$$F_D = C_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} = C_D \cdot \underbrace{\frac{d^2 \cdot \pi}{4} \cdot \frac{v^2 \rho}{2}}_{\text{za kuglu}} \quad (2.171.)$$

Prema zakonu očuvanja količine gibanja vrijedi:
$$\sum_{i=1}^N F_i = 0$$

Bilanca sila:

$$m_{\varepsilon} \cdot \frac{dv}{dt} = m_{\varepsilon} \cdot a - \frac{m_{\varepsilon}}{\rho_{\varepsilon}} \cdot \rho_f \cdot a - c_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \cdot \rho_f}{2} / \div m_{\varepsilon} \quad (2.172.)$$

Sređivanjem gornjeg izraza dpbiva se:

$$\frac{dv}{dt} = a - \frac{\rho_f}{\rho_{\varepsilon}} \cdot a - c_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \cdot \rho_f}{2 \cdot m_{\varepsilon}} \quad (2.173.)$$

Odnosno:

$$\frac{dv}{dt} = a \cdot \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_{\varepsilon}}\right) - c_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \cdot \rho_f}{2 \cdot m_{\varepsilon}} \quad (2.174.)$$

Nakon određenog vremena dolazi do uravnoteženja sila i brzina postaje konstantna tj. gibanje postaje stacionarno $\left(\frac{dv}{dt} = 0\right)$. Gibanje čestica se odvija samo pod utjecajem gravitacije ($a = g$).

$$\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_{\varepsilon}}\right) \cdot g = c_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \cdot \rho_f}{2 \cdot m_{\varepsilon}} \quad (2.175.)$$

Za kuglu vrijedi:

$$A = \frac{d^2 \cdot \pi}{4}, \text{ pa je:}$$

$$m_{\varepsilon} = V_{\varepsilon} \cdot \rho_{\varepsilon} = \frac{d_{\varepsilon}^3 \cdot \pi}{6} \cdot \rho_{\varepsilon} \quad (2.176.)$$

Uvrštenjem izraza za površinu i masu čestica u bilancu sila, dobiva se izraz za brzinu koji vrijedi za sve Reynoldsove brojeve (cijelo područje brzina):

$$v = \sqrt{\frac{4 \cdot d_{\varepsilon} \cdot (\rho_{\varepsilon} - \rho_f) \cdot g}{3 \cdot \rho_f \cdot c_D}} \quad (2.177.)$$

Uzme li se u obzir ovisnost faktora otpora o Re -značajci u laminarnom području (jednadžba 2.167.):

$$c_D = \frac{24}{Re} = \frac{24 \cdot \eta}{v \cdot d_{\varepsilon} \cdot \rho_f} \quad (2.178.)$$

dobiva se *Stokesov zakon* za brzinu padanja čestica u laminarnom području pod djelovanjem gravitacijskog polja:

$$v = \frac{d_{\varepsilon}^2 \cdot (\rho_{\varepsilon} - \rho_f) \cdot g}{18 \cdot \eta} \quad (2.179.)$$

Za tijelo koje nije kugla uvrštava se ekvivalentni promjer.

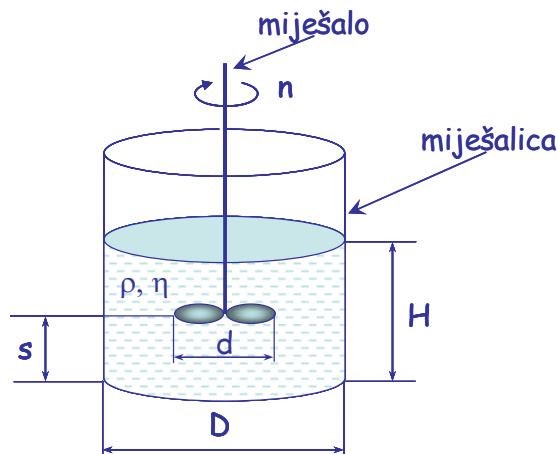
2.6. Strujanje u miješalici

Teorija prijenosa količine gibanja pri strujanju u miješalici također je temelj pojedinih jediničnih operacija (miješanje kapljevina, suspendiranje, kristalizacija, ekstrakcija).

Miješanje je operacija kojom se u određenim uvjetima želi postići u materijalu jednoliko raspodjeljivanje u mehaničkom, toplinskom i koncentracijskom smislu.

Miješanje je jedinična operacija čija je svrha povećanje homogenosti sustava (koncentracija, temperatura) kako bi se ostvario željeni procesni rezultat. Miješanje je prisutno u mnogim industrijskim granama (prehrambena, farmaceutska, kemijska, petrokemijska i kozmetička industrija, u proizvodnji bojila, papira, obradi otpadnih voda). Dakle, uključuje miješanje homogenih (dvije mješljive kapljevine) i heterogenih sustava (čvrsto-kapljevito ili dvije nemješljive kapljevine). Ovisno o proizvodu mijenja se i potreban intenzitet miješanja (stupanj izmiješanosti) te vrijeme potrebno da se postigne željeni stupanj homogenosti. Obzirom na široku primjenu postoji velik broj uređaja za

miješanje projektiranih za osiguravanje željenog procesnog rezultata. *Miješalica* može biti bilo koji reaktor ili posuda u koju je uronjeno *miješalo*.



Slika 2.58. geometrijske karakteristike miješalice

Ovdje su:

n – broj okretaja miješala, min⁻¹

H – visina kapljevine u miješalici, m

D – promjer posude, m

d – promjer miješala, m

s – udaljenost miješala od dna posude, m

Geometrijske karakteristike miješalice definirane su odnosima između geometrijskih dimenzija posude i miješala, tzv. *simpleksima*:

$$S_1 = \frac{H}{d} \quad S_2 = \frac{D}{d} \quad S_3 = \frac{s}{d}$$

Sa stanovišta prijenosa količine gibanja potrebno je utvrditi gustoću toka količine gibanja koji se prenosi te na taj način utvrditi odnose između energije potrebne za miješanje (ili snage) i parametara koji utječu na ponašanje sustava. Zbog kompleksnosti odnosa potrebno je primjeniti dimenzijsku analizu.

Na temelju eksperimenta utvrđena je sljedeća ovisnost:

$$\frac{E}{t} = P = f(n, t, \eta, \rho, S_1, S_2, S_3, g) \quad (2.180.)$$

Dimenzijskom analizom dobivena je ovisnost:

$$Eu_M = f(Re_M, Fr_M, S_1, S_2, S_3) \quad (2.181.)$$

Zbog kružnog gibanja čestica fluida uvode se modificirane značajke.

Reynoldsova značajka za pravocrtno gibanje:

$$Re = \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\eta} \quad (2.182.)$$

Umjesto brzine pravocrtnog gibanja uvodi se obodna brzina:

$$v = d \cdot \pi \cdot n \quad (2.183.)$$

te slijedi:

$$Re = \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\eta} = \frac{d \cdot \pi \cdot n \cdot d \cdot \rho}{\eta} \quad (2.184.)$$

$$Re = \frac{n \cdot d^2 \cdot \rho}{\eta} \quad (2.185.)$$

(Konstanta π ulazi u vrijednost značajke).

Eulerova značajka (značajka snage) izvodi se na istovjetni način:

$$Eu = \frac{\Delta p}{v^2 \cdot \rho} = \frac{\Delta p \cdot \dot{V}}{v^2 \cdot \rho \cdot \dot{V}} \quad (2.186.)$$

Snaga predstavlja utrošenu energiju u jedinici vremena:

$$P = \frac{E}{t} = \frac{F \cdot l}{t} = F \cdot v \quad (2.187.)$$

Energija se može izraziti kao:

$$E = \Delta p \cdot V \quad [J] = [Pa \cdot m^3] = \left[\frac{N}{m^2} \cdot m^3 \right] = [N \cdot m] \quad (2.188.)$$

Uvrštenjem u izraz za snagu (2.187.), dobiva se:

$$P = \frac{\Delta p \cdot V}{t} \quad (2.189.)$$

Volumni protok je jednak:

$$\dot{V} = v \cdot A \quad (2.190.)$$

Za kružno gibanje:

$$\dot{V} = d \cdot \pi \cdot n \cdot d^2 \quad (2.191.)$$

Uvrštenjem u izraz za Eulerovu značajku dobiva se:

$$Eu = \frac{\Delta p \cdot \dot{V}}{g \cdot v^2 \cdot \dot{V}} = \frac{P}{g \cdot (d \cdot \pi \cdot n)^2 \cdot d^2 \cdot d \cdot \pi \cdot n} \quad (2.192.)$$

odnosno:

$$Eu_M = \frac{P}{g \cdot n^3 \cdot d^5} \quad (2.193.)$$

Pri miješanju se zbog strujanja kapljevine i u vertikalnom smjeru mora uzeti u obzir i utjecaj sile gravitacije koja je izražena *Froudeovom značajkom*. Froudeova značajka definira se kao odnos sile inercije i sile gravitacije.

$$Fr = \frac{F_i}{F_g} = \frac{m \cdot a}{m \cdot g} = \frac{\frac{v^2}{\ell}}{g} = \frac{v^2}{\ell \cdot g} \quad (2.194.)$$

Odnosno:

$$Fr = \frac{v^2}{d \cdot g} \quad (2.195.)$$

Uvrštenjem obodne brzine dobiva se:

$$Fr = \frac{v^2}{d \cdot g} = \frac{(d \cdot \pi \cdot n)^2}{d \cdot g} \quad (2.196.)$$

$$Fr_M = \frac{n^2 d}{g} \quad (2.197.)$$

Bezdimenzijska korelacijska jednadžba se sada može napisati:

$$Eu_M = k \cdot Re_M^m \cdot Fr_M^n \quad (2.198.)$$

Uvjet da miješanje bude efikasno je da nema vrtloga. U tom slučaju je $n=0$ te se eliminira Fr -značajka pa jednadžba (2.193.) poprima sljedeći oblik:

$$Eu_M = k \cdot Re_M^m \quad (2.199.)$$

Značenje Eulerove značajke (značajke snage)

Ranije se pokazalo da je Eulerova značajka jednaka:

Eulerova značajka predstavlja mjeru utrošene energije i direktno je povezana sa faktorom otpora.

$$Eu_M = N_P = \frac{P}{\rho \cdot n^3 \cdot d^5} \quad (2.200.)$$

Za kružno gibanje jednadžba 2.187. može se napisati na sljedeći način:

$$P = F_D \cdot d \cdot \pi \cdot n \quad (2.201.)$$

Uvođenjem izraza za silu otpora:

$$F_D = C_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \quad (2.202.)$$

$$Eu_M = \frac{F_D \cdot d \cdot \pi \cdot n}{\rho \cdot n^3 \cdot d^5} = \frac{C_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \cdot d \cdot \pi \cdot n}{\rho \cdot n^3 \cdot d^5} = \frac{C_D \cdot d^2 \cdot \frac{(d \cdot \pi \cdot n)^2 \cdot \rho}{2} \cdot d \cdot \pi \cdot n}{\rho \cdot n^3 \cdot d^5} \quad (2.203.)$$

$$Eu_M = \frac{C_D \cdot \pi^3}{2} = k \cdot C_D \quad (2.204.)$$

Iz jednadžbe (2.204.) vidljivo je da je Eulerova značajka (značajka snage) direktno proporcionalna faktoru otpora tako da se umjesto ovisnosti faktora otpora o *Re*-značajci može grafički prikazati ovisnost *Eu*-značajke o *Re*-značajci.

(Eulerova značajka se naziva i značajka snage i označava se s N_P). Vidljivo je (slika 2.59.) da kao i kod protjecanja i optjecanja, faktor otpora (odnosno Eu_M -značajka) opadaju s povećanjem *Re*-značajke te u razvijenom turbulentnom području poprimaju konstantnu vrijednost. Ako se usporede jednadžbe 2.194. i 2.200. za odgovarajuće režime strujanja vrijede sljedeće ovisnosti:

- LAMINARNO PODRUČJE ($Re < 20$)

$$c_D = \frac{70}{Re}$$

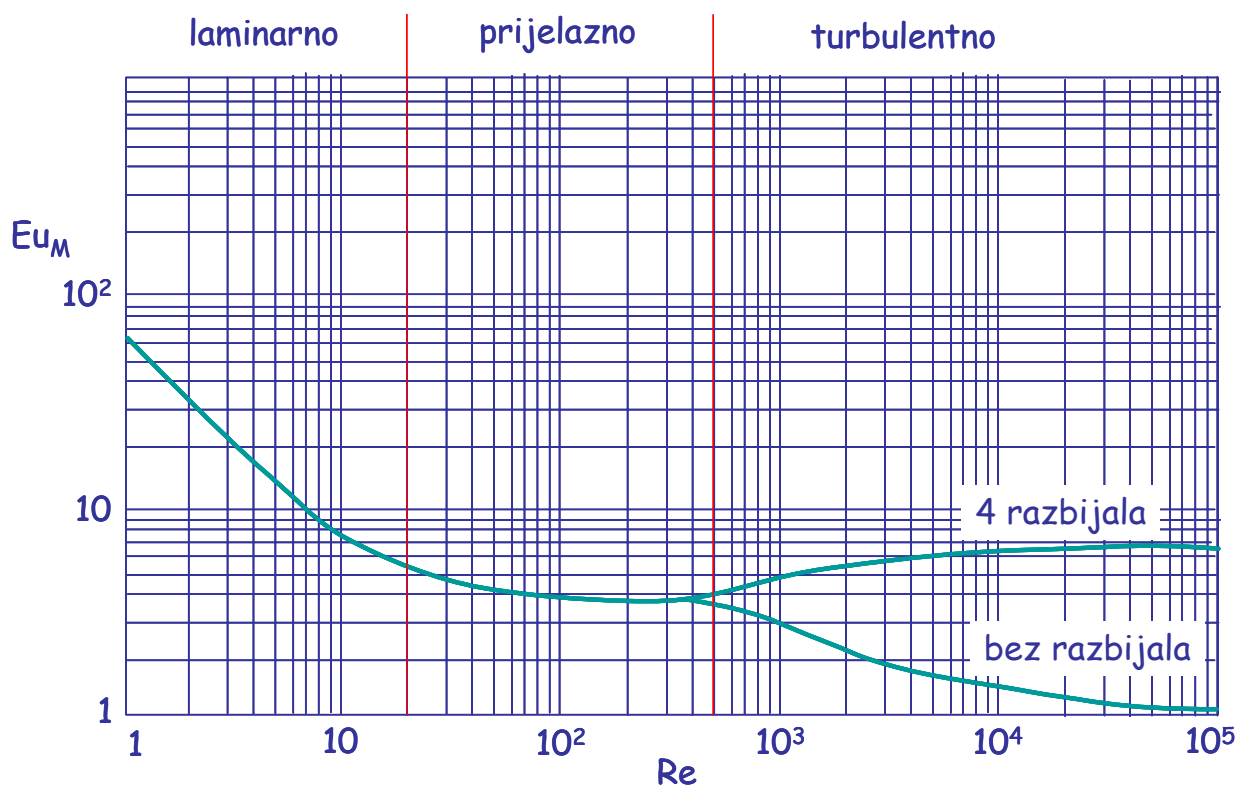
- PRIJELAZNO PODRUČJE ($20 < Re < 500$)

$$c_D = f(Re, geometrija)$$

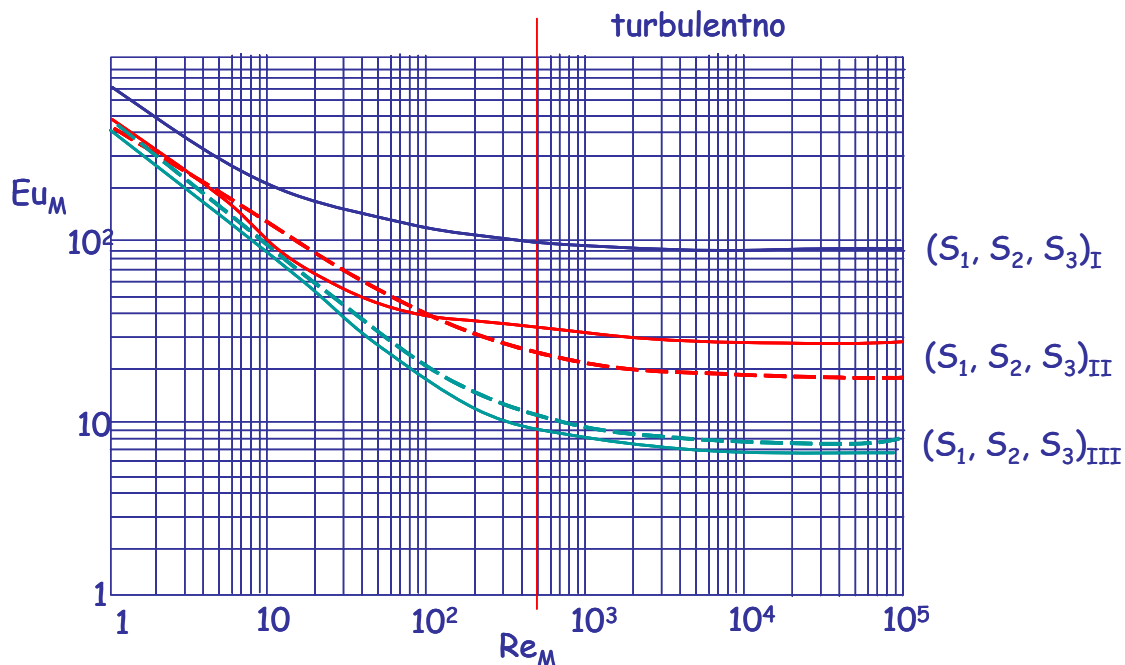
- TURBULENTNO PODRUČJE ($Re > 500$)

$$c_D = f(Re, geometrija)$$

Za različite geometrijske karakteristike miješalica postoji i odgovarajuća funkcionalna ovisnost što je prikazano dijagramom na slici 2.60.



Slika 2.59. Ovisnost značajke snage o Re-značajci

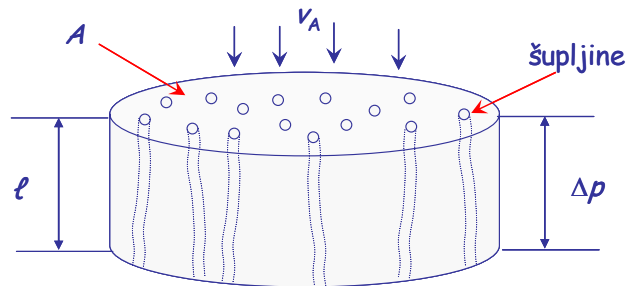
Slika 2.60. Utjecaj geometrijskih karakteristika na funkcionalnu ovisnost $Eu_M=f(Re_M)$

2.7. Strujanje kroz poroznu sredinu

Kako je već navedeno u više navrata, teorija prijenosa količine gibanja temelj je brojnih jediničnih operacija u kojima postoji strujanje kroz sloj čestica (filtracija, fluidizacija, taloženje).

Zamislamo sloj čestica koji se sastoji od čestica različitih veličina i oblika pri čemu postoji veliki broj nepravilnih pora različitih dužina i promjera kroz koje fluid struji brže ili sporije što ovisi o pokretačkoj sili koja uzrokuje strujanje (razlika tlakova) te o otporu koji pruža sam sloj. Ako su čestice krupne, tada sloj sadrži široke pore i otpor takvog sloja je relativno malen, a strujanje može biti laminarno i turbulentno. Međutim, ako je sloj sastavljen od finih čestica i pore su vrlo uske čak, i kapilarne, te predstavljaju veliki otpor strujanju, brzina strujanja je malena te je u ovom slučaju strujanje praktički uvijek laminarno. Budući da su u takvom sloju pore vrlo nepravilne, pune izbočina i zakrivljenja, može se na temelju ranijih razmatranja zaključiti da do energetske gubitaka dolazi i zbog površinskog (viskoznog) trenja i zbog otpora uslijed oblika. Očito je da su u ovom slučaju prisutni i učinci protjecanja i optjecanja. Dakle, do gubitka energije dolazi zbog otpora trenja i otpora oblika:

$$F_D = \xi \cdot A \cdot \frac{\ell}{d} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \qquad F_D = c_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2}$$

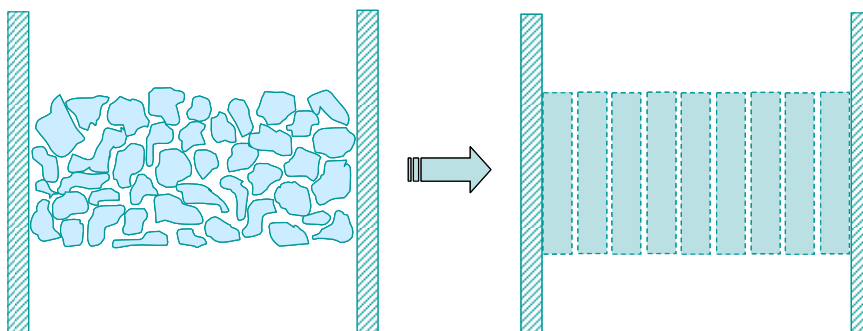


Slika 2.61. Strujanje kroz poroznu sredinu

Temeljni je, međutim, ovdje problem kako odrediti geometrijske karakteristike nekog poroznog sloja, budući da je vrlo teško odgovoriti:

- kolika je duljina pora (kapilara), l
- koliki je njihov promjer, d_{ekv}
- kolika je veličina čestica od kojih je sastavljen sloj, d_ξ
- kolika je specifična površina čestica, S_V
- koliki je broj tih čestica, n
- kolika je brzina strujanja u poroznom sloju, v

U svrhu pojednostavljenja, stvarni sustav sa česticama i nepravilnog oblika i različitih veličina se zamjenjuje idealiziranim, od kojeg su pore cilindričnog oblika i iste veličine, jednoliko raspodijeljene (slika 2.62.).



Slika 2.62. Stvarni i idealizirani sloj čestica

Za definiranje poroznog sloja primjenjuju se pristupačne, mjerljive veličine, koje u sebi uključuju sve navedene geometrijske karakteristike:

- poroznost sloja (ε), definira se kao udio šupljina (pora) u poroznom sloju

$$\varepsilon = \frac{V_{SL} - V_{\check{c}}}{V_{SL}} = \frac{V_{\check{s}}}{V_{SL}} = \frac{V_P}{V_{SL}} \quad (2.205.)$$

$$1 - \varepsilon = \frac{V_{\check{c}}}{V_{SL}} \quad (2.206.)$$

$$V_{\check{c}} = (1 - \varepsilon) \cdot V_{SL} \quad (2.207.)$$

gdje je V_{SL} volumen sloja, $V_{\check{c}}$ volumen čvrste faze, a $V_{\check{s}}$ volumen šupljina.

- broj čestica

$$n = \frac{\text{volumen svih čestica}}{\text{volumen jedne čestice}} \quad (2.208.)$$

$$n = \frac{(1 - \varepsilon) \cdot V_{SL}}{V_{\text{jedne čestice}}} = \frac{A_{SL} \cdot l \cdot (1 - \varepsilon)}{\frac{d_{\check{c}}^3 \cdot \pi}{6}} \quad (2.209.)$$

$$\text{gdje je } \frac{d_{\check{c}}^3 \cdot \pi}{6} = V_{\text{sfer e}} \quad (2.210.)$$

- promjer pora

Budući da su pore nepravilnog oblika, te geometrijski oblik poprečnog presjeka pore nije krug, uvodi se ekvivalentni promjer pora:

$$d_{\text{ekv}} = 4 \cdot \frac{A_P}{O} = 4 \cdot \frac{A_P}{O} \cdot \frac{l}{l} = 4 \cdot \frac{V_P}{S_{UK}} = 4 \cdot \frac{\frac{V_P}{V_{SL}}}{\frac{S_{UK}}{V_{SL}}} \quad (2.211.)$$

gdje je A_P površina poprečnog presjeka pora.

$$d_{\text{ekv}} = 4 \cdot \frac{\varepsilon}{S_V} \quad (2.212.)$$

- specifična površina (cjelokupna slobodna površina unutar sloja izražena po jedinici volumena sloja)

$$S_V = \frac{S_{UK}}{V_{SL}} = \frac{n \cdot S_{\text{jedne čestice}}}{V_{SL}} = \frac{\frac{A_{SL} \cdot l \cdot (1 - \varepsilon)}{\frac{d_{\check{c}}^3 \cdot \pi}{6}} \cdot d_{\check{c}}^2 \cdot \pi}{A_{SL} \cdot l} \quad (2.213.)$$

$$S_V = \frac{6 \cdot (1 - \varepsilon)}{d_{\check{c}}} \quad (2.214.)$$

Kombinacijom izraza 2.112. i 2.114. dobiva se za ekvivalentni promjer:

$$d_{\text{ekv}} = 4 \cdot \frac{\varepsilon}{S_V} = 4 \cdot \frac{\varepsilon}{\frac{6 \cdot (1 - \varepsilon)}{d_{\check{c}}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\varepsilon \cdot d_{\check{c}}}{1 - \varepsilon} \quad (2.215.)$$

- površinska brzina (v_A) je brzina kojom suspenzija nastrojava na površinu filtarskog sredstva (A). Na taj način može se izraziti brzina strujanja kroz porozni sloj. Iz jednadžbe kontinuiteta:

$$\dot{V}_P = \dot{V}_{SL} \quad (2.216.)$$

$$\dot{V} = v \cdot A_P = v_A \cdot A_{SL} \quad (2.217.)$$

$$v = v_A \cdot \frac{A_{SL} \cdot l}{A_P \cdot l} = v_A \cdot \frac{V_{SL}}{V_P} \quad (2.218.)$$

$$v = \frac{v_A}{\varepsilon} \quad (2.219.)$$

Sve su glavne karakteristike izražene pomoću dvije osnovne veličine, poroznost sloja čestica, ε , i promjer čestica, d_c , odnosno S_v . Debljina sloja je nezavisna veličina koja ne utječe na unutrašnju strukturu sloja čestica.

Na temelju zakona o očuvanju količine gibanja postavlja se bilanca sila, te se izjednačuju pokretačka sila (sila tlaka) i sila otpora:

$$\Delta p \cdot A_p = n \cdot F_D \quad (2.220.)$$

Na temelju tako izraženih geometrijskih karakteristika poroznog sloja i izraza za silu otpora pri optjecanju dolazi se do opće jednadžbe za pad tlaka pri strujanju kroz poroznu sredinu.

$$\Delta p \cdot A_{SL} \cdot \varepsilon = \frac{A_{SL} \cdot l \cdot (1 - \varepsilon)}{d_c^3 \cdot \pi} \cdot C_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \quad (2.221.)$$

$$\Delta p \cdot \varepsilon = \frac{l \cdot (1 - \varepsilon)}{d_c^3 \cdot \pi} \cdot C_D \cdot \frac{d_c^2 \cdot \pi}{4} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{\varepsilon^2 \cdot 2} \quad (2.222.)$$

$$\Delta p = \frac{3}{2} \cdot \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon^3} \cdot C_D \cdot \frac{l}{d_c} \cdot \frac{v_A^2 \cdot \rho}{2} \quad (2.223.)$$

gdje je C_D faktor otpora strujanju kroz porozni sloj.

Jednadžba (2.223.) omogućava procjenu pada tlaka pri strujanju kroz porozni sloj bez obzira radi li se o širokim ili uskim porama.

Ova jednadžba podsjeća na *Darcy-Weissbachovu*, a razlikuje se zbog složene geometrijske strukture sloja.

2.7.1. Strujanje kroz uske pore

Ranije je spomenuto da je kod poroznih slojeva, koji su sastavljeni od sitnih čestica, zbog velikog otpora brzina strujanja kroz pore vrlo mala, te je i strujanje laminarno. Na temelju tih činjenica nameće se pretpostavka da se faktor otpora može izvesti na sličan način kao i kod protjecanja $\left(\xi = \frac{64}{\text{Re}}\right)$ i optjecanja $\left(C_D = \frac{24}{\text{Re}}\right)$.

Pri strujanju kroz porozni sloj Reynoldsova značajka izražava se u modificiranom obliku budući da uzima u obzir složene geometrijske karakteristike:

$$\text{Re}' = \frac{v \cdot d_{\text{ekv}} \cdot \rho}{\eta} = \frac{v_A \cdot \frac{2}{\varepsilon} \cdot \frac{d_c \cdot \varepsilon}{3 \cdot (1-\varepsilon)} \cdot \rho}{\eta} \quad (2.224.)$$

Ako se uvrsti izraz 2.215. za ekvivalentni promjer, dobiva se:

$$\text{Re}' = \frac{2 \cdot d_c \cdot v_A \cdot \rho}{3 \cdot (1-\varepsilon) \cdot \eta} \quad (2.225.)$$

Uzme li se u obzir da je kod strujanja kroz cijev, faktor otpora:

$$\xi = \frac{64}{\text{Re}'}$$

uvrštanjem u opći izraz za strujanje kroz poroznu sredinu (jednadžba 2.223.) dobiva se:

$$\Delta p = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{64}{\frac{v_A \cdot d_c \cdot \rho}{\eta \cdot (1-\varepsilon)}} \cdot \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} \cdot \frac{\ell}{d_c} \cdot \frac{v_A^2 \cdot \rho}{2} / \div \ell \quad (2.226.)$$

$$\frac{\Delta p}{\ell} = 72 \cdot \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \cdot \frac{v_A \cdot \eta}{d_c^2} \quad (2.227.)$$

Eksperimentalno je međutim utvrđeno da se u slučaju, kada je porozni sloj sačinjen od sferičnih čestica, faktor otpora može izračunati iz jednadžbe:

$$C_D = \frac{160}{\text{Re}'} \quad (2.228.)$$

(Umjesto konstante 64 uvrštava se konstanta 160).

Uvrštavanjem u opću jednadžbu za pad tlaka dobiva se:

$$\frac{\Delta p}{\ell} = 180 \cdot \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \cdot \frac{v_A \cdot \eta}{d_c^2} \quad (2.229.)$$

Ova jednadžba poznata je po svojim autorima i naziva se *Carman-Kozenyjevom* jednadžbom i vrijedi za sferične čestice.

2.7.2. Strujanje kroz široke pore

U slučaju kada je porozni sloj sačinjen od krupnih čestica otpori strujanju su srazmjerno mali (međuprostori su većeg promjera), brzina strujanja fluida je velika te je i strujanje turbulentno. U ovim uvjetima strujanja kroz porozni sloj, *Burke* i *Plummer* su utvrdili da je vrijednost faktora otpora konstantna i da iznosi:

$$C_D = 2,3$$

Uvrštavanjem u jednadžbu 2.223. dobiva se:

$$\frac{\Delta p}{l} = 1,75 \cdot \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} \cdot \frac{v_A^2 \cdot \rho}{d_c} \quad (2.230.)$$

Izvedene jednadžbe (2.229.) i (2.230.) predstavljaju izraze za pad tlaka (gubitak energije) u graničnim uvjetima (za laminarno ili za turbulentno strujanje). Budući da su u velikom broju slučajeva prisutna oba mehanizma, ukupan pad tlaka dobiva se zbrajanjem jednadžbi, te se dobiva *Ergunova jednadžba*:

$$\frac{\Delta p}{l} = 180 \cdot \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \cdot \frac{v_A \cdot \eta}{d_c^2} + 1,75 \cdot \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon^3} \cdot \frac{v_A^2 \cdot \rho}{d_c} \quad (2.231.)$$

Pomnoži li se Ergunova jednadžba sa $\left(\frac{d_c}{\rho \cdot v_A^2} \cdot \frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon}\right)$ i pregrupiraju članovi tako da se dobiju bezdimenzijske grupe, slijedi izraz:

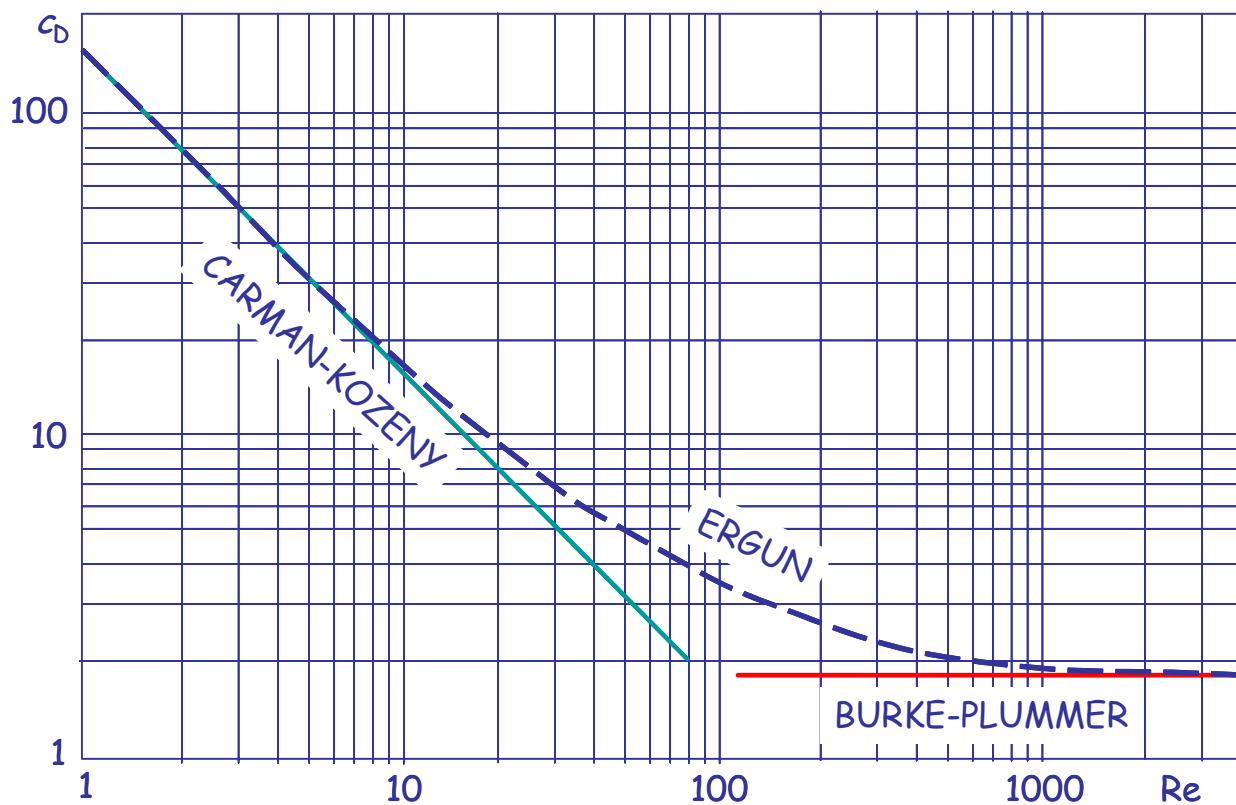
$$\left(\frac{\Delta p}{\rho \cdot v_A^2}\right) \cdot \left(\frac{d_c}{l}\right) \cdot \left(\frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon}\right) = 180 \cdot \frac{(1-\varepsilon) \cdot \eta}{\rho \cdot v_A \cdot d_c^2} + 1,75 \quad (2.232.)$$

odnosno:

$$\left(\frac{\Delta p}{\rho \cdot v_A^2}\right) \cdot \left(\frac{d_c}{l}\right) \cdot \left(\frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon}\right) = 180 \cdot \frac{(1-\varepsilon)}{Re} + 1,75 \quad (2.233.)$$

Iz općeg izraza za pad tlaka (jednadžba 2.223.) slijedi:

$$\frac{3}{4} \cdot C_D = \left(\frac{\Delta p}{\rho \cdot v_A^2}\right) \cdot \left(\frac{d_c}{l}\right) \cdot \left(\frac{\varepsilon^3}{1-\varepsilon}\right) \quad (2.234.)$$



Slika 2.63. Grafički prikaz ovisnosti faktora otpora o Re^3

Pregrupiravanjem članova u Ergunovoj jednadžbi te povezivanjem jednadžbi dobiva se pogodan oblik izražavanja faktora otpora za sloj sastavljen od sferičnih čestica:

$$\frac{3}{4}C_D = 180 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{Re'} + 1,75 \quad (2.235.)$$

Odnosno:

$$C_D = \frac{160}{Re'} + 2,3 \quad (2.236.)$$

Grafičkim prikazom $C_D = f(Re')$ dobiva se dijagram koji podsjeća na dijagram ovisnosti faktora otpora o Reynoldsovoj značajci kod protjecanja i optjecanja (slika 2.63.). Pravci koji slijede iz Carman-Kozenyjeve i Burke-Plummerove jednadžbe predstavljaju asimptote Ergunove krivulje.,

Na kraju, mogu se uočiti sličnosti između karakterističnih slučajeva prijenosa količine gibanja. Za sve primjere vrijedi općenita korelacija:

$$Eu = f(Re, \text{geometrija})$$

Pri čemu su geometrijske karakteristike:

- protjecanje → relativna hrapavost
- optjecanje → sfericitet
- strujanje u miješalici → simpleksi
- strujanje kroz sloj čestica → d_s, S_v, ε

Karakteristični primjeri prijenosa količine gibanja

<i>PROTJECANJE</i>	$Eu = f\left(\underbrace{Re, \varepsilon/d}_{\xi/2}\right) \cdot \frac{\ell}{d}$
<i>OPTJECANJE</i>	$Eu = f\left(\underbrace{Re, \psi}_{c_D/2}\right)$
<i>STRUJANJE U MIJEŠALICI</i>	$Eu_M = f\left(\underbrace{Re, S_1, S_2, S_3}_{k \cdot c_D}\right)$
<i>STRUJANJE KROZ POROZNU SREDINU</i>	$Eu = \frac{3}{4} \cdot c_D \cdot \text{geometrija}$

3. PRIJENOS TOPLINSKE ENERGIJE

U uvodnom dijelu ovog kolegija napomenuto je da postoji fenomenološka analogija između prijenosa količine gibanja, topline i tvari. Pri tom je naglašeno da je prijenos toplinske energije temelj toplinskih jediničnih operacija dok je prijenos tvari temelj difuzijskih operacija.

Opći zakon očuvanja:

$$V \cdot \frac{dX_V}{dt} = \dot{V}_{\text{ul.}} \cdot X_{V, \text{ul.}} - \dot{V}_{\text{izl.}} \cdot X_{V, \text{izl.}} + V_r$$

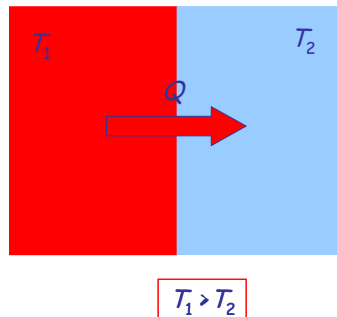
AKUMULACIJA = ULAZ - IZLAZ + GENERACIJA

Promatramo li prijenos toplinske energije, X_V iz općeg zakona očuvanja predstavlja količinu topline po jedinici volumena (Q):

$$V \cdot \frac{dQ}{dt} = \dot{V}_{\text{ul.}} \cdot Q_{V, \text{ul.}} - \dot{V}_{\text{izl.}} \cdot Q_{V, \text{izl.}} + V_r$$

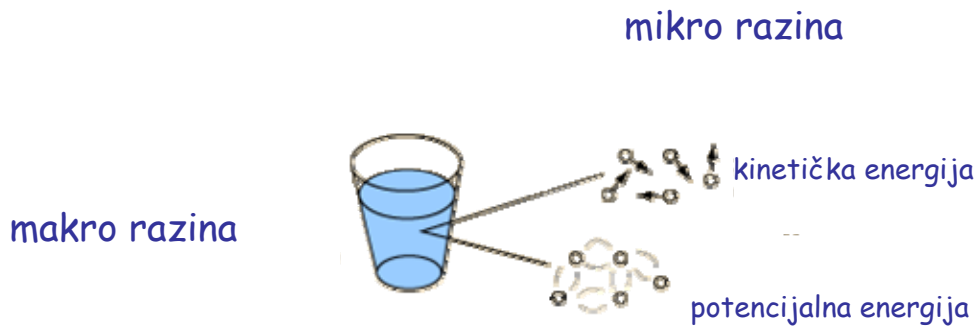
Pokretačka sila procesa je razlika temperatura. Proces je stacionaran ako nema ovisnosti temperaturnog gradijenta o vremenu ($\frac{dT/dy}{dt} = 0$), a nestacionaran ukoliko ovisnost postoji ($\frac{dT/dy}{dt} \neq 0$). U brojnim slučajevima procesi prijenosa topline su nestacionarni te će se u ovom poglavlju opisati primjeri nestacionarnog prijenosa topline. Intenzitet prijenosa ovisan je o pokretačkoj sili, o otporima koji se javljaju i o površini izmjene topline. Proučavanje fenomenologije prijenosa usmjereno je na što točnije definiranje navedenih veličina.

U najopćenitijem slučaju, toplina je vrsta energije koju posjeduju tijela i fluidi povezana s različitim oblicima gibanja atoma, molekula i drugih čestica od kojih se tijelo sastoji. Toplina se može prenositi između tijela i/ili fluida, ili područja unutar tijela različitih temperatura, te ukoliko nema rada u smjeru od toplog prema hladnom tijelu. Do prijenosa topline dolazi između dva tijela (i/ili fluida) koja se nalaze na različitim temperaturama. Prijenos topline ide iz smjera tijela više temperature prema tijelu niže temperature.



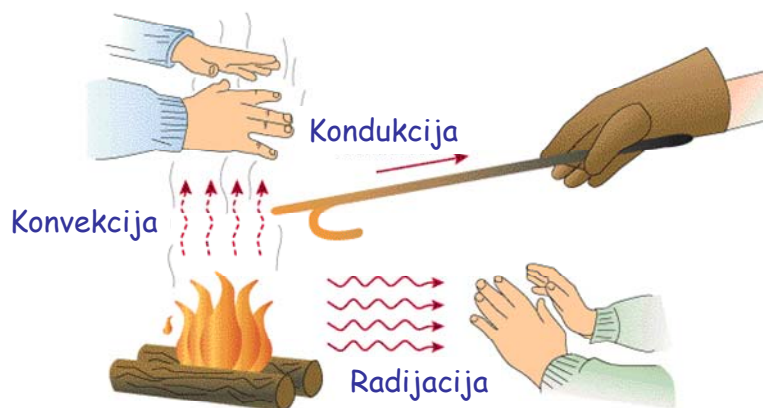
Slika 3.1. Smjer prijenosa topline

Tijekom prijenosa topline mijenjaju se unutrašnje energije (energija povezana sa slučajnim gibanjem molekula) oba tijela. Ako promotrimo čašu s vodom (slika 3.2.), na makro razini ona ne posjeduje nikakvu energiju. Na mikro razini, toplinska je energija povezana sa kinetičkom energijom molekula. Što je veća temperatura materijala, molekule se intenzivnije gibaju (linearno i vibracijski). Pri tome područja koja posjeduju veću molekularnu kinetičku energiju, predaju energiju područjima s nižom kinetičkom energijom. Osim kinetičke energije, molekule vode posjeduju i potencijalnu energiju koja je vezana za molekularne privlačne sile.



Slika 3.2. Energija na makro i mikro razini

Na slici 3.3. prikazani su osnovni mehanizmi prijenosa topline: konvekcija, kondukcija i radijacija (toplinsko zračenje).



Slika 3.3. Mehanizmi prijenosa topline

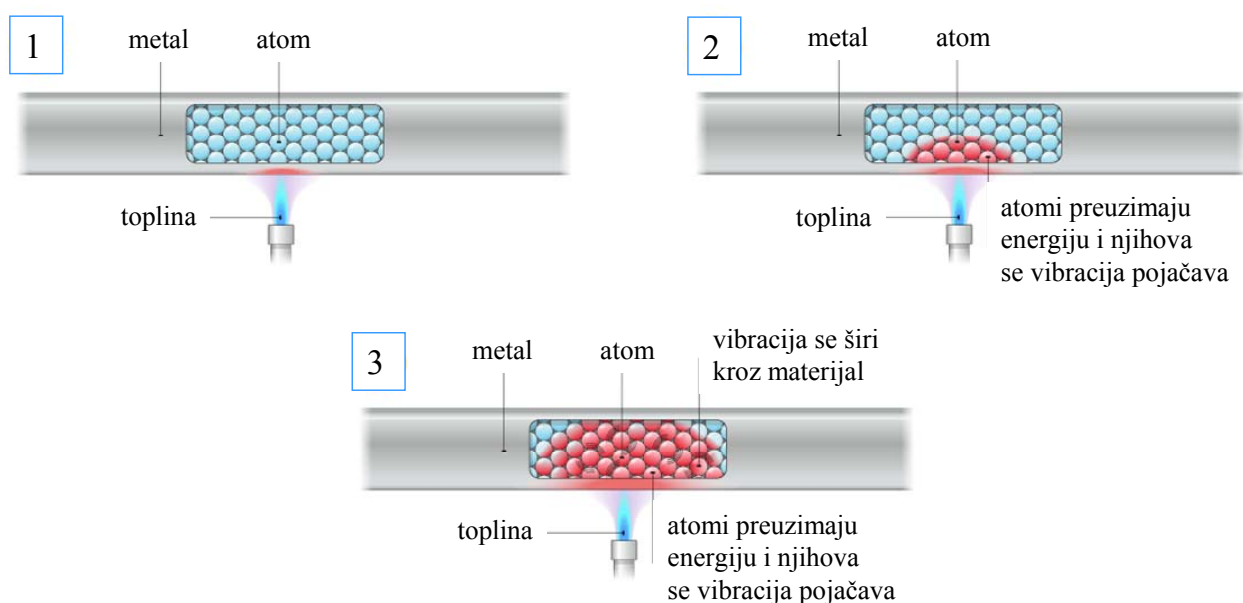
- **Kondukcija** ili toplinsko provođenje je molekularni mehanizam prijenosa topline pri kojem su čestice tvari u direktnom kontaktu. Karakterističan je za čvrsta tijela, a ovisan o fizikalnim svojstvima tvari, geometrijskim karakteristikama te o lokalnim razlikama u temperaturi. Prisutan je i kod kapljevine i plinova u mirovanju.
- **Konvekcija** ili prijenos topline miješanjem (vrtloženjem) je vrtložni mehanizam prijenosa topline. Karakterističan je za fluide pri čemu se pod konvektivnim prijenosom topline ne podrazumijeva samo izmjena u masi fluida nego čak i značajnije, izmjena između fluida i čvrste površine. Gibanje fluida može biti uzrokovano lokalnim razlikama u temperaturi pa govorimo o *prirodnoj konvekciji*, ili vanjskim utjecajem (narinutom silom: ventilator, pumpa miješanje itd.) pa govorimo o *prisilnoj konvekciji*.
- **Radijacija** ili toplinsko zračenje bitno se razlikuje jer se prijenos topline ostvaruje elektromagnetskim valovima između dviju površina različitih temperatura odvojenih medijem koji omogućuje taj prijenos. Intenzitet zračenja ovisi o temperaturi i valnoj duljini, a uglavnom se odvija u infracrvenom dijelu spektra.

U realnim sustavima navedeni mehanizmi prijenosa topline rijetko su razdvojeni, tako da se toplina prenosi njihovom kombinacijom.

3.1. Kondukcija

Kondukcija je mehanizam prijenosa topline svojstven čvrstim tijelima, a odvija se između čestica u direktnom kontaktu kada su njihove pojedinačne temperature različite. Dakle, toplina se prenosi s čestice na česticu molekularnim mehanizmom. Toplina se prenosi kondukcijom kada postoji temperaturni gradijent u čvrstom tijelu ili fluidu u mirovanju. Pri tome se energija prenosi sa molekula višeg energetskeg nivoa na molekule nižeg energetskeg nivoa nakon kontakta, a tok topline ide u smjeru opadajuće temperature jer više temperature odgovaraju višim energetskekim nivoima. Na mikro razini do kondukcije dolazi zbog brzog kretanja ili vibracije atoma i molekula i međusobnim kontaktom sa okolnim atomima ili molekulama, pri čemu dolazi do prijenosa dijela energije (topline) na okolinu (slika 3.4.). Dakle, toplina se prenosi molekularnom interakcijom te zbog prisustva slobodnih elektrona.

- MOLEKULARNA INTERAKCIJA → prisutno u svim sustavima gdje postoji temperaturni gradijent
- ZBOG PRISUSTVA SLOBODNIH ELEKTRONA → kod metala u čvrstom stanju



Slika 3.4. Prijenos topline kondukcijom

Proučavanja se zbog jednostavnosti provode na *izotropnim tijelima* (ona tijela kod kojih su fizička svojstva ista u bilo kojoj promatranoj točki), a temeljne postavke se primjenjuju na kompleksnije sustave.

Potrebno je naglasiti da će se u ovom području prijenosa tvari i energije često javljati i nestacionarne pojave pa su osnovne polazne jednačbe nešto kompleksnije.

Temperatura neke točke definirana je funkcijom temperaturnog polja:

$$T = f(x, y, z, t)$$

Grafična vrijednost omjera temperaturnih promjena i udaljenosti između izotermnih ploha predstavlja temperaturni gradijent:

$$\text{grad } T = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta y} = \frac{dT}{dy} \quad (3.1.)$$

u uvjetima stacionarnog jednodimenzijuskog provođenja topline.

(*Izotermna ploha* je ploha u kojoj sve točke tijela imaju istu temperaturu.)

Budući da se u praksi toplina prenosi u svim smjerovima korektno je temperaturni gradijent označavati parcijalnim derivacijama $\frac{\partial T}{\partial y}$.

U ovisnosti o vremenu mogu se odvijati:

- stacionarni procesi – temperatura se u određenoj točki ne mijenja s vremenom $\left(\frac{dT}{dt} = 0\right)$, odnosno temperaturni gradijent je konstantan $\left(\frac{dT}{dy} \neq f(t)\right)$
- nestacionarni procesi – temperatura se u određenoj točki mijenja s vremenom $\left(\frac{dT}{dt} \neq 0\right)$, odnosno mijenja se temperaturni gradijent $\left(\frac{dT}{dy} = f(t)\right)$

3.1.1. Diferencijalna jednadžba kondukcije

Svrha analize nekog procesa je definiranje funkcijskih ovisnosti između veličina ili svojstava promatranog procesa. Obzirom da se tijekom složenih procesa veličine i svojstva mijenjaju s pložajem i vremenom nailazi se često na probleme prilikom pronalaženja jednadžbe kojom bi se proces matematički opisao. Kako bi se omogućio matematički opis procesa, promatra se elementarni volumen u ograničenom vremenskom intervalu čime se zanemaruju promjene karakterističnih veličina procesa te se dobiva opća diferencijalna jednadžba procesa. Integriranjem se zatim dobivaju analitička rješenja.

U svrhu pojednostavljenja pretpostavlja se da su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

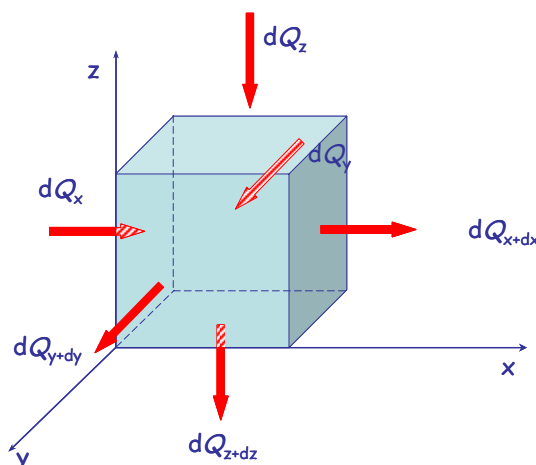
- homogeni izotropni materijal
- fizikalna svojstva su konstantna
- zanemaruje se deformacija zbog temperaturne promjene
- unutrašnji izvori energije ($q_v=f(x,y,z,t)$) su jednoliko raspoređeni u tijelu

Na temelju zakona očuvanja energije, količina topline dovedena kondukcijom u elementarni volumen tijekom vremena jednaka je promjeni unutrašnje energije tvari:

$$dQ_1 + dQ_2 = dQ \quad (3.2.)$$

Ovdje su:

- dQ_1 – dovedena količina topline
- dQ_2 – količina topline oslobođena unutar elementarnog volumena iz unutrašnjih izvora
- dQ – promjena unutrašnje energije ili entalpije tvari



Slika 3.5. Uz izvod opće diferencijalne jednadžbe kondukcije

Kako bi se definirali članovi jednadžbe 3.2., promotrimo elementarni (infinitesimalno mali) dijelić volumena tijela prikazan na slici 3.5. Količina topline koja se dovede na plohu dydz jednaka je:

$$dQ_x = q_x \cdot dy \cdot dz \cdot dt \quad (3.3.)$$

Količina topline koja se odvede sa suprotne strane:

$$dQ_{x+dx} = q_{x+dx} \cdot dy \cdot dz \cdot dt \quad (3.4.)$$

Pa je količina topline u smjeru osi x:

$$dQ_{x1} = dQ_x - dQ_{x+dx} \quad (3.5.)$$

Odnosno:

$$dQ_{x1} = q_x \cdot dy \cdot dz \cdot dt - q_{x+dx} \cdot dy \cdot dz \cdot dt \quad (3.6.)$$

Funkcija q_{x+dx} može se razviti u Taylorov red:

$$q_{x+dx} = q_x + \frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial^2 q_x}{\partial x^2} \cdot \frac{dx^2}{2!} + \dots \quad (3.7.)$$

Obzirom na mali doprinos viših članova reda, zanemare se svi osim prva dva člana reda:

$$dQ_{x1} = -\frac{\partial q_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \quad (3.8.)$$

Na analogan se način odrede količine topline za smjer osi y i z, te je količina topline dovedena kondukcijom u elementarni volumen jednaka:

$$dQ_1 = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot dt \quad (3.9.)$$

Kako bi se definirao drugi član jednadžbe 3.2., sa q_v (Wm^{-3}) označimo količinu topline koja se razvije u unutrašnjim izvorima topline u jediničnom volumenu u jediničnom vremenu. Tada je:

$$dQ_2 = q_v \cdot dv \cdot dt \quad (3.10.)$$

Treći član jednadžbe ovisi o prirodi termodinamičkog procesa koji se odvija u sustavu.

Za procese u kojima ne dolazi do promjene volumena, sva se prenesena toplina troši na promjenu unutrašnje energije $dQ = dU$:

$$dU = c_v \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dt \cdot dv \quad (3.11.)$$

Ovdje je c_v – specifični toplinski kapacitet pri konstantnom volumenu, $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$.

Uvrštenjem jednadžbi 3.9., 3.10. i 3.11. u osnovnu jednadžbu 3.2., dobiva se diferencijalna jednadžba za proces prijenosa topline pri konstantnom volumenu:

$$c_v \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + q_v \quad (3.12.)$$

Kod izobarnih procesa (pri konstantnom tlaku), sva se prenesena toplina troši na promjenu entalpije, pa osnovna jednadžba poprima oblik:

$$dQ = dh = dQ_1 + dQ_2 \quad (3.13.)$$

uz:

$$dh = c_p \cdot dT \quad (3.14.)$$

Pa se može pisati:

$$dh = c_p \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \cdot dt \cdot dv = \rho \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \cdot dt \cdot dv \quad (3.15.)$$

Ovdje je c_p – specifični toplinski kapacitet pri konstantnom tlaku, $\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$.

Uvrštenjem jednadžbi 3.9., 3.10. i 3.15. u jednadžbu 3.13., dobiva se diferencijalna jednadžba za proces prijenosa topline pri konstantnom tlaku:

$$c_p \cdot \rho \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = -\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\right) + q_v \quad (3.16.)$$

U čvrstim tijelima prijenos topline kondukcijom opisuje se Fourierovim zakonom:

$$q = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.17.)$$

Obzirom na male razlike u vrijednostima, može se pretpostaviti da je:

$$c_v = c_p = c \quad (3.18.)$$

pa je opća diferencijalna jednadžba prijenosa topline kondukcijom

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{c \cdot \rho} \cdot \left[\frac{\partial T}{\partial x} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial T}{\partial z} \cdot \left(\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + \frac{q_v}{c \cdot \rho} \quad (3.19.)$$

Ako se pretpostavi da gustoća, koeficijent toplinske vodljivosti i specifični toplinski kapacitet ne ovise o položaju, jednadžba poprima sljedeći oblik:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \cdot \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{q_v}{c \cdot \rho} \quad (3.20.)$$

Kako je:

$$a = \frac{\lambda}{c \cdot \rho} \quad (3.21.)$$

i:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \nabla^2 T \quad (3.22.)$$

dobiva se opći oblik jednadžbe:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \nabla^2 T + \frac{q_v}{c \cdot \rho} \quad (3.23.)$$

Koeficijent temperaturne vodljivosti (toplinska difuzivnost), a (m^2s^{-1}), definira brzinu promjene temperature. Što je veća brzina promjene temperature veća je i temperaturna vodljivost materijala. Općenito koeficijent temperaturne vodljivosti kapljevine i plinova ima male vrijednosti, a metali velike.

Ukoliko nema unutrašnjih izvora topline dobiva se II Fourierov zakon koji uzima u obzir nestacionarnost procesa i provođenje topline u smjeru osi x, y i z :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \nabla^2 T \quad (3.24.)$$

U stacionarnim uvjetima $T = f(x, y, z)$:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{q_v}{\lambda} = 0 \quad (3.25.)$$

Odnosno bez izvora topline:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (3.26.)$$

Diferencijalna jednadžba kondukcije osniva se na općim zakonima fizike, te opisuje kondukciju na najopćenitiji način. Analitička se rješenja dobivaju za svaki pojedinačni slučaj ovisno o:

- geometrijskim karakteristikama tijela → oblik i veličina
- fizikalnim svojstvima tijela i fluida → $\lambda, c_p, \rho \dots$
- početnom uvjetu → raspodjela temperature u vremenu $t=0$
- graničnom uvjetu – interakcije tijela i okoliša

Postoje četiri karakteristična granična uvjeta:

I. granični uvjeti prve vrste

- raspodjela temperatura površine tijela: $T_S = f(x, y, z, t)$
- ukoliko je temperatura jednoliko raspodijeljena: $T_S = const$

II. granični uvjeti druge vrste

- raspodjela toplinskog toka na površini tijela u vremenu t : $q_d = f(x, y, z, t)$
- ako se toplinski tok ne mijenja s vremenom: $q_d = q_0 = const$

III. granični uvjeti treće vrste

- definira zakonitosti koje opisuju prijenos topline između tijela i okoliša tijekom grijanja ili hlađenja tijela → Newtonov zakon

Količina topline koja se uklanja s jedinične površine tijela u jediničnom vremenu proporcionalna je razlici temperatura između tijela i okoliša. Konstanta proporcionalnosti je koeficijent prijelaza topline, α , $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$.

Koeficijent prijelaza topline je mjera intenziteta prijelaza topline između površine tijela i njegove okoline, i numerički je jednaka količini topline uklonjene (ili dovedene) sa jedinične površine u jediničnom vremenu za razliku temperatura između tijela i okoliša od jednog stupnja. Prema zakonu očuvanja energije:

$$\alpha \cdot (T_S - T_{ok}) = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.27.)$$

IV. granični uvjet četvrte vrste

- definira proces kondukcije između jednog tijela ili skupine tijela i okoline, pri čemu su tijela u idealnom kontaktu (temperature na dodiru su jednake)
- gustoće toplinskog toka kroz površine koje su u kontaktu su jednake:

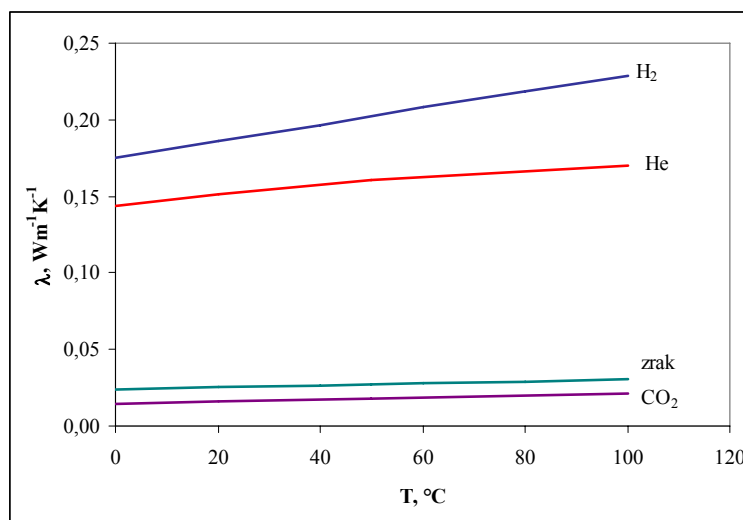
$$\lambda_1 \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = \lambda_2 \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (3.28.)$$

3.1.2. Toplinska vodljivost

Koeficijent toplinske vodljivosti općenito ovisi o temperaturi, tlaku i prirodi tvari i određuje se eksperimentalno. Toplinska vodljivost je numerički jednaka količini topline koja prolazi kroz jediničnu izotermnu površinu u jedinici vremena pri jediničnom temperaturnom gradijentu i mjera je sposobnosti čvrstog tijela da vodi toplinu.

Toplinska vodljivost plinova

Toplina se prenosi kondukcijom kroz plinove zbog prijenosa kinetičke energije molekularnog gibanja, odnosno slučajnog gibanja i sudara molekula plina. Ovisi o srednjoj brzini gibanja molekula, srednjem slobodnom putu molekula između dva sudara, i temperaturi (ρ , c_p). Općenito ne ovisi o tlaku, osim pri vrlo niskim (<2,66 mPa) i vrlo visokim (>2 GPa) tlakovima. Međutim utjecaj tlaka je znatan za paru i neidealne plinove. Toplinska vodljivost plinova raste s porastom temperature.

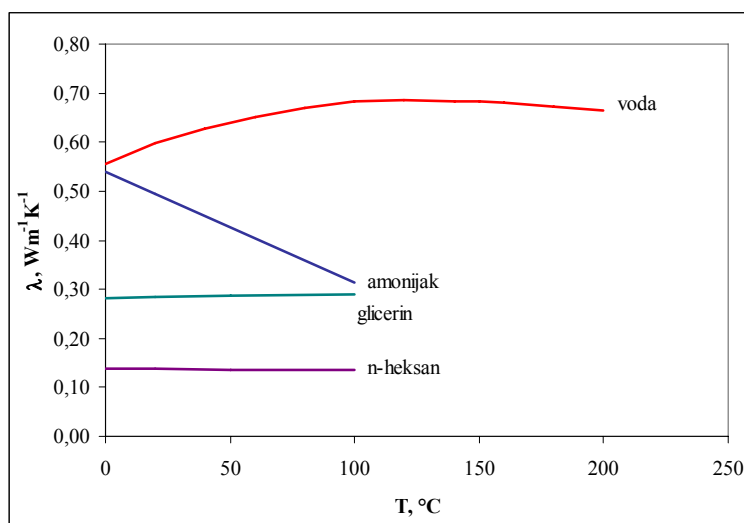


Slika 3.6. Toplinska vodljivost plinova

Toplinska vodljivost kapljevine

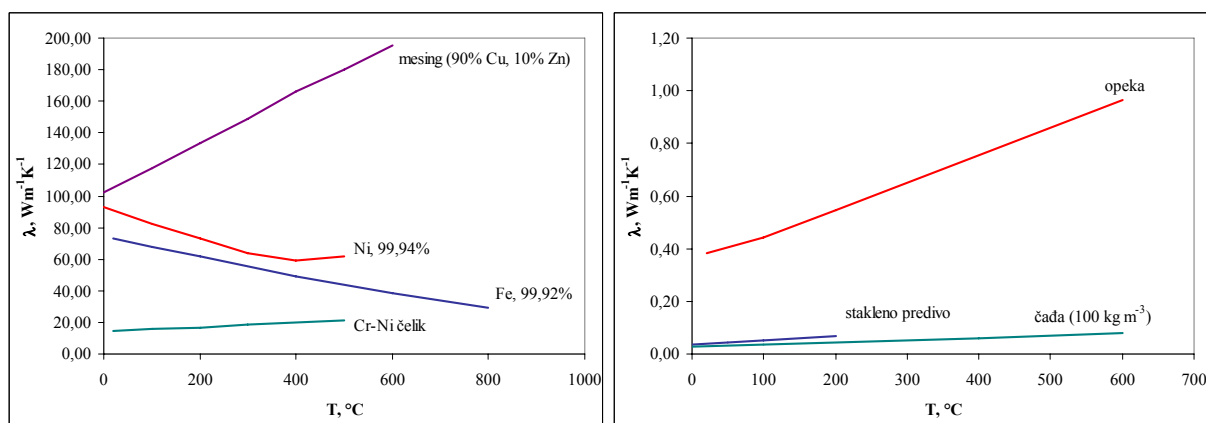
Mehanizam prijenosa topline kroz kapljevinu odgovara prijenosu energije putem nestabilnih elastičnih oscilacija. Vrijednost koeficijenta toplinske vodljivosti uglavnom opada sa porastom temperature

(slika 3.7.). Iznimka su voda i glicerin. Za razliku od plinova, tlak utječe na toplinsku vodljivost kapljevine. S porastom tlaka raste i toplinska vodljivost kapljevine.



Slika 3.7. Toplinska vodljivost kapljevine

Toplinska vodljivost čvrstih tijela



Slika 3.8. Toplinska vodljivost čvrstih tijela

Utjecaj ovisi o vrsti i strukturi čvrstih tijela (slika 3.8.).

METALI I LEGURE

U metalima se toplina prenosi slobodnim elektronima. Gibanjem slobodnih elektrona dolazi do izjednačavanja temperature u svim točkama grijanog ili hlađenog tijela kako se kreću iz područja viših temperatura do područja nižih temperatura (predaju energiju) i obrnuto (oduzimaju energiju). Elektroni su nosioci i elektricitea tako da postoji proporcionalnost između toplinske i električne vodljivosti. Kako se raspršenost elektrona povećava s porastom temperature dolazi do smanjenja toplinske i električne vodljivosti čistih metala. Za razliku od čistih metala, toplinska vodljivost legura raste s porastom temperaturom.

NEMETALI

Toplinska vodljivost nemetala uglavnom raste s porastom temperature. Koeficijent toplinske vodljivosti ovisi o gustoći, strukturi materijala, poroznosti i sadržaju vlage. Materijali niske toplinske vodljivosti koriste se kao izolatori.

3.1.3. Stacionarna kondukcija

Obzirom da se u većini uređaja u kojima dolazi do prijenosa topline, toplina prenosi sa jednog fluida na drugi preko čvrste stjenke, razumijevanje mehanizma kondukcije kroz homogena čvrsta tijela veoma je važno za rješavanje problema vezanih uz prijenos topline. Kako je već rečeno, stacionarna kondukcija odnosi se na prijenos topline kroz čvrsta tijela u uvjetima kada se temperatura određene točke (odnosno područja u kojem se toplina prenosi kondukcijom) ne mijenja s vremenom.

Proučavanje provođenja topline u stacionarnim uvjetima temelji se na *Fourierovu zakonu* stacionarnog provođenja topline (I Fourierov zakon).

Kada u tijelu postoji temperaturni gradijent, dolazi do prijenosa topline iz područja više temperature u područje niže temperature. Gustoća toplinskog toka proporcionalna je temperaturnom gradijentu, a konstanta proporcionalnosti naziva se koeficijent toplinske vodljivosti.

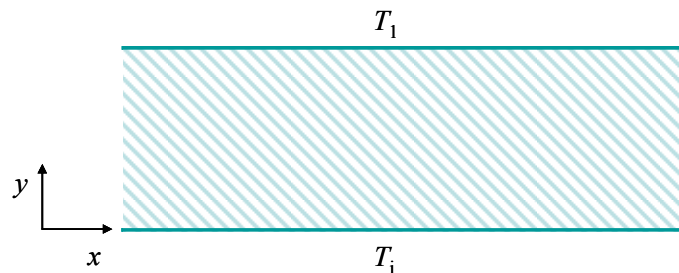
Promotrimo homogeno čvrsto tijelo koje je na početku na temperaturi T_i . Neka se u jednom trenutku gornja ploha zagrije na temperaturu T_1 , koja se onda održava stalnom ($T_1 > T_i$) (slika 3.9.). Količina topline koja se prenese preko površine zagrijavanja u smjeru y-osi proporcionalan je temperaturnom gradijentu. Kada se postignu stacionarni uvjeti:

$$q = \frac{\dot{Q}}{A} \sim \frac{dT}{dy} \quad (3.29.)$$

Odnosno:

$$\dot{Q} = \lambda \cdot A \frac{dT}{dy} \quad (3.30.)$$

što predstavlja I Fourierov zakon.



Slika 3.9. Uz I Fourierov zakon

Često se umjesto koeficijenta toplinske vodljivosti konstanta proporcionalnosti izražava koeficijentom temperaturene vodljivosti, a :

$$q = -\lambda \cdot \frac{dT}{dy} = -a \frac{d(\rho \cdot c_p \cdot T)}{dy} \quad (3.31.)$$

Pri čemu je:

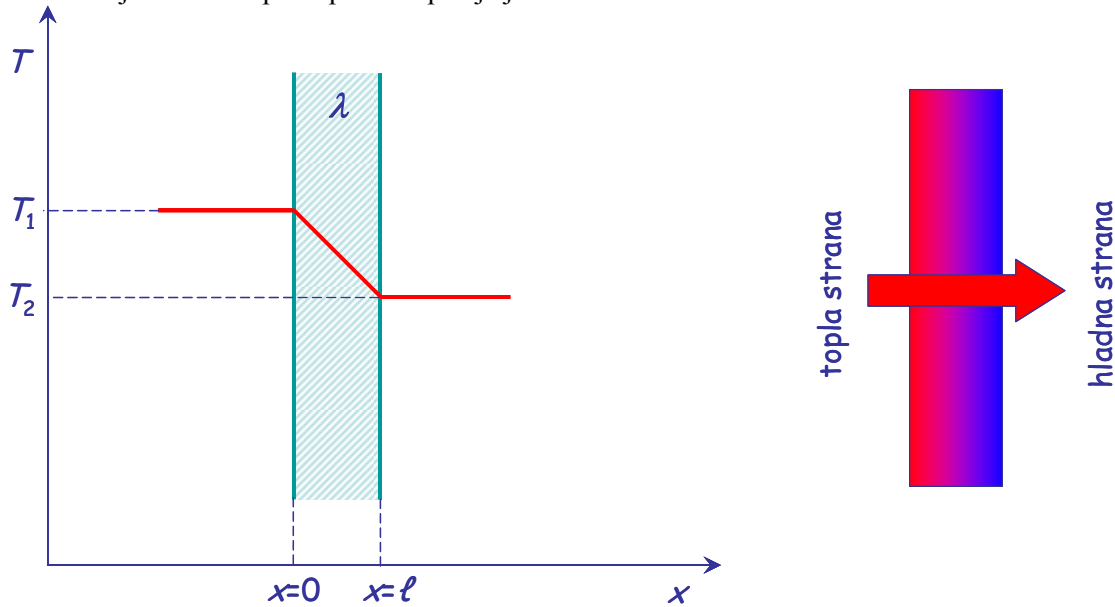
$$a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p} \quad (3.32.)$$

Ovdje su:

- q - gustoća toplinskog toka, Wm^{-2}
- λ - koeficijent toplinske vodljivosti, $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$
- a - koeficijent temperaturene vodljivosti, ms^{-1}
- c_p - specifični toplinski kapacitet, $\text{Jkg}^{-1}\text{K}^{-1}$

3.1.3.1. Stacionarna kondukcija kroz jednoslojni zid

U uvjetima stacionarne kondukcije temperatura tijela ne mijenja se s vremenom, pa se uz uvjet da nema unutrašnjih izvora topline proces opisuje jednačbom 3.26.



Slika 3.10. Stacionarna kondukcija kroz jednoslojni zid

Promotrimo izotropno tijelo debljine ℓ konstantnog koeficijenta toplinske vodljivosti, λ , čije su vanjske površine zida na stalnim temperaturama, T_1 i T_2 (slika 10.). U tom se slučaju toplina prenosi samo u smjeru osi x , pa je:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \quad (3.33.)$$

Za ovaj slučaj diferencijalna jednačba kondukcije ima oblik:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (3.34.)$$

količina topline koja u jediničnom vremenu prolazi kroz jediničnu površinu u smjeru osi x definirana je I Fourierovim zakonom:

$$q = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.35.)$$

Integriranjem po položaju i vremenu:

$$q \cdot \int_{x_1}^{x_2} dx = -\lambda \cdot \int_{T_1}^{T_2} dT \quad (3.36.)$$

Dobiva se:

$$q \cdot (x_2 - x_1) = -\lambda \cdot (T_2 - T_1) \quad (3.37.)$$

Kako $(x_2 - x_1)$ predstavlja debljinu zida, može se pisati:

$$q = -\frac{\lambda}{\ell} \cdot (T_2 - T_1) \quad (3.38.)$$

te konačno:

$$q = \frac{\lambda}{\ell} \cdot (T_1 - T_2) \quad (3.39.)$$

gdje $\left(\frac{\lambda}{\ell}\right)$ predstavlja toplinsku vodljivost, a $\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)$ toplinski otpor. Dobiveno rješenje odgovara rješenju diferencijalne jednadžbe kondukcije uz granični uvjet prve vrste.

Količina topline koja prolazi kroz jediničnu površinu u jediničnom vremenu direktno je proporcionalna koeficijentu toplinske vodljivosti i razlici temperatura zida, te obrnuto proporcionalna debljini zida.

Prema općoj definiciji gustoće toka:

$$\phi = \kappa \cdot \frac{\Delta}{x}$$

Jednadžba (3.39.) može se pisati i na sljedeći način:

$$q = \frac{\Delta T}{\frac{\ell}{\lambda}} = \frac{\Delta T}{R} = \frac{\text{pokretačka sila}}{\text{otpor}} \quad (3.40.)$$

Ukupno prenesena toplina je prema tome:

$$Q = \frac{\lambda}{\ell} \cdot (T_1 - T_2) \cdot A \cdot t \quad (3.41.)$$

Navedeni izrazi vrijede kada je koeficijent toplinske vodljivosti konstantan u promatranom rasponu temperatura. Ukoliko je zbog promjene temperature došlo do velike promjene koeficijenta toplinske vodljivosti potrebno je provesti sljedeću korekciju:

$$\lambda = \lambda_0 \cdot [1 + b \cdot (\bar{T} - T_0)] \quad (3.42.)$$

gdje je T_0 referentna temperatura kod koje je koeficijent toplinske vodljivosti λ_0 ,

\bar{T} je aritmetička srednja vrijednost temperatura,

b je temperaturni koeficijent koji se određuje ekperimentalno.

U proračun se sada uzima srednja vrijednost koeficijenta toplinske vodljivosti:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda + \lambda_0}{2} \quad (3.43.)$$

a proračun se provodi prema jednadžbi:

$$Q = \frac{\bar{\lambda}}{\ell} \cdot (T_1 - T_2) \cdot A \cdot t \quad (3.44.)$$

3.1.3.2. Stacionarna kondukcija kroz višeslojni zid

Ukupni toplinski otpor višeslojnog zida je suma pojedinačnih toplinskih otpora svakog sloja.

Dakle, ako se promatra samo prijenos topline kondukcijom, ukupni otpor je:

$$R = \sum_i R_i = \sum_i \frac{\ell_i}{\lambda_i} \quad (3.45.)$$

U stacionarnim uvjetima vrijedi:

$$\frac{dT}{dt} = 0 \quad \text{odnosno} \quad q = \text{konst.} \quad \text{odnosno} \quad \frac{dQ}{dt} = \text{konst.}$$

iz čega slijedi:

$$\dot{Q}_1 = \dot{Q}_2 = \dot{Q}_3 = \dots = \dot{Q}_n \quad (3.46.)$$

Kako su površine prijenosa topline jednake:

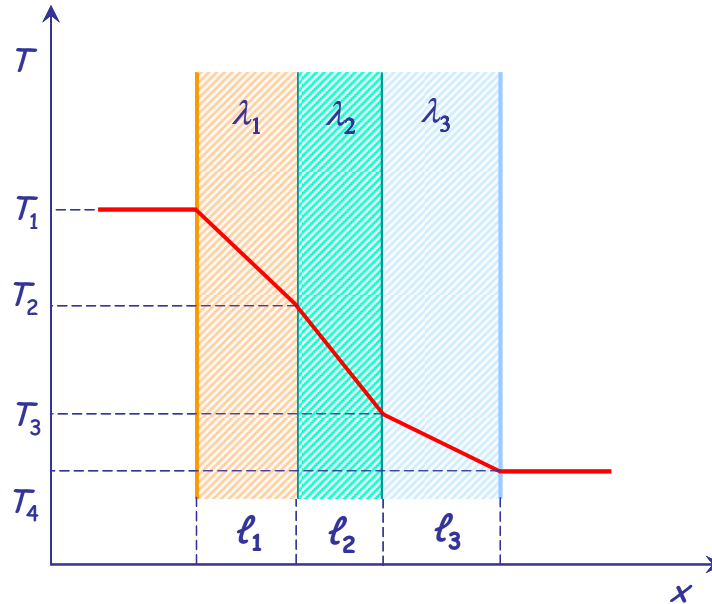
$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A \quad (3.47.)$$

S obzirom na sliku 3.10. jednadžbu (3.41.) možemo pisati za svaki sloj na sljedeći način:

$$\dot{Q}_1 = \frac{\lambda_1}{l_1} \cdot (T_1 - T_2) \cdot A_1 \quad (3.48.)$$

$$\dot{Q}_2 = \frac{\lambda_2}{l_2} \cdot (T_2 - T_3) \cdot A_2 \quad (3.49.)$$

$$\dot{Q}_3 = \frac{\lambda_3}{l_3} \cdot (T_3 - T_4) \cdot A_3 \quad (3.50.)$$



Slika 3.10. Stacionarna kondukcija kroz višeslojni zid

Budući da je količina prenesene topline konstantna možemo pisati:

$$\dot{Q} \cdot \left(\frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2} + \frac{l_3}{\lambda_3} \right) = A \cdot (T_1 - T_4) \quad (3.51.)$$

odnosno:

$$\dot{Q} = \frac{A \cdot (T_1 - T_4)}{\frac{l_1}{\lambda_1} + \frac{l_2}{\lambda_2} + \frac{l_3}{\lambda_3}} \quad (3.52.)$$

Strmina pada temperature u pojedinom sloju određena je svojstvima sloja odnosno vrijednošću koeficijenta toplinske vodljivosti samog sloja (λ). Želimo li jednadžbu (3.52.) pisati općenito za n slojeva te uz konstantnu površinu izmjene topline, ona će imati sljedeći oblik:

$$\dot{Q} = \frac{A \cdot (T_1 - T_{n+1})}{\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\lambda_i}} \quad (3.53.)$$

gdje je $(T_1 - T_{n+1})$ ukupni pad temperature odnosno ukupna pokretačka sila, a $\sum_{i=1}^n \frac{l_i}{\lambda_i}$ je ukupni toplinski otpor.

Na temelju $\dot{Q} = \text{konst.}$, $A = \text{konst.}$, vrijedi:

$$\frac{\Delta T_{\text{uk.}}}{R_{\text{uk}}} \cdot A = \frac{\lambda_1}{l_1} \cdot (T_1 - T_2) \cdot A = \frac{\lambda_2}{l_2} \cdot (T_2 - T_3) \cdot A = \frac{\lambda_3}{l_3} \cdot (T_3 - T_4) \cdot A \quad (3.54.)$$

odnosno:

$$\frac{\Delta T_{\text{uk}}}{R_{\text{uk}}} = \frac{\Delta T_1}{\frac{\ell_1}{\lambda_1}} = \frac{\Delta T_2}{\frac{\ell_2}{\lambda_2}} = \frac{\Delta T_3}{\frac{\ell_3}{\lambda_3}} \quad (3.55.)$$

dakle:

$$\frac{\Delta T_{\text{uk}}}{R_{\text{uk}}} = \frac{\Delta T_{\text{lok}}}{R_{\text{lok}}} \quad (3.56.)$$

Ova zakonitost je od izuzetnog praktičnog značaja jer se npr. na temelju ukupne razlike temperatura i ukupnog toplinskog otpora mogu procijeniti vrijednosti lokalnih temperatura.

Toplinski tok kroz višeslojni zid može se aproksimirati homogenim zidom, ali je tada potrebno uzeti ekvivalentni koeficijent toplinske vodljivosti:

$$\lambda_{\text{ekv}} = \frac{\sum_{i=1}^n \ell_i}{\sum_{i=1}^n \frac{\ell_i}{\lambda_i}} \quad (3.57.)$$

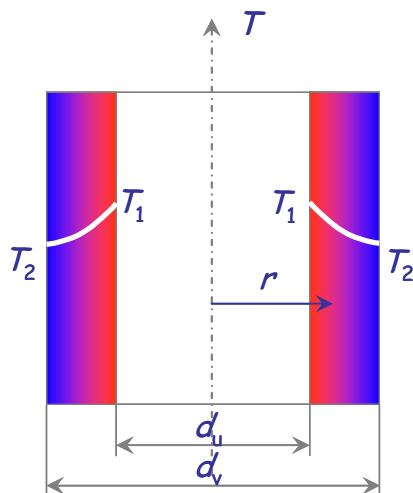
pa se jednadžba (150) može pisati u sljedećem obliku:

$$\dot{Q} = \lambda_{\text{ekv}} \cdot \frac{A \cdot \Delta T_{\text{uk}}}{\sum_{i=1}^n \ell_i} \quad (3.58.)$$

3.1.3.3. Kondukcija kroz zakrivljene (cilindrične) površine

Ukoliko se toplina provodi kroz zakrivljene površine (npr. kroz stijenku cijevi kružnog presjeka), osnovni je problem definirati mjerodavnu površinu izmjene topline. Najčešće se uzima srednja vrijednost površine temeljena na srednjem polumjeru (promjeru). Kod tankih zidova to nema značajnijeg utjecaja.

Promotrimo stacionarnu kondukciju kroz cilindričnu stijenku (cijev) unutrašnjeg promjera, d_u i vanjskog promjera d_v , pri čemu su površine na stalnim temperaturama, T_1 i T_2 , a koeficijent toplinske vodljivosti, λ , je stalan u danom temperaturnom intervalu (slika 3.11.)



Slika 3.11. Stacionarna kondukcija kroz cilindričnu stijenku

I ovdje je moguće primijeniti jednadžbu 3.41.

$$Q = \frac{\lambda}{\ell} \cdot (T_1 - T_2) \cdot A \cdot t$$

ali je potrebno definirati površinu:

$$\dot{Q} = \lambda \cdot \bar{A} \cdot \frac{\Delta T}{r_v - r_u} \quad (3.59.)$$

Ako je $\frac{r_v}{r_u} < 2$ (kod cijevi tankih stijenki) koristi se aritmetička sredina polumjera:

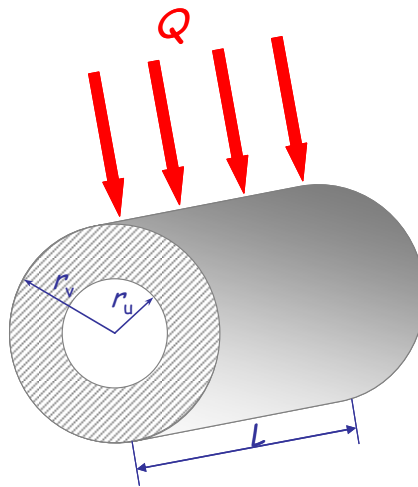
$$\bar{r} = r_A = \frac{r_v + r_u}{2} \quad (3.60.)$$

Ako je $\frac{r_v}{r_u} > 2$ (kod cijevi debelih stijenki) koristi se logaritamska srednja vrijednost polumjera:

$$\bar{r} = r_{LM} = \frac{r_v - r_u}{\ln \frac{r_v}{r_u}} \quad (3.61.)$$

Kako se toplina prenosi kroz plašt, srednja površina definira se na sljedeći način:

$$\bar{A} = 2 \cdot \bar{r} \cdot \pi \cdot L \quad (3.62.)$$



Slika 3.12. Uz definiciju površine izmjene topline

Uvrstimo li izraz za srednju površinu i srednji promjer (logaritamski ili aritmetički) u jednadžbu (3.59.) dobiva se:

$$\text{za } \bar{r} = r_A \quad \dot{Q} = \lambda \cdot \Delta T \cdot \frac{r_v + r_u}{r_v - r_u} \cdot \pi \cdot L \quad (3.63.)$$

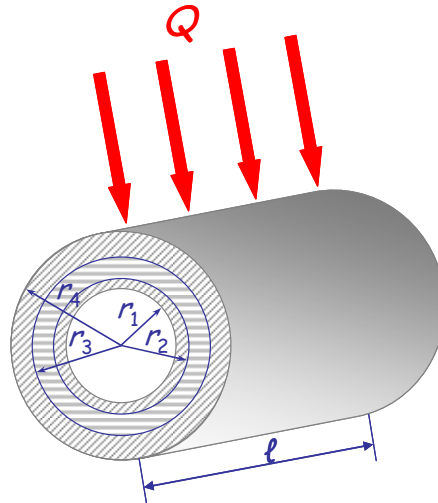
$$\text{za } \bar{r} = r_{LM} \quad \dot{Q} = \lambda \cdot \left(2 \cdot \frac{r_v - r_u}{\ln \left(\frac{r_v}{r_u} \right)} \cdot \pi \cdot L \right) \cdot \frac{\Delta T}{r_v - r_u} = \lambda \cdot \Delta T \cdot \frac{2}{\ln \frac{r_v}{r_u}} \cdot \pi \cdot L \quad (3.64.)$$

Koristimo li umjesto polumjera promjere, jednadžbu (3.64.) možemo pisati na sljedeći način:

$$\dot{Q} = \frac{(T_1 - T_2)}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \frac{d_v}{d_u}} \quad (3.65.)$$

Za višeslojni cilindrični zid (slika 3.13.) općenito se navedene jednadžbe mogu pisati na sljedeći način:

$$\dot{Q} = \frac{(T_1 - T_{n+1})}{2 \cdot \pi \cdot L \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}} \quad (3.66.)$$



Slika 3.13. Stacionarna kondukcija kroz višeslojni cilindar

Koeficijent toplinske vodljivosti se za višeslojni zid može aproksimirati homogenim zidom:

$$\lambda_{\text{ekv}} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{d_{i+1}}{d_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} \cdot \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}} \quad (3.67.)$$

te se konačno dobiva izraz za toplinski tok:

$$\dot{Q} = \frac{(T_1 - T_{n+1})}{\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot L} \cdot \frac{1}{\lambda_{\text{ekv}}} \cdot \sum_{i=1}^n \ln \frac{d_{i+1}}{d_i}} \quad (3.68.)$$

3.1.4. Nestacionarna kondukcija

Ako pri provođenju topline kroz sustav, toplinski fluks, odnosno temperatura u promatranoj točki predstavlja funkciju vremena, tada se prijenos topline odvija u nestacionarnim uvjetima. Dakle, gradijent temperature promatrane točke mijenja se i s vremenom.

$$\left(\frac{dT}{dt} \neq 0 \right) \text{ i } \left(\frac{dT}{dy} = f(t) \right)$$

U ovom poglavlju govoriti će se o procesima grijanja ili hlađenja u kojima nema izvora topline. Takvi se procesi dijele u dvije osnovne skupine. Prva grupa odgovara procesima kod kojih tijelo teži prema toplinskoj ravnoteži kada je postavljeno u fluid definirane temperature. U drugoj su skupini procesi kod kojih se temperatura tijela periodički mijenja.

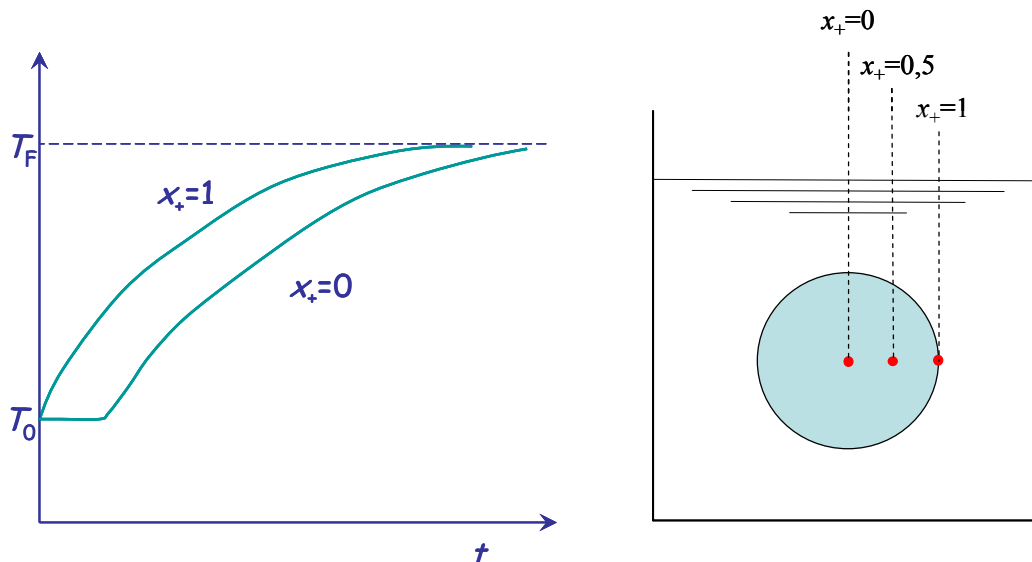
Nestacionarna kondukcija opisuje se diferencijalnom jednačbom kondukcije:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \cdot \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right]$$

Analitički opis uključuje rješavanje diferencijalne jednačbe kondukcije uz odgovarajuće početne i granične uvjeta te poznavanje fizikalnih svojstava sudionika u izmjeni topline te geometrije tijela.

3.1.4.1. Analitička rješenja pri nestacionarnoj kondukciji

Prije analize nestacionarne kondukcije potrebno je ukazati na neke njene značajnosti. Kod nestacionarne kondukcije značajan je faktor vrijeme izloženosti temperaturnoj promjeni. Promatramo tijelo uronjeno u vruću vodu.



Slika 3.14. Promjena temperature tijela s vremenom

Grijanjem homogenog tijela u fluidu stalne temperature, temperatura tijela mijenja se kako je prikazano na slici 3.14. Pri tome je:

- $x = 0$ u središtu tijela
- $x = 1$ na površini tijela

Kako se tijelo zagrijava temperatura svake njegove točke približava se temperaturi fluida u koji je tijelo uronjeno. Najbrže se zagrijava površina tijela koja je u direktnom kontaktu sa zagrijanim fluidom. Nakon dovoljno dugog vremena dolazi do izjednačavanja temperatura u svim točkama tijela.

Položaj x_+ je bezdimenzijska koordinata, a predstavlja omjer položaja x i linearne dimenzije tijela (u slučaju kugle to je polumjer):

$$x_+ = \frac{x}{\ell} \quad (3.69.)$$

Temperatura T_0 predstavlja početnu temperaturu kugle prije zagrijavanja ($t = 0$), $T = T_0 = f(x, y, z)$.

Temperaturna promjena ovisi o vremenu te o vanjskom i unutarnjem otporu prijenosu topline. Prema zakonu očuvanja količine topline koja se prenosi s okoline na površinu plohe tijela u jedinici vremena, jednaka je količini topline prenesene kondukcijom od te iste površine u unutrašnjost tijela (i obrnuto) → granični uvjet treće vrste.

$$q_{\text{ok}} = q_{\text{tijelo}} \quad (3.70.)$$

$$q_{\text{KONV}} = q_{\text{KOND}} \quad (3.71.)$$

Izjednačavanjem Newtonovog zakona (konvekcije) i Fourierovog zakona (kondukcija) dobiva se:

$$\alpha \cdot (T_{\text{fluida}} - T_{\text{plohe}}) = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3.72.)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot (T_f - T_p) \quad (3.73.)$$

U jednadžbi (3.14.) $\frac{\alpha}{\lambda}$ se može izraziti kao $\left(\frac{1}{\lambda}\right) / \left(\frac{1}{\alpha}\right)$ te na taj način to predstavlja omjer otpora prijenosa topline kondukcijom i konvekcijom.

Ovisno o vremenu izloženosti tijela višoj ili nižoj temperaturi te dimenzijama tijela, analitička rješenja se izvode za procese koji uključuju:

- TIJELA KONAČNIH DIMENZIJA
 - o dovoljno dugo vrijeme da se razlika temperatura osjeti i na drugom kraju tijela
- TIJELA BESKONAČNIH DIMENZIJA
 - o vrijeme izloženosti ili debljina tijela toliko veliki da se razlika temperatura ne može osjetiti na drugom kraju tijela

3.1.4.2. Raspodjela temperatura u tijelu

Temperaturno polje u tijelu ovisi o čitavom nizu varijabli i konstanti koje nije moguće izraziti nekom diferencijalnom jednadžbom. Da bi se pronašlo egzaktno rješenje potrebno je provesti bezdimenzijsku analizu i definirati određeni broj bezdimenzijskih značajki

$$T = f(\alpha, \lambda, a, t, x, y, z, T_p, T_f, \ell) \quad (3.74.)$$

Dimenzijskom analizom sve su varijable grupirane u dvije bezdimenzijske značajke i dva simpleksa.

Bezdimenzijske značajke

Biotova značajka

Predstavlja odnos unutarnjeg (kondukcija) i vanjskog (konvekcija) otpora prijenosu topline.

$$Bi = \frac{R_u}{R_v} = \frac{\frac{\ell}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\text{kondukcija}}{\text{konvekcija}} \quad (3.75.)$$

Odnosno:

$$Bi = \frac{\alpha \cdot \ell}{\lambda} \quad (3.76.)$$

Često se koristi i recipročna vrijednost Biotove značajke:

$$m = \frac{1}{Bi} = \frac{\lambda}{\alpha \cdot \ell} \quad (3.77.)$$

Fourierova značajka

Predstavlja bezdimenzijsko vrijeme.

$$Fo = \frac{a \cdot t}{\ell^2} \quad (3.78.)$$

Simpleksi

Bezdimenzijski položaj

$$x_+ = \frac{x}{\ell} \quad (3.79.)$$

Bezdimenzijska temperatura

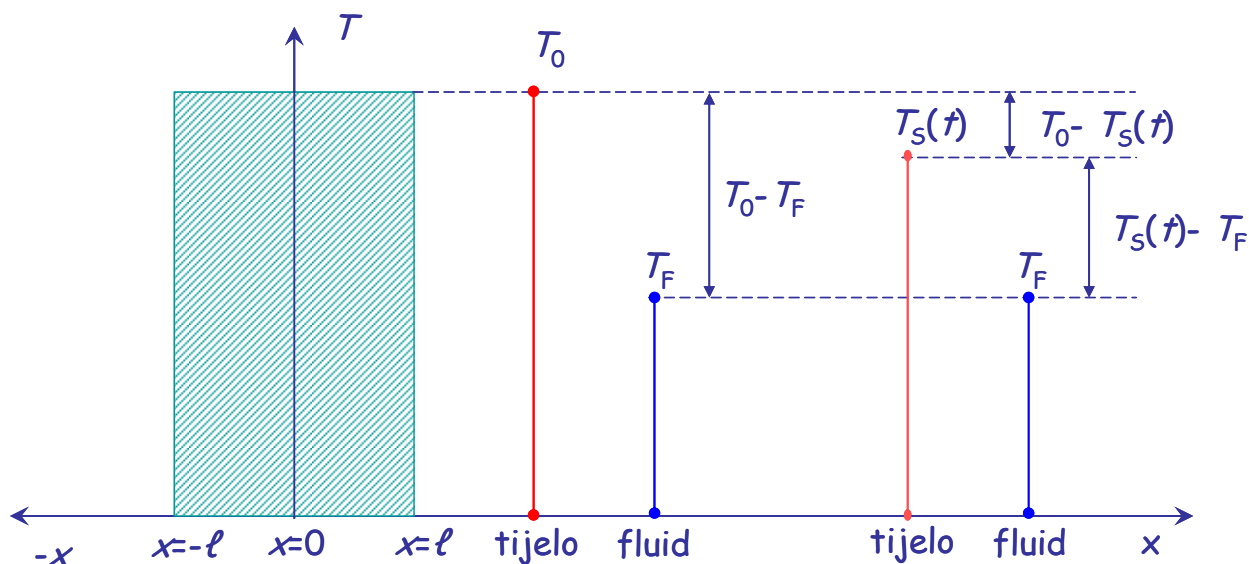
Predstavlja neostvarenu temperaturnu promjenu.

$$\theta(t) = \frac{T(t) - T_F}{T_0 - T_F} \quad (3.80.)$$

Ovje su:

- $T(t)$ - temperatura u nekom vremenu t .
 T_0 - temperatura na početku ($t = 0$).
 T_f - temperatura fluida.
 $T(t) - T_f$ - neostvarena temperaturna promjena u vremenu t .
 $T_0 - T_f$ - maksimalno moguća razlika temperatura.

Neostvarena temperaturna promjena može se ilustrirati na sljedeći način



Slika 3.15. Prikaz temperatura tijela i fluida u vremenu $t=0$ i t ($T_{\text{fluida}} < T_{\text{tijela}}$)

Pri čemu je $T_0 - T_s(t)$ - ostvarena promjena temperature

Dakle, neostvarena temperaturna promjena je ona temperaturna razlika koja se još može ostvariti sve dok tijelo ne poprimi temperaturu fluida. (Pretpostavka je da je volumen fluida puno veći od volumena tijela tako da se temperatura fluida praktički ne mijenja).

3.1.4.3. Zagrijavanje (hlađenje) tijela beskonačnih dimenzija

Promatramo npr. obostrano grijanje ili hlađenje ploče debljine 2ℓ . Obzirom da je debljina ploče mala u usporedbi sa njenom duljinom govori se o beskonačnoj ploči. Ako je vrijeme dovoljno dugačko, temperaturna promjena se ostvaruje u obje (svim) granične plohe.

Ovakav slučaj prodiranja topline izuzetno je složen zbog velikog broja varijabli:

- fizička svojstva,
- geometrijski parametri,
- temperaturne razlike,
- unutarnji i vanjski otpor.

U rješavanju ovakvih problema u svrhu pojednostavljenja smatra se da su zadovoljene sljedeće pretpostavke:

- prijenos topline u smjeru osi $x \rightarrow$ jednodimenzionalni problem
- koeficijent prijelaza topline, a , je konstantan
- u vremenu $t = 0$ je jednaka u svim točkama ploče, čime se osigurava jednoliki prijenos topline sa obje strane ploče

U svakom trenutku referentna temperatura ploče u odnosu na okolišnu je, ϑ

$$\vartheta = T - T_F \quad (3.81.)$$

Direncijalna jednačba kondukcije poprima sljedeći oblik:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \quad (3.82.)$$

Da bi se dobilo analitičko rješenje potrebno je definirati početne i granične uvjete.

Početni uvjet:

$$t = 0 \quad \vartheta = \vartheta_0 = T_0 - T_F \quad (3.83.)$$

Granični uvjet treće vrste:

$$\text{u središtu, } x = 0 \quad \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \quad (3.84.)$$

$$\text{na površini, } x = \pm \ell \quad \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=\ell} = -\frac{\alpha}{\lambda} \cdot \vartheta_{x=\ell} \quad (3.85.)$$

Rješavanjem diferencijalne jednačbe za definirane početne i granične uvjete dobiva se analitičko rješenje u sljedećem obliku:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_0} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot \sin(\mu_n)}{\mu_n + \sin(\mu_n) \cdot \cos(\mu_n)} \cdot \cos\left(\mu_n \cdot \frac{x}{\ell}\right) \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot \frac{a \cdot t}{\ell^2}} \quad (3.86.)$$

Uz bezdimenzijske sljedeće brojeve:

$$\text{bezdimenzijska temperatura:} \quad \theta = \frac{\vartheta}{\vartheta_0}$$

$$\text{bezdimenzijski položaj:} \quad X = \frac{x}{\ell}$$

$$\text{bezdimenzijsko vrijeme:} \quad Fo = \frac{a \cdot t}{\ell^2}$$

Jednačba poprima sljedeći oblik:

$$\theta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot \sin(\mu_n)}{\mu_n + \sin(\mu_n) \cdot \cos(\mu_n)} \cdot \cos(\mu_n \cdot X) \cdot e^{-\mu_n^2 \cdot Fo} \quad (3.87.)$$

Za $Fo > 0,3$ red brzo konvergira te se mogu zanemariti viši članovi reda, pa je analitičko rješenje:

$$\theta = \frac{2 \cdot \sin(\mu_1)}{\mu_1 + \sin(\mu_1) \cdot \cos(\mu_1)} \cdot \cos(\mu_1 \cdot X) \cdot e^{-\mu_1^2 \cdot Fo} \quad (3.88.)$$

Ako se uvede supstitucija:

$$D_1 = \frac{2 \cdot \sin(\mu_1)}{\mu_1 + \sin(\mu_1) \cdot \cos(\mu_1)} \quad (3.89.)$$

Može se pisati:

$$\theta = D_1 \cdot \cos(\mu_1 \cdot X) \cdot e^{-\mu_1^2 \cdot Fo} \quad (3.90.)$$

Obzirom da je μ_n , (vrijednosti μ_n su tabelirane):

$$\cot(\mu) = \frac{\mu}{Bi} = \frac{\mu}{\left(\frac{\alpha \cdot \ell}{\lambda} \right)} \quad (3.91.)$$

Dobiva se funkcionalna ovisnosti bezdimenzijske temperature o *Biotovoj* i *Fourierovoj* značajci.

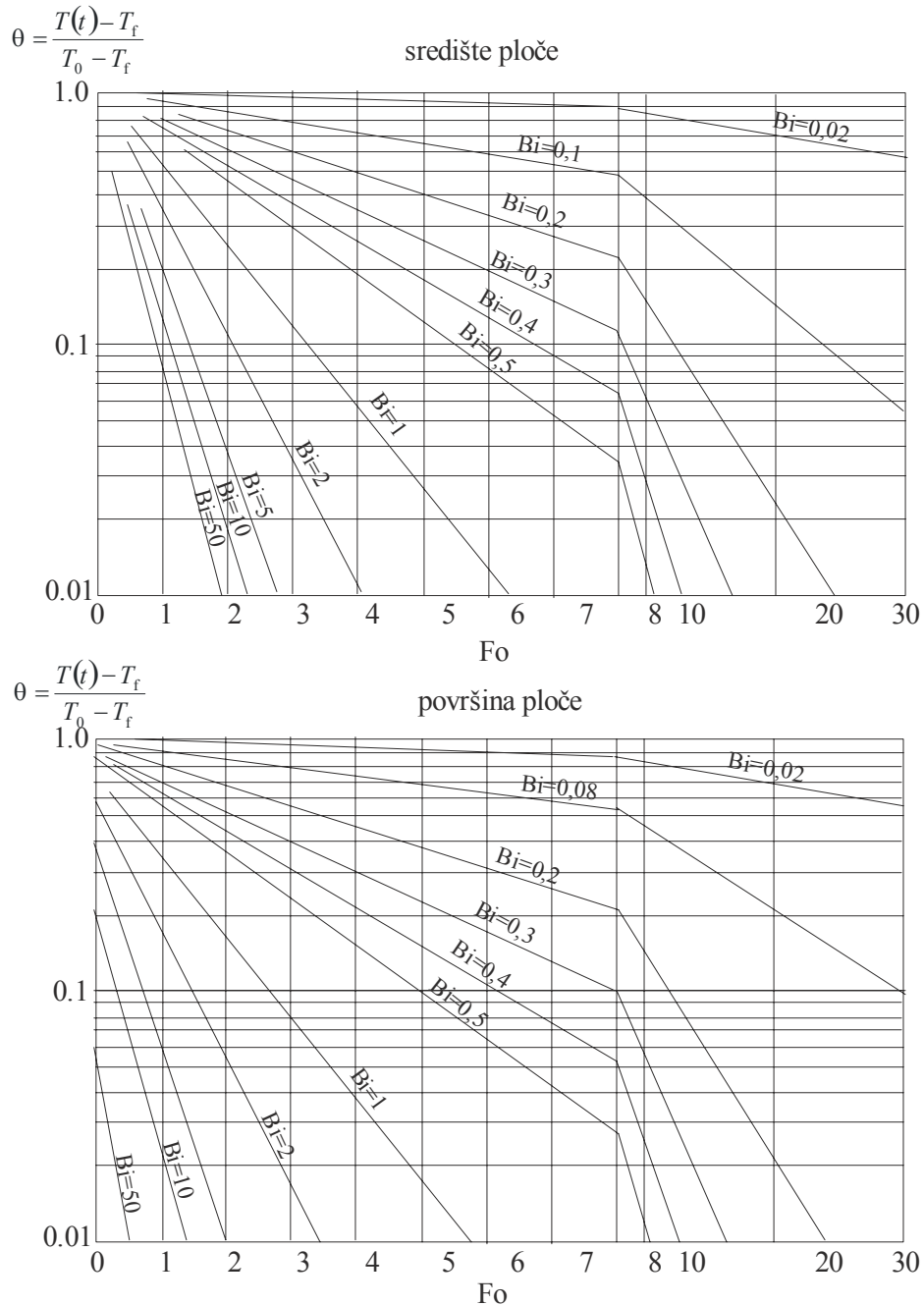
$$\theta = f(Bi, Fo) \quad (3.92.)$$

Analitičko se rješenje može napisati za bilo koju vrijednost bezdimenzijskog položaja, pa je tako za središte i površinu ploče:

$$X = \frac{x}{\ell} = 0 \quad \cos(0) = 1 \quad \theta_{x=0} = N(Bi) \cdot e^{-\mu_1^2 \cdot Fo} \quad (3.93.)$$

$$X = \frac{x}{\ell} = 1 \quad \cos(\mu_1 \cdot 1) = \cos(\mu_1) \quad \theta_{x=1} = P(Bi) \cdot e^{-\mu_1^2 \cdot Fo} \quad (3.94.)$$

Vrijednosti funkcija $N(Bi)$ i $P(Bi)$ su tabelirane za pojedine geometrijske oblike tijela. Logaritmiranjem jednadžbi 3.93. i 3.94. dobivaju se linearne ovisnosti prikladne za grafički prikaz (slika 3.16.).



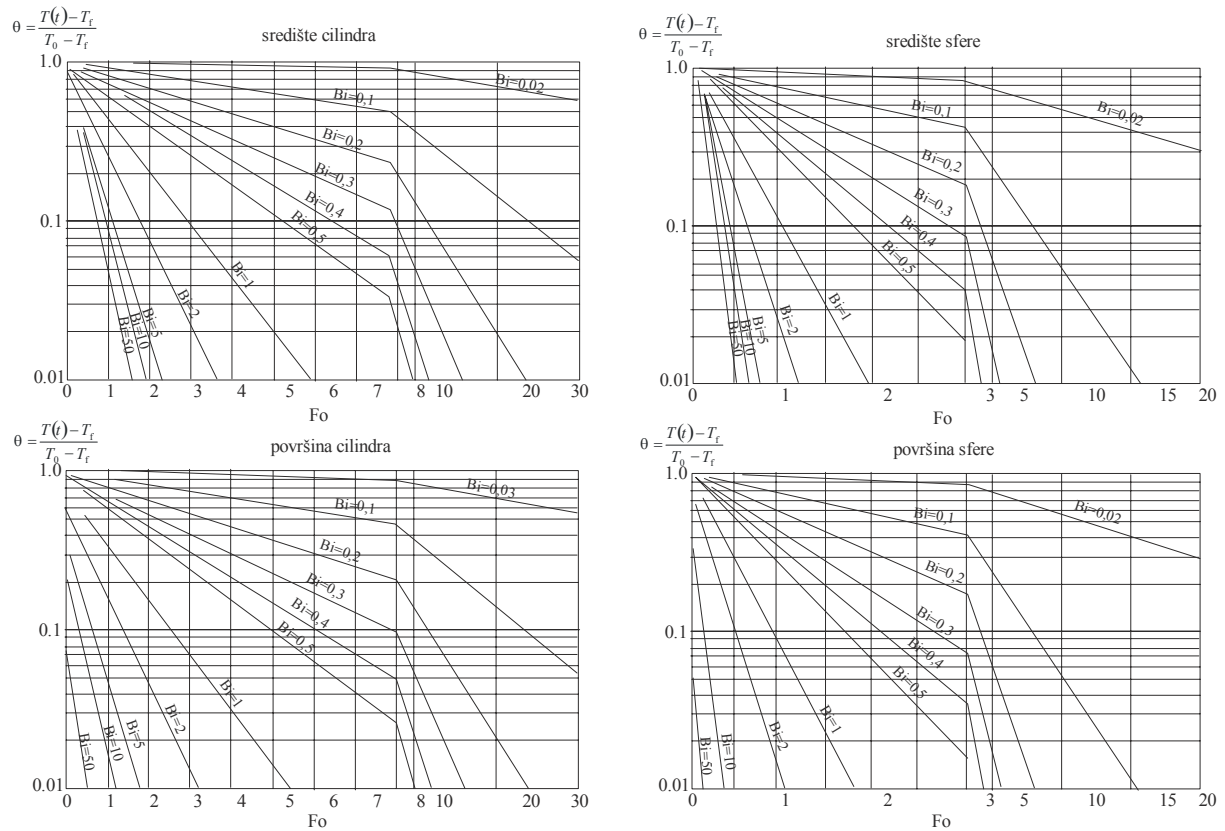
Slika 3.16. Funkcionalan ovisnosti $\theta = f(Bi, Fo)$ za ploču

Iz slike 3.16. vidljivo je da su funkcije različite za različite položaje u tijelu pa tako možemo definirati bezdimenzijsku temperaturu u središtu i na površini tijela:

$$\theta = \frac{T(t, x_+ = 0) - T_f}{T_0 - T_f} \quad (3.95.)$$

$$\theta = \frac{T(t, x_+ = 1) - T_f}{T_0 - T_f} \quad (3.96.)$$

Analogni dijagrami postoje i za cilindrični i sferično tijelo (slika 3.17.).



Slika 3.17. Funkcionalan ovisnosti $\theta = f(Bi, Fo)$ za cilindar i sferu

Odgovarajuća analitička rješenja diferencijalne jednačbe su:

Cilindar beskonačnih dimenzija:

$$\theta = \frac{2 \cdot J_1(\mu_1)}{\mu_1 \cdot [J_0^2(\mu_1) + J_1^2(\mu_1)]} \cdot J_0(\mu_1 \cdot X) \cdot e^{-\mu_1^2 \cdot Fo} \quad (3.97.)$$

$$\frac{J_0(\mu)}{J_1(\mu)} = \frac{\mu}{Bi} \quad (3.98.)$$

Ovdje su:

$$X = \frac{r}{r_0}, \text{ bezdimenzijski položaj}$$

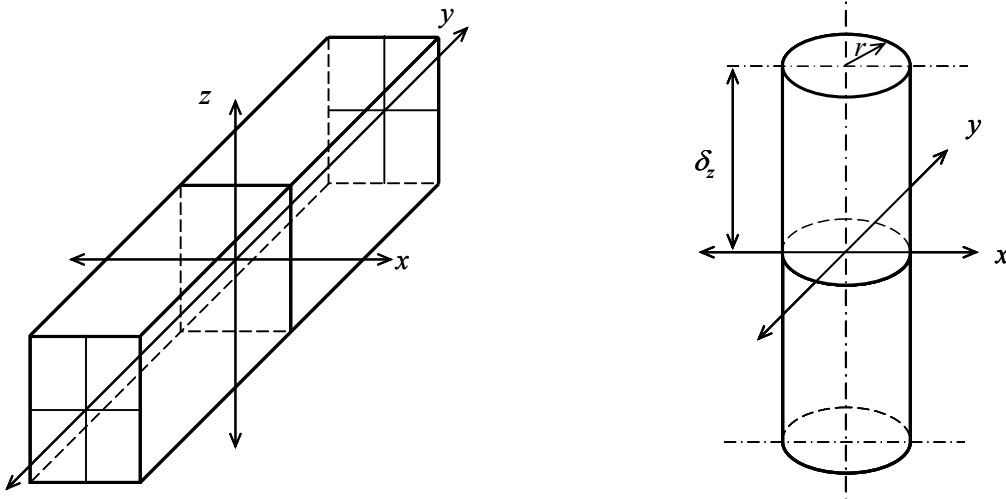
J_0 i J_1 Besselove funkcije nultog I prvog reda.

Za sferu:

$$\theta = \frac{2 \cdot (\sin(\mu_1) - \mu_1 \cdot \cos(\mu_1))}{(\mu_1 - \sin(\mu_1) \cdot \cos(\mu_1)) \cdot \mu_1 \cdot X} \cdot \sin(\mu_1 \cdot X) \cdot e^{-\mu_1^2 \cdot Fo} \quad (3.99.)$$

$$\operatorname{tg}(\mu) = -\frac{\mu}{Bi - 1} \quad (3.100.)$$

Vrijednosti konstante μ su tabelirane, kao i za ploču.



3.18. Tijela konačnih dimenzija

Za tijelo konačnih dimenzija smješteno u medij koji je na višoj ili nižoj temperaturi, prikazanog na slici 3.18. rješenje diferencijalne jednadžbe svodi se na:

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_x \cdot \bar{\theta}_y \cdot \bar{\theta}_z = \bar{f}_x(Bi_x, Fo_x) \cdot \bar{f}_y(Bi_y, Fo_y) \cdot \bar{f}_z(Bi_z, Fo_z) \quad (3.101.)$$

Pojedini članovi gornje jednadžbe računaju se pomoću jednadžbe 3.88.

Za cilindar:

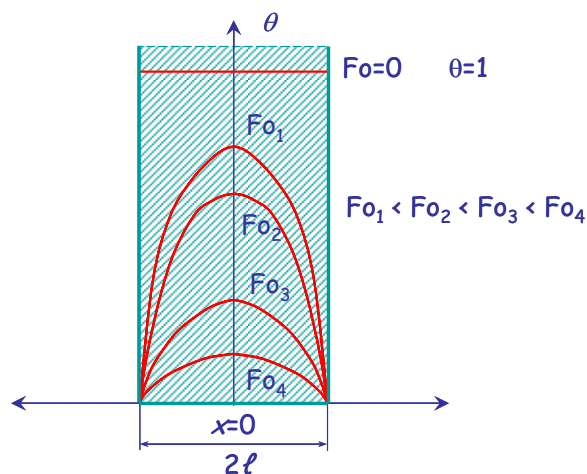
$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_z \cdot \bar{\theta}_r = \bar{f}_z(Bi_z, Fo_z) \cdot \bar{f}_r(Bi_r, Fo_r) \quad (3.102.)$$

Funkcija $\bar{f}_z(Bi_z, Fo_z)$ računa se pomoću jednadžbe 3.88, a $\bar{f}_r(Bi_r, Fo_r)$ pomoću jednadžbe 3.97.

Raspodjela temperatura u tijelu kod različitih vrijednosti Biotove značajke:

Promatrajmo slučaj u kojem tijelo oblika ploče, temperature T_0 uronimo u srazmjerno veliki volumen vode znatno niže temperature (T_f). Ovisno o toplinskim karakteristikama tijela dolazi i do različitih temperaturnih raspodjela.

$Bi > 100$



Slika 3.19. Raspodjela temperatura u ravnoj ploči prilikom hlađenja za $Bi \rightarrow \infty$

Vrijednosti koeficijenta toplinske vodljivosti (λ) male su u odnosu na koeficijent prijelaza topline (α). Unutarnji otpor je dakle vrlo velik. Izmjena s okolinom je brza te se temperatura stjenke ploče pri

hlađenju gotovo trenutno izjednačava s temperaturom okoline, dok se unutrašnjost tijela polagano hladi. U tom slučaju proces hlađenja ovisi o fizikalnim svojstvima i geometriji tijela:

U vremenu $t = 0$ ($Fo = 0$), temperatura tijela je jednolika u cijelom volumenu.

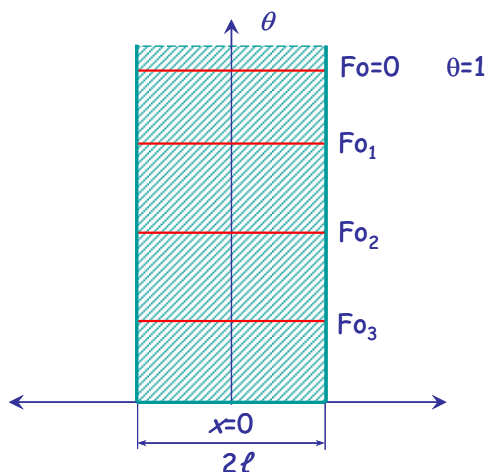
$$\theta_{x_+=1} = 0 \quad (3.103.)$$

$$\theta_{x_+=1} < \theta_{x_+=0} \quad (3.104.)$$

$$\theta_{X=0} = \frac{T(t, x_+ = 0) - T_f}{T_0 - T_f} = \frac{4}{\pi} \cdot e^{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot Fo} \quad (3.105.)$$

$Bi < 0,1$

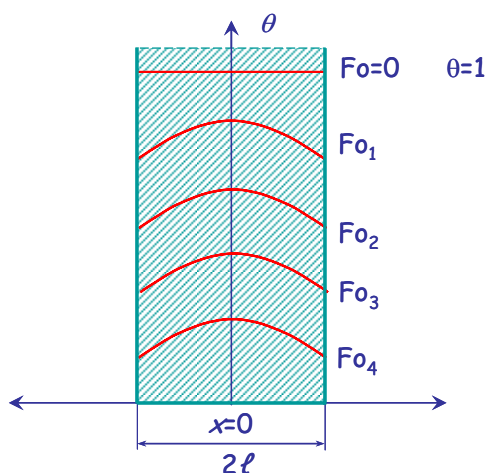
U pravilu vrijedi kod tankih ploča velikog koeficijenta toplinske vodljivosti i malog koeficijenta prijelaza topline, a to znači da je vanjski otpor velik. Hlađenje je brzo, temperatura stjenke ploče pri hlađenju se zbog dobre toplinske vodljivosti tijela neznatno razlikuje od temperature u sredini. Brzina grijanja i hlađenja tijela ovisi isključivo o intenzitetu prijenosa topline, dakle ovisi o vanjskim uvjetima.



Slika 3.20. Raspodjela temperatura u ravnoj ploči prilikom hlađenja za $Bi < 0,1$

$$\theta_{X=0} = \theta_{X=1} = e^{-Bi \cdot Fo} \quad (3.106.)$$

$0,1 < Bi < 100$



Slika 3.21. Raspodjela temperatura u ravnoj ploči prilikom hlađenja za $0,1 < Bi < 100$

Promjena temperature u zidu podjednako je ovisna i o unutarnjem i o vanjskom otporu.

Procjena prenesene topline

Količina topline koja se prenosi za vrijeme hlađenja (ili zagrijavanja) može se izračunati na sljedeći način. Toplina koja se prenosi s toplog fluida na hladni medij općenito se izračunava na temelju jednadžbe:

$$Q = m \cdot c_p \cdot \Delta T = V \cdot \rho \cdot c_p \cdot \Delta T \quad (3.107.)$$

Ukupno (maksimalno moguća) prenesena toplina pri hlađenju tijela od početne temperature do temperature fluida:

$$Q_{\text{uk}} = Q_{\text{max}} = V \cdot \rho \cdot c_p \cdot (T_0 - T_f) \quad (3.108.)$$

u vremenskom intervalu od $t = 0$ do $t = t_1$ ($Fo = 0$ do Fo_1):

$$Q_1 = V \cdot \rho \cdot c_p \cdot (T_0 - T_1) \quad (3.109.)$$

Ako se temperaturnoj razlici doda i oduzme T_f :

$$Q_1 = V \cdot \rho \cdot c_p \cdot [T_0 - T_f - (T_1 - T_f)] \quad (3.110.)$$

Na taj način uvodi se neostvarena temperaturna promjena:

$$Q_1 = V \cdot \rho \cdot c_p \cdot (T_0 - T_f) \cdot \left[1 - \frac{T_1 - T_f}{T_0 - T_f} \right] \quad (3.111.)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\theta_1(t_1)}$

$$Q_1 = V \cdot \rho \cdot c_p \cdot (T_0 - T_f) \cdot (1 - \theta_1) \quad (3.112.)$$

Gornju jednadžbu možemo pisati općenito za bilo koje vrijeme pa dobijemo:

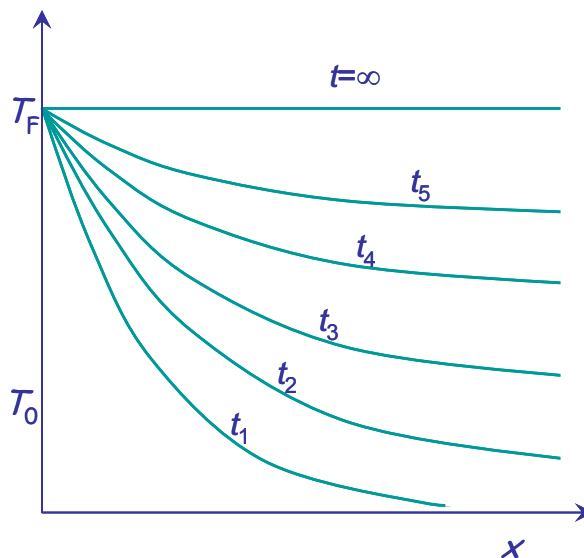
$$Q_1 = V \cdot \rho \cdot c_p \cdot (T_0 - T_f) \cdot [1 - \theta(t)] \quad (3.113.)$$

odnosno:

$$Q(t) = Q_{\text{uk}} \cdot [1 - \theta(t)] \quad (3.114.)$$

3.1.4.4. Zagrijavanje (hlađenje) polubeskonačnog tijela

Penetracija topline kod grijanja ili hlađenja semiinfinitenzimalnog tijela (polubeskonačnog) odvija se samo s jedne strane, odnosno samo u jednom dijelu od ukupne površine (npr. naglo hlađenje Zemljine površine). Površina tijela trenutno se podvrgne visokoj temperaturi (T_f) i održava se na toj temperaturi.



Slika 3.22. Hlađenje tijela polubeskonačnih dimenzija

Tokom zagrijavanja uspostavlja se različita raspodjela temperatura u ovisnosti o udaljenosti od stijenke. U ovim slučajevima, raspodjela temperatura u tijelu izražava se normalnom raspodjelom (Gausovim integralom vjerojatnosti):

$$\frac{T_f - T(t)}{T_f - T_0} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_0^z e^{-z^2} dz \quad (3.115.)$$

Parametar z definira se na sljedeći način:

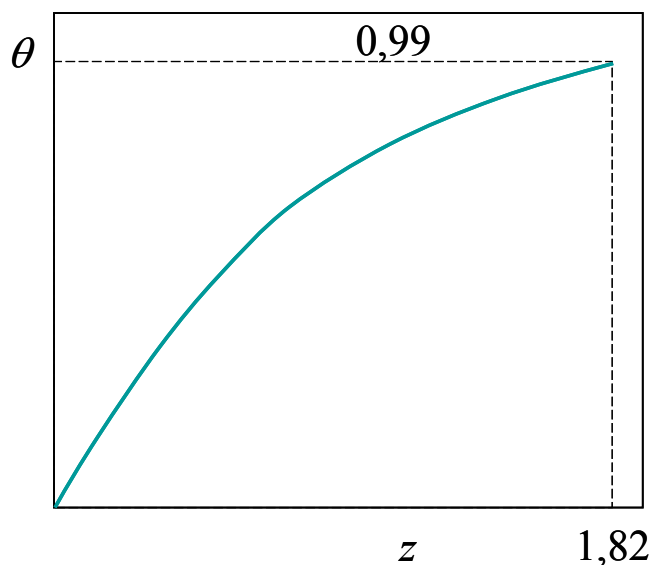
$$z = \frac{x}{2 \cdot \sqrt{a \cdot t}} \quad (3.116.)$$

Za proračune se u ovim slučajevima uvodi pojam *dubine penetracije* koja se određuje na temelju Gausovog integrala vjerojatnosti (statističke tablice). Dubina penetracije je udaljenost od površine tijela na kojoj se u unutrašnjosti tijela pod utjecajem promjena na površini može ustanoviti promjena bezdimenzijske temperature u vrijednosti od 1% ukupne moguće promjene.

$$\frac{T_f - T(t)}{T_f - T_0} = \theta_n(t) = 0,99 \quad \text{neostvarena promjena}$$

$$\frac{T(t) - T_f}{T_0 - T_f} = \theta_o(t) = 0,01 \quad \text{ostvarena promjena}$$

Na temelju vrijednosti parametra z može se iz dijagrama ili statističkih tablica za svaku raspodjelu očitati neostvarena temperaturna promjena.



Slika 3.23. Ovisnost neostvarene temperaturne promjene o parametru z

Kod $\theta = 0,99$ vrijednost bezdimenzijske značajke $z = 1,82$, a $x = x_{\text{penetracije}}$. Iz jednadžbe (3.116.) slijedi:

$$x_p = 2 \cdot z \cdot \sqrt{a \cdot t} = 2 \cdot 1,82 \cdot \sqrt{a \cdot t} = 3,64 \cdot \sqrt{a \cdot t} \quad (3.117.)$$

$$x_p \cong 2 \cdot \sqrt{\pi \cdot a \cdot t} \quad (3.118.)$$

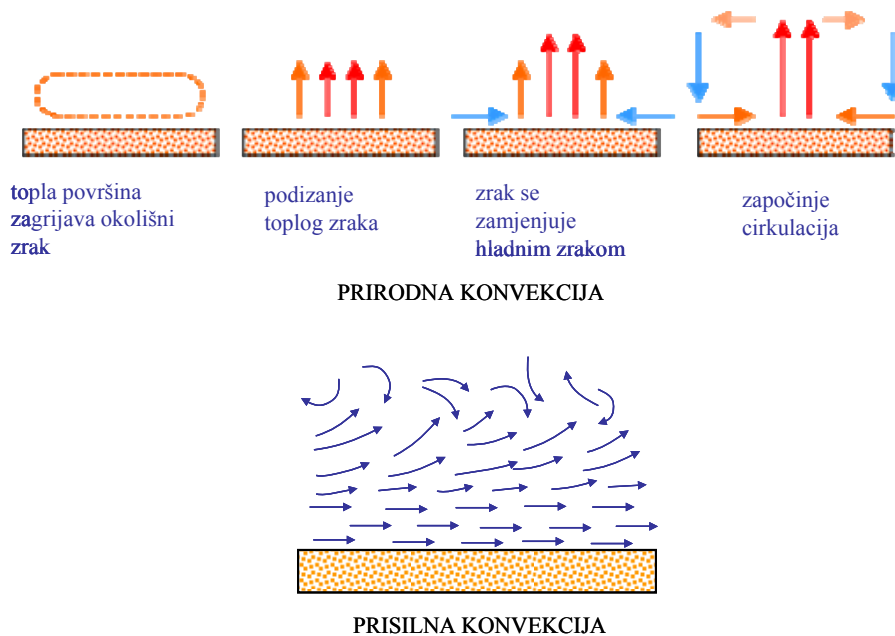
Proračuni se provode uz upotrebu statističkih tablica. Danas se pomoću računala proračuni provode primjenom metode nelinearne regresije.

3.2. Prijenos topline konvekcijom

Konvekcija je vrtložni mehanizam prijenosa topline pri čemu se topline prenosi grupama molekula. Karakterističan je za fluide u gibanju pri čemu se pod konvektivnim prijenosom topline ne podrazumijeva samo izmjena u masi fluida nego čak i značajnije, izmjena između fluida i čvrste površine. Dakle konveksijski mehanizam prijenosa topline povezuje kombinaciju efekata kondukcije i strujanja fluida pri čemu pojedine čestice na različitim temperaturama dolaze u kontakt. Do prijenosa topline dolazi zbog gibanja toplih ili hladnih dijelova fluida između područja različitih temperatura.

Budući da gibanje može biti uzrokovano bilo zbog lokalne razlike gustoća, ili kao posljedica utjecaja vanjske (narinute) sile, razlikuje se (slika 2.24.):

- prirodna konvekcija - gibanje je uzrokovano lokalnim razlikama u temperaturi, a zbog toga i u gustoći te dolazi do spontanog miješanja fluida
- prisilna konvekcija - gibanje je uzrokovano primjenom raznih uređaja (pumpe, ventilatori, miješalice)



Slika 2.24. Prijenos topline prirodnom i prisilnom konvekcijom

Ukoliko nema strujanja fluida iznad površine koja je na višoj temperaturi dio fluida uz toplu površinu lagano se zagrijava, te kada se ostvari dovoljna razlika u temperaturi, odnosno gustoći dolazi do cirkulacije. Pri tome se topli dio fluida zbog manje gustoće podiže i miješa sa hladnijim slojem. Prijenos topline je brži kod prisilne konvekcije pa se i prenese veća količina topline. Naime, ako iznad tople površine struji fluid, razvija se hidrodinamički granični sloj. Količina prenesene topline bitno ovisi o hidrodinamičkim uvjetima jer nije svedeno da li se radi o laminarnom ili turbulentnom gibanju fluida. Kod laminarnog strujanja prevladava konduktivni mehanizam, dok kod turbulentnog vrtložni mehanizam.

Općenito, fluks količine topline ovisi o fizikalnim svojstvima, geometrijskim i hidrodinamičkim karakteristikama promatranog sustava.

Fizikalna svojstva fluida

Prijenos topline konvekcijom odvijat će se na različite načine ovisno o fizikalnim svojstvima promatranog sustava. Fizikalna svojstva značajna za konvekciju su:

- koeficijent toplinske vodljivosti, λ
- specifični toplinski kapacitet, c_p

- koeficijent temperaturne vodljivosti, a
- dinamička viskoznost, η
- gustoća, ρ

Svako od navedenih svojstava ovisi o temperaturi, a neka i o tlaku, pa je očit njihov značaj za opis procesa prijenosa topline konvekcijom. U ovom poglavlju razmatrat će se slučaj kada su fizikalna svojstva fluida stalna u promatranom intervalu temperature.

Geometrijske karakteristike

Geometrijske karakteristike bitne za prijenos topline konvekcijom su:

- veličina i oblik površine (ravna ili zakrivljena)

Već je rečeno da konvekcijski prijenos topline uključuje i prijenos topline kondukcijom. U poglavljima vezanim uz kondukciju naglašeno je da je geometrijs sustava veoma bitna, te da analitička rješenja diferencijalne jednadžbe kondukcije osim o početnim i graničnim uvjetima ovise i o geometriji tijela. S druge strane, obzirom da konvekcija uključuje strujanje fluida jasan je utjecaj geometrije sustava, posebice ako fluid strijui oko tijela koje je na drugoj temepraturi. Osim toga, što je veća površina izmjene topline (na primjer kod izmjenjivača topline) izmijenit će se veća količina topline između fluida i tijela.

Hidrodinamičke karakteristike

- srednja brzina strujanja
- Reynoldsova značajka
- debljina hidrodinamičkog graničnog sloja

3.2.1. Diferencijalna jednadžba konvekcije

Prijenos topline konvekcijom opisuje se sljedećom osnovnom jednadžbom:

$$q = q_{\text{kondukcije}} + q_{\text{konvekcije}} \quad (3.119.)$$

$$q = -\lambda \cdot \nabla T + \rho \cdot v \cdot h \quad (3.120.)$$

Ovdje su:

- q – gustoća toplinskog toka, Wm^{-2}
- λ – koeficijent toplinske vodljivosti, $\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
- ρ – gustoća, kg m^{-3}
- v – brzina strujanja fluida, ms^{-1}
- h – entalpija, J kg^{-1}

Za realnu kapljevinu vrijedi:

$$h = f(T, p) \quad (3.121.)$$

Obzirom da entalpija ovisi o tlaku i temperaturi može se pisati:

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T dp \quad (3.122.)$$

Zbog nestlačivosti kapljevinu:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p} \right)_T = 0 \quad (3.123.)$$

Pa je:

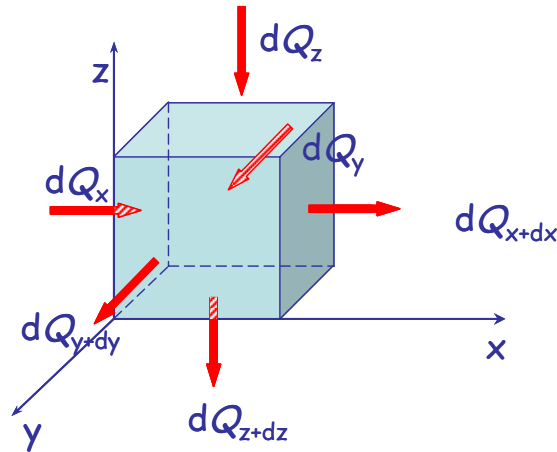
$$h = \int_T c_p \cdot dT \quad (3.124.)$$

Energetska jednadžba

Uz uvjet da su zadovoljene sljedeće pretpostavke:

- homogeni izotropni fluid
- stalna fizikalna svojstva
- toplotina se prenosi kondukcijom i konvekcijom

može se izvesti jednadžba koja opisuje temperaturno polje fluida koji se giba.



Slika 2.25. Uz izvod energetske jednadžbe konvekcije

Zamislimo elementarni dio fluida koji struji, kako je prikazano na slici 2.25. Toplina se prenosi kondukcijskim i konveksijskim mehanizmom na svim plohama elementarnog volumena.

$$\rho \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = - \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) + q_v \quad (3.125.)$$

Gustoće toplinskog toka u svim smjerovima opisane su sljedećim jednadžbama:

$$q_x = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \rho \cdot v_x \cdot h \quad (3.126.)$$

$$q_y = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + \rho \cdot v_y \cdot h \quad (3.127.)$$

$$q_z = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial z} + \rho \cdot v_z \cdot h \quad (3.128.)$$

Ako se jednadžbe 3.126, 3.127 i 3.128. uvrste u jednadžbu 3.125. dobiva se jednadžba 3.129.:

$$\rho \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = \lambda \cdot \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \rho \cdot \left(v_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \right) - \rho \cdot h \cdot \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + q_v$$

Zbog nestlačivosti:

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (3.130.)$$

te uz jednadžbu 3.124. i:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \nabla^2 T \quad (3.131.)$$

dobiva se:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \cdot \frac{\partial T}{\partial z} = a \cdot \nabla^2 T + \frac{q_v}{\rho \cdot c_p} \quad (3.132.)$$

uz:

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad \frac{dy}{dt} = v_y \quad \frac{dz}{dt} = v_z$$

lijeva strana jednadžbe predstavlja totalni diferencijal temperature, $T=f(x, y, z, t)$:

$$\frac{dT}{dt} = a \cdot \nabla^2 T + \frac{q_v}{\rho \cdot c_p} \quad (3.133.)$$

Ukoliko fluid miruje dobiva se jednadžba kondukcije (jednadžba 3.24.).

Jednadžba strujanja

Izvod je prilično složen pa će se dati samo konačna jednadžba. Detaljan izvod studenti uče na kolegiju Mehanika fluida (navier-Stokesove diferencijalne jednadžbe).

Zamislimo elementarni dio volumena koji se giba. Na taj fluid djeluju sile gravitacije, tlaka i trenja. Uz pretpostavku da su fizikalna svojstva fluida stalna te da nema ekspanzije volumena, može se pisati:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \cdot \nabla p + \nu \cdot \nabla^2 v \quad (3.134.)$$

Jednadžba kontinuiteta

Računa se masa fluida koja prijeđe kroz elementarni volumen u jedinici vremena u sva tri smjera:

$$dm_x + dm_{x+dx} = \frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} \cdot dV \cdot dt \quad (3.135.)$$

$$dm_y + dm_{y+dy} = \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} \cdot dV \cdot dt \quad (3.136.)$$

$$dm_z + dm_{z+dz} = \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} \cdot dV \cdot dt \quad (3.137.)$$

Promjena mase volumena zbog promjene gustoće:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV \cdot dt \quad (3.138.)$$

Sumiranjem gornjih jednadžbi dobiva se:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot dV \cdot dt + \frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} \cdot dV \cdot dt + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} \cdot dV \cdot dt + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} \cdot dV \cdot dt = 0 \quad (3.139.)$$

Sređivanjem se dobiva za stlačive fluide:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \cdot v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \cdot v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \cdot v_z)}{\partial z} = 0 \quad (3.140.)$$

a za nestlačive:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.141.)$$

Prijenos topline konvekcijom u nestlačivom jednofaznom mediju uz konstantne fizikalne veličine opisuje se sustavom diferencijalnih jednadžbi danih izrazima 3.120., 3.133., 3.134. i 3.141.

Za matematički opis pojedinog procesa moraju biti definirani sljedeći uvjeti:

- geometrijski uvjeti: oblik i veličina sustava u kojem se proces odvija
- fizikalni uvjeti: fizikalna svojstva sustava
- početni (vremenski) uvjet: u vremenu $t=0$
- granični (rubni) uvjeti: na granicama sustava koji uključuje granične vrijednosti nepoznatih zavisnih varijabli ili njihovih derivacija

3.2.2. Hidrodinamički i toplinski granični sloj

Pri zagrijavanju fluida koji struji, osim formiranja hidrodinamičkog graničnog sloja, dolazi do formiranja **toplinskog graničnog sloja** koji predstavlja glavni otpor prijenosu topline.

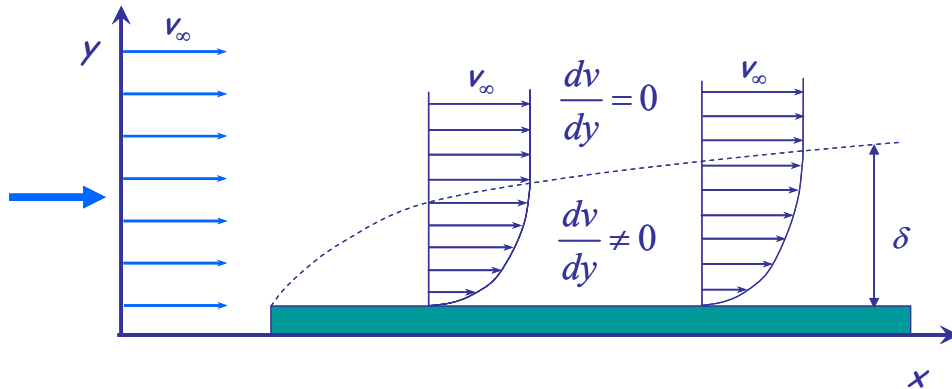
Ako stjenka miruje fluid uz samu stjenku također miruje ($v=0$). U mirujućem sloju fluida gustoća toplinskog toka može se izračunati korištenjem Fourierove jednadžbe:

$$q_s = -\lambda \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (3.142.)$$

Uz Newtonov zakon jednadžba prijenosa topline (sa stjenke na fluid i obrnuto) može se izračunati koeficijent prijelaza topline, α :

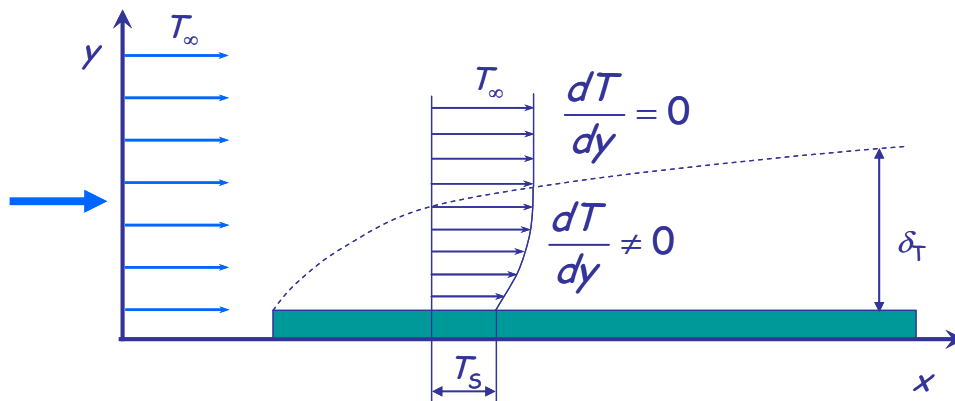
$$\alpha = -\frac{\lambda}{T_s - T_f} \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (3.143.)$$

Zamislamo ravnu plohu iznad koje struji fluid. U masi fluida brzina i temperatura su stalne, v_∞ , T_∞ . Zbog viskoznih sila stvara se tanki sloj uz stjenku unutar kojeg postoji određeni profil brzina (slika 2.26.).

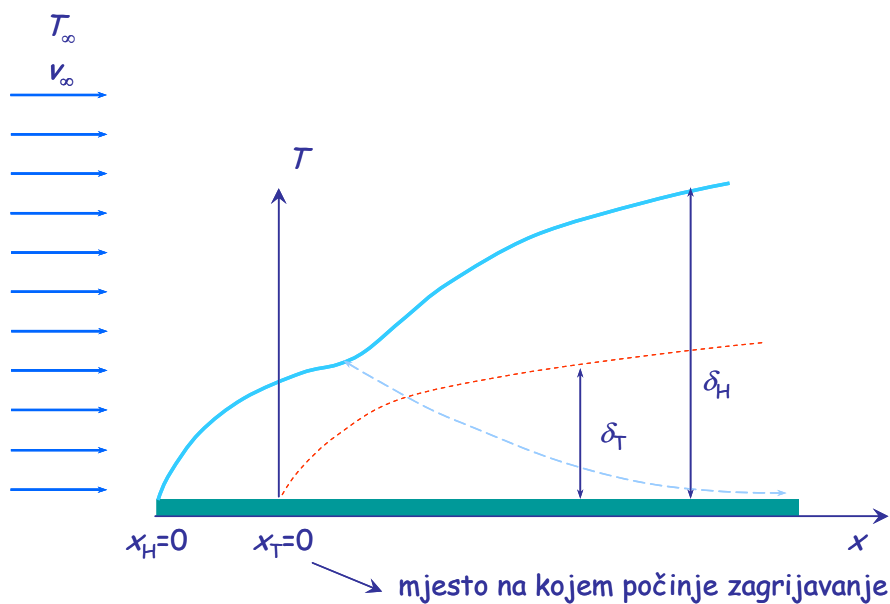


Slika 2.26. Profil brzina unutar hidrodinamičkog graničnog sloja

Ukoliko se ploča zagrijava pomoću fluida, analogno hidrodinamičkom graničnom sloju razvija se toplinski granični sloj, odnosno sloj fluida uz stjenku unutar kojeg postoji određeni temperaturni profil (slika 2.27.). Kako je debljina sloja vrlo mala u odnosu na debljinu stjenke kondukcija duž sloj može se zanemariti.



Slika 3.27. Profil temperature unutar toplinskog graničnog sloja



Slika 3.28. Formiranje hidrodinamičkog i toplinskog graničnog sloja

Debljina toplinskog graničnog sloja je ona debljina u kojoj postoji toplinski gradijent, a izvan toplinskog graničnog sloja temperatura mase fluida je jednolična. Na slici 3.28. x_H predstavlja početak razvoja hidrodinamičkog graničnog sloja, dok je x_T točka početka razvijanja toplinskog graničnog sloja.

Debljine hidrodinamičkog i toplinskog graničnog sloja uglavnom se ne podudaraju. Njihov odnos ovisi o vrsti i svojstvima fluida koji struji, brzini strujanja (laminarno, prijelazno ili turbulentno) te prijenosu topline.

Odnos između debljine hidrodinamičkog i toplinskog graničnog sloja definira se prema *Polhausenu* na sljedeći način:

$$\frac{\delta_H}{\delta_T} = Pr^{\frac{1}{3}} \quad (3.144.)$$

3.2.3. Primjena dimenzijske analize

Prijenos topline konvekcijom opisuje se sustavom diferencijalnih jednadžbi koje su rješive uz određene geometrijske, početne i granične uvjete. Pri tome se nepoznate varijable mogu procijeniti eksperimentalno. Da bi se utvrdio utjecaj procesnih parametara na svojstva procesa sva druga svojstva i parametri moraju se održavati konstantnim. Problem koji se javlja vezan je uz (*scale-up*) prenošenje rezultata sa laboratorijskog na industrijsko mjerilo.

3.2.3.1. Koeficijent prijelaza topline

Određivanje količine topline koja se prenosi sa stijenke na fluid (ili obrnuto), temelji se na teoriji graničnog sloja te na pretpostavci da je glavni otpor prijenosu topline u toplinskom graničnom sloju (laminarnom podsloju) za potpuno razvijeni tok, gdje se toplina prenosi molekularnim mehanizmom – kondukcijom. Uz to treba naglasiti da je koeficijent toplinske vodljivosti fluida nizak pa je zato otpor velik.

Temeljna pretpostavka je vezana uz što točnije definiranje koeficijenta prijelaza topline (α) čija vrijednost kvantitativno definira brzinu izmjene topline konvekcijom. Koeficijent prijelaza topline ovisi o čitavom nizu parametara te se najčešće određuje eksperimentalno:

$$\alpha = f(v, \rho, \eta, \lambda, \beta, c_p, \Delta T, l, d) \quad \left[\text{J m}^{-2} \text{K}^{-1} \text{s}^{-1} \right]$$

gdje je: v - srednja brzina strujanja

β - koeficijent toplinske ekspanzije

l, d - linearne dimenzije

Provedbom dimenzijske analize izvedene su bezdimenzijske značajke koje su funkcionalno povezane korelacijskim jednadžbama koje se koriste pri opisivanju prijenosa topline konvekcijom uz uvjet geometrijske i dinamičke sličnosti.

3.2.3.2. Bezdimenzijske značajke

Prandtlova značajka (Pr)

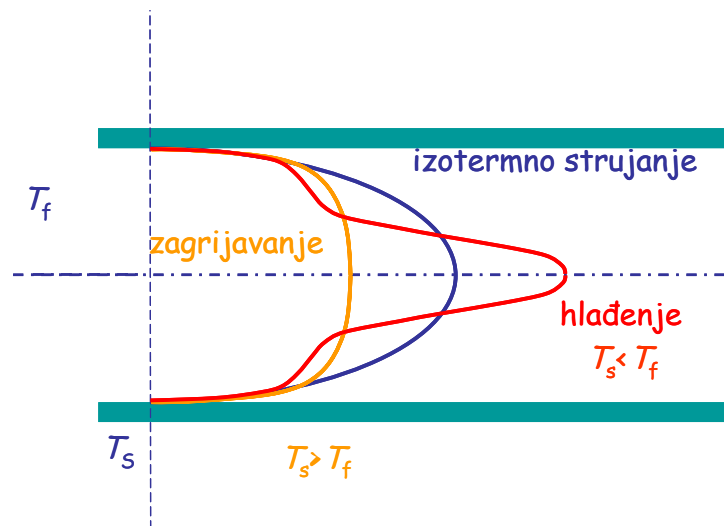
Predstavlja omjer difuzivnosti količine gibanja (izražene kinematičkom viskoznošću) i temperaturne difuzivnosti (izražene koeficijentom temperaturne vodljivosti). Dobiva se kao omjer Pecletove značajke:

$$\text{Pr} = \frac{\text{Pe}}{\text{Re}} = \frac{\frac{v \cdot \ell}{a}}{\frac{v \cdot d \cdot \rho}{\eta}} = \frac{\eta}{\rho \cdot a} \quad (3.145.)$$

$$\text{Pr} = \frac{v}{a} = \frac{\eta \cdot c_p}{\lambda} \quad (3.146.)$$

Kod viskoznih tekućina najčešće je $Pr > 1$ što znači da je hidrodinamički granični sloj veći od toplinskog. Kod plinova su debljine slojeva približno jednake ($Pr = 1$). Izuzetak pravila su tekući metali kod kojih je $Pr \approx 10^{-2}$ i ne vrijedi jednačina (169).

Budući da se promjenom temperature mijenjaju i fizikalna svojstva fluida, nije svejedno da li se radi o hlađenju ili zagrijavanju. Tako npr., brzina prijenosa topline kod kapljevina veća je kod zagrijavanja nego kod hlađenja. Razlike u temperaturi stijenke i fluida utječu na raspodjelu brzina, odnosno formiranje različitih brzinskih profila.



Slika 3.29. Profili brzina pri zagrijavanju i hlađenju

Npr. ukoliko je temperatura stijenke veća od temperature fluida, viskoznost fluida uz stijenku je manja od viskoznosti u masi fluida te je i debljina hidrodinamičkog, a istovremeno i toplinskog, graničnog sloja manja tako da je i otpor prijenosu topline manji.

Nusseltova značajka

Predstavlja odnos između ukupno prenesene topline i topline prenesene kondukcijom.

$$\text{Nu} = \frac{\alpha \cdot \ell}{\lambda} = \frac{\ell}{\frac{1}{\alpha}} \quad (3.147.)$$

Podsjeća na Biotovu značajku međutim kod Nusseltove značajke koeficijent toplinske vodljivosti odnosi se na fluid, dok je kod Biotove značajke to svojstvo čvrstog tijela.

Stantonova značajka

Predstavlja odnos između ukupno prenesene topline i raspoložive toplinske energije fluida. Odnosi se na prijenos topline prisilnom konvekcijom. Može se izraziti kao omjer Nusseltove značajke i umnoška Reynoldsove i Prandtllove značajke.

$$St = \frac{Nu}{Re \cdot Pr} = \frac{\frac{\alpha \cdot \ell}{\lambda}}{\frac{v \cdot d \cdot \rho}{\eta} \cdot \frac{c_p \cdot \eta}{\lambda}} \quad (3.148.)$$

$$St = \frac{\alpha}{c_p \cdot v \cdot \rho} \quad (3.149.)$$

Grashoffova značajka

Mjerodavna je kod prirodne konvekcije, a predstavlja omjer između sile uzgona uzrokovane razlikom gustoća i molekularnog trenja.

$$Gr = \frac{\beta \cdot g \cdot \ell^3 \cdot \Delta T}{\nu^2} \quad (3.150.)$$

$$\beta \cdot \Delta T = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \quad (3.151.)$$

Peckleova značajka

Dobiva se redukcijom energetske jednadžbe u bezdimenzijski oblik i u konačnici također predstavlja omjer količina topline prenesene konvekcijom i kondukcijom:

$$Pe = Pr \cdot Re = \frac{v \cdot \ell}{a} = \frac{\rho \cdot c_p \cdot v \cdot T}{\frac{\lambda}{\ell} \cdot T} \quad (3.152.)$$

Bezdimenzijske korelacijske jednadžbe prijenosa topline, dobivene dimenzijskom analizom, u općem obliku mogu se svesti u dvije osnovne grupe:

- prisilna konvekcija $Nu = f(Re, Pr, geometrija)$
- prirodna konvekcija $Nu = f(Gr, Pr, geometrija)$

Kod plinova je Prandtlova značajka praktički neovisna o temperaturi pa slijedi:

$$Nu = f(Re)$$

Budući da je intenzitet prijenosa različit ovisno o tome da li se fluid grijeje ili hladi, često se primjenjuju indeksi f (fluid) i s (stijenka) uz značajke i druge veličine te se uvode i bezdimenzijski parametri:

$$\frac{T_f}{T_s} \quad - \text{značajan za plinove}$$

$$\frac{\eta_f}{\eta_s}, \frac{Pr_f}{Pr_s} \quad - \text{značajni za kapljevine}$$

Indeks (f) ukazuje na svojstva mase fluida, a indeks (s) na svojstva fluida neposredno uz stijenku.

Budući da fizikalne karakteristike fluida ovise o temperaturi potrebno je definirati mjerodavnu temperaturu.

U graničnom sloju često se koristi aritmetička sredina: $\bar{T}_\delta = \frac{T_s + T_f}{2}$.

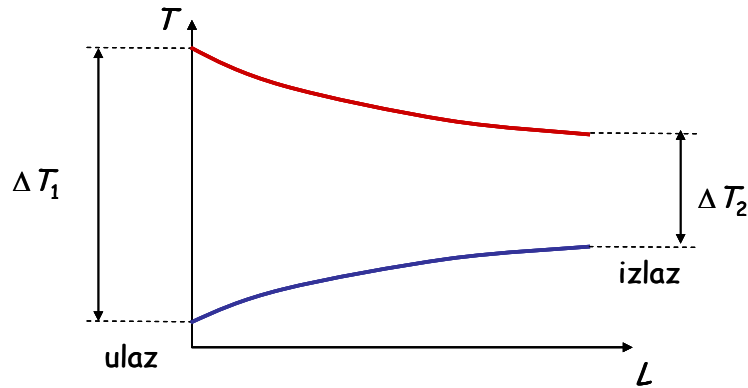
Ako se temperatura mijenja duž toka, mijenja se i pokretačka sila, odnosno razlika temperature pa je potrebno izračunati srednju pokretačku silu. Naime za procjenu srednjeg koeficijenta prijelaza topline često se koristi Newtonov zakon:

$$\bar{\alpha} = \frac{Q}{A \cdot \Delta \bar{T}} \quad (3.153.)$$

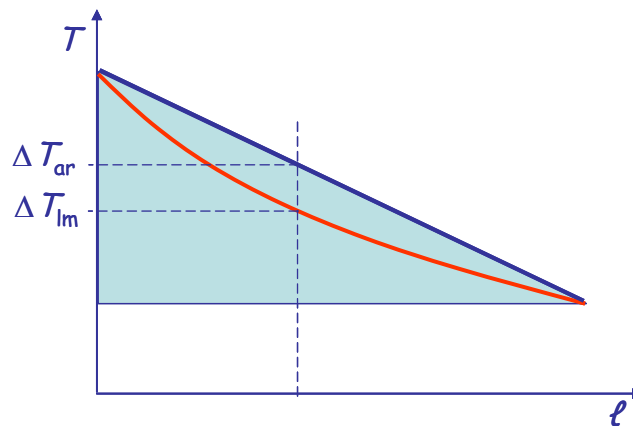
Srednja pokretačka sila izražava se kao aritmetička ili logaritamska srednja vrijednost između dvije lokalne pokretačke sile (na ulazu i izlazu promatrane sekcije, slika 3.30.):

$$\Delta T_{ar} = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2} \quad (3.154.)$$

$$\Delta T_{lm} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln\left(\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}\right)} \quad (3.155.)$$



Slika 3.30. Određivanje pokretačke sile



Slika 3.31. Usporedba logaritamske i aritmetičke srednje pokretačke sile

Na slici 3.31. prikazana je usporedba aritmetičke i logaritamske srednje pokretačke sile. Može se uočiti da je duž cijve površine izmjene topline aritmetička sredina veća od logaritamske. Općenito vrijedi pravilo da ako je:

$$\frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} > 0,5 \quad (3.156.)$$

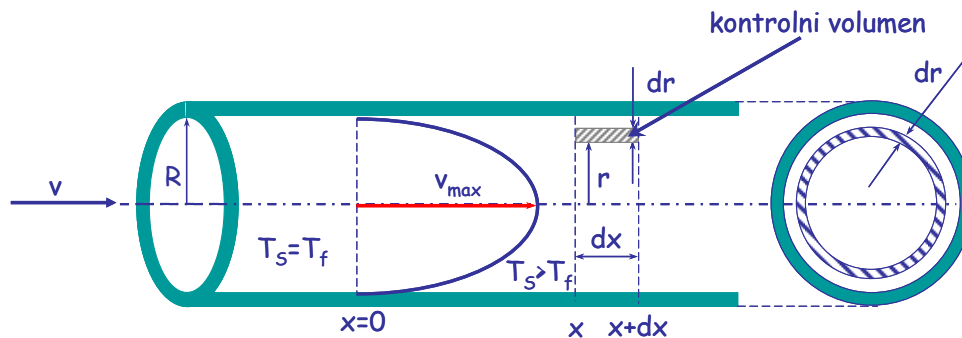
tada se uz zadovoljavajuću točnost može za proračune koristiti srednja aritmetička vrijednost, jer je:

$$\Delta T_{lm} \approx \Delta T_{ar} \quad (3.157.)$$

3.2.4. Prijenos topline pri laminarnom toku u cijev

Najznačajniji proces prijenosa topline konvekcijom je grijanje ili hlađenje fluida koji struji kroz cijev koji se odvija u izmjenjivačima topline.

Za egzaktno rješavanje problema vezanih uz prijenos topline pri laminarnom strujanju viskozne kapljevine promatra se definirani volumen fluida (slika 3.32.). Kapljevina se zagrijava preko čvrste stjenke, a pri tome se zanemaruje kondukcija u aksijalnom smjeru i toplina nastala viskoznom disipacijom.



Slika 3.32. Prijenos topline pri laminarnom toku u cijevi kružnog presjeka

Na mjestu $x = 0$ javlja se toplinski fluks sa stjenke na masu fluida (počinje zagrijavanje) i to:

1. Kondukcija u radijalnom smjeru (\dot{Q}_{rad})

$$\underbrace{q_r \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot dx}_{\text{ulaz}} - \underbrace{q_{r+dr} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot dx}_{\text{izlaz}} = -2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{\partial q_r}{\partial r} \cdot dr \cdot dx \quad (3.158.)$$

2. Kondukcija u aksijalnom smjeru (\dot{Q}_{aks})

$$\underbrace{q_x \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot dx}_{\text{ulaz}} - \underbrace{q_{x+dx} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot dx}_{\text{izlaz}} = -2 \cdot r \cdot \pi \cdot \frac{\partial q_x}{\partial r} \cdot dr \cdot dx \quad (3.159.)$$

3. Viskozna disipacija (generiranje toplinske energije zbog viskoznog trenja)

$$2 \cdot r \cdot \pi \cdot dr \cdot dx \cdot \frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot \tau_x = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot dr \cdot dx \cdot \eta \cdot \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \quad (3.160.)$$

4. Brzina akumulacije toplinske energije (\dot{Q}_{acc}) (3.161.)

$$v_x \cdot \rho \cdot c_p \cdot (T_s - T_f)_x \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot dr - v_x \cdot \rho \cdot c_p \cdot (T_s - T_f)_{x+dx} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi \cdot dr = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot dr \cdot v_x \cdot \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dx$$

Članovi pod 2. i 3. su zanemarivi u odnosu na članove 1. i 4. te se bilanciranjem i dijeljenjem s $(2 \cdot \pi \cdot dx \cdot dr)$ dobiva:

$$r \cdot \rho \cdot c_p \cdot v_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial(r \cdot q_r)}{\partial r} = 0 \quad (3.162.)$$

Prema I Fourierovom zakonu:

$$q_r = -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial r} \quad (3.163.)$$

pa se fluks u radijalnom smjeru može pisati na sljedeći način:

$$\frac{\partial(r \cdot q_r)}{\partial r} = -\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (3.164.)$$

Uvođenjem izraza za raspodjelu brzine:

$$v_x = \frac{1}{4\eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot (R^2 - r^2) = \frac{R^2}{4\eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (3.165.)$$

$$v_{\text{sr}} = \frac{1}{8\eta} \cdot \frac{dp}{dx} \cdot R^2 \quad (3.166.)$$

Pa se za laminarno strujanje može pisati:

$$v_x = 2 \cdot v_{sr} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (3.167.)$$

Konačno jednadžba (3.162.) prelazi u oblik:

$$-\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + 2 \cdot r \cdot \rho \cdot c_p \cdot v_{sr} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (3.168.)$$

Jednadžba (3.168.) predstavlja *Graetzovu* diferencijalnu jednadžbu koja vrijedi za prijenos topline pri laminarnom strujanju u cijevi. Ova jednadžba nema jednoznačno rješenje i rješava se uvođenjem određenih ograničenja (definirani početni i granični uvjeti).

U praksi se primjenjuju bezdimenzijske korelacijske jednadžbe koje se dobivaju na temelju dimenzijske analize:

$$Nu = f(\text{Re}, \text{Pr}, \text{geometrija})$$

Parametri jednadžbe ovise o vremenu trajanja izmjene topline što se izražava *Graetzovom značajkom*:

$$\text{Gz} = \left(\text{Re} \cdot \text{Pr} \cdot \frac{d}{l} \right)^{-1} \quad (3.169.)$$

$$\text{Gz} = \frac{a \cdot l}{v \cdot d^2} \quad (3.170.)$$

Graetzova značajka predstavlja bezdimenzijsko vrijeme, odnosno bezdimenzijski položaj tako da ukazuje na vrijeme izmjene topline i duljinu puta izmjene topline.

$$\underline{\text{Gz} < 0,05}$$

Blizina ulaza u cijev; kratko vrijeme izmjene.

$$\text{Nu} = 1,08 \cdot \left(\frac{a \cdot l}{v \cdot d^2} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.171.)$$

Općenito, na malim udaljenostima od ulaza u cijev vrijedi da je Nusseltova značajka proporcionalna sa $l^{-\frac{1}{3}}$.

$$\underline{0,05 < \text{Gz} < 5}$$

Kod malih brzina strujanja (laminarno strujanje) ili vrlo dugačkih cijevi tako da su temperature fluida i stijenke na izlazu praktički jednake.

$$\text{Nu} = 0,5 \cdot \left(\text{Re} \cdot \text{Pr} \cdot \frac{d}{l} \right) \quad (3.172.)$$

$$\underline{\text{Gz} > 5}$$

Razvijeni laminarni tok.

Izraz koji se najčešće koristi pri prijenosu topline je *Sieder-Tateova jednadžba* koja ima veliku praktičnu primjenu:

$$\text{Nu} = 1,86 \cdot \left(\text{Re} \cdot \text{Pr} \cdot \frac{d}{l} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,14} \quad (3.173.)$$

Za različite geometrijske karakteristike sustava koriste se različite vrijednosti konstanti i eksponenata. Na temelju korelacijskih jednadžbi moguće je procijeniti koeficijent toplinske vodljivosti

$$\left(\alpha = \frac{\text{Nu} \cdot \lambda}{d} \right) \text{ uz strogo poštivanje principa sličnosti.}$$

3.2.5. Prijenos topline pri turbulentnom toku u cijev

Ovi slučajevi se najčešće susreću te su često proučavani. Korelacijske jednadžbe izvode se na temelju eksperimentalnih podataka i dimenzijske analize.

Osnovna jednadžba (bezdimenzijska korelacija) koja se i danas primjenjuje, predložili su *Dittus i Boelter* za glatku cijev:

$$Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^n \quad (3.174.)$$

Vrijednost eksponenta n poprima različite vrijednosti ovisno o tome da li se radi o grijanju ili hlađenju:

$$\begin{aligned} n &= 0,4 && \text{grijanje} \\ n &= 0,3 && \text{hlađenje} \end{aligned}$$

Ukoliko se temperatura fluida i temperatura stjenke znatno razlikuju potrebno je izraz korigirati s omjerom viskoznosti u struji fluida i uz stjenku (Colburn):

$$Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{\eta}{\eta_s} \right)^{0,14} \quad (3.175.)$$

U izrazima (3.174.) i (3.175.) svojstva fluida očitavaju se iz tablica za srednju aritmetičku temperaturu a primjenljive su ako je:

- turbulentno strujanje: $5\ 000 < Re < 200\ 000$
- potpuno razvijeni tok : $\frac{l}{d} > 50$,
- vrijednosti Prandtllove značajke: $0,7 < Pr < 50$

Za ulazno područje dok strujanje još nije potpuno razvijeno, Nusselt je dao izraz:

$$Nu = 0,036 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{d}{l} \right)^{0,055} \quad (3.176.)$$

Utjecaj hidrodinamičkih uvjeta na vrijednost koeficijenta prijelaza topline (α)

Iz zakona očuvanja, toplina koja se prenosi s fluida na stjenku jednaka je toplini koja se provodi kroz toplinski granični sloj fluida:

$$\begin{aligned} q_{KONV} &= q_{KOND} \\ \alpha \cdot \Delta T &= -\frac{\lambda_f}{\delta_T} \cdot \Delta T \end{aligned} \quad (3.177.)$$

Na temelju te jednadžbe slijedi da se koeficijent prijelaza topline može definirati kao:

$$\alpha = \frac{\lambda_f}{\delta_T} \quad (3.178.)$$

Promjenom hidrodinamičkih uvjeta, koji su definirani Re-značajkom, dolazi do promjene debljine hidrodinamičkog, a istovremeno i debljine toplinskog graničnog sloja. Ranije je pokazano da debljina hidrodinamičkog graničnog sloja opada s Re-značajkom:

$$\delta_H \sim \frac{1}{Re_x^m} \quad (3.179.)$$

Budući da je $\frac{\delta_H}{\delta_T} = Pr^{\frac{1}{3}}$, na analogan način se može izraziti i debljina toplinskog graničnog sloja:

$$\delta_T \sim \frac{1}{Re_x^n} \quad (3.180.)$$

Iz toga slijedi da se povećanjem Re -značajke smanjuje debljina toplinskog graničnog sloja, te se na taj smanjuje i otpor prijenosu topline, odnosno povećava se koeficijent prijelaza topline α . Na temelju tih spoznaja može se promjenom hidrodinamičkih uvjeta strujanja utjecati na brzinu prenesene topline.

3.2.6. Prijenos topline u miješalicama

Miješanjem se pospješuju procesi prijenosa topline. Prijenos topline u miješalicama često je vezan uz prijenos tvari (ekstrakcija, kristalizacija). Miješanjem se ostvaruju povoljniji hidrodinamički uvjeti te se smanjuju temperaturni gradijenti u posudi za miješanje. Koeficijent prijenosa tvari također se procjenjuje primjenom dimenzijske veličine.

Na ovom će se primjeru pokazati drugačiji način primjene dimenzijske analize za pronalaženje korelacijskih izraza koji se koriste za procjenu koeficijenta prijelaza topline.

Koristi se također Buckinghamov Pi - teorem

Svaka fizikalna ovisnost između n fizikalnih veličina može se reducirati na $m = n - r$ ovisnosti međusobno nezavisnih bezdimenzijskih grupa (pri čemu je r – red matrice).

Više od dva bezdimenzijska broja potrebna su za opis problema koji se svodi na rješavanje sustava linearnih jednadžbi transformacijom matrice.

Potrebno je popisati sve fizikalne veličine i parametare koji su neophodni za opis problema pri čemu je veličina koja nas zanima, zavisna veličina a svi parametri koji utječu na nju su međusobno nezavisni.

- Zavisna veličina: koeficijent prijenosa topline, α
- Geometrijske karakteristike: D, d
- Svojstva materijala: $\rho, \eta, \gamma_0, c_p, \lambda$
- Procesna svojstva: $n, \Delta T$

Sada je potrebno odrediti funkcionalnu ovisnost koeficijenta prijelaza topline o navedenim veličinama. (3.181.)

$$\{\alpha; D, d; \rho, \eta, \gamma_0, c_p, \lambda; n, \Delta T\}$$

Koristeći dimenzije navedenih veličina formira se dimenzijska matrica (reda matrice $r=4$ – broj osnovnih dimenzija).

Tablica __ Osnovne i izvedene fizikalne veličine potrebne za opis problema

Veličina	dimenzija	SI jedinica
Duljina	L	m metar
Masa	M	kg kilogram
Vrijeme	T	s sekunda
Temperatura	Θ	K kelvin
energija	ML^2T^{-2}	$kg\ m^2\ s^{-2}$ J
snaga	ML^2T^{-3}	$kg\ m^2\ s^{-3}$ W

Tako su:

$$[\alpha] = \left[\frac{W}{m^2 \cdot K} \right] = \left[\frac{\frac{J}{s}}{m^2 \cdot K} \right] = \left[\frac{\frac{kg \cdot m^2}{s \cdot s^2}}{m^2 \cdot K} \right] = \left[\frac{kg}{s^3 \cdot K} \right] = [M^1 T^{-3} \Theta^{-1}]$$

$$[D] = [m] = [L^1]$$

$$[d] = [m] = [L^1]$$

$$[\rho] = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right] = [M^1 L^{-3}]$$

$$[\eta] = [\text{Pa} \cdot \text{s}] = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}^2} \cdot \text{s} \right] = [M^1 L^{-1} T^{-1}]$$

$$[c_p] = \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] = \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{kg} \cdot \text{K}} \right] = \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{K}} \right] = [L^2 T^{-2} \Theta^{-1}]$$

$$[\lambda] = \left[\frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right] = \left[\frac{\frac{\text{J}}{\text{s}}}{\text{m} \cdot \text{K}} \right] \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s} \cdot \text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{m} \cdot \text{K}} \right] = \left[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^3 \cdot \text{K}} \right] = [M^1 L^1 T^{-3} \Theta^{-1}]$$

$$[n] = [s^{-1}] = [T^{-1}]$$

$$[T] = [K] = [\Theta^1]$$

Od navedenih se veličina složi dimenzijska matrica koja je podijeljena u dva dijela: osnovna kvadratna matrica (u ovom slučaju 4x4) i rezidualnu matricu. Rezidualna matrica treba sadržavati veličine koje će se pojaviti u samo jednom bezdimenzijskom broju, odnosno zavisnu veličinu, najznačajnija fizikalna svojstva sustava i procesne parametre. Obzirom da se osnovna matrica linearnim transformacijama mora prevesti u jediničnu matricu njeni se članovi slažu tako da se to može učiniti uz minimalan broj transformacija.

	ρ	d	n	ΔT	α	c_p	λ	η	D	γ_0
M	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
L	-3	1	0	0	0	2	1	-1	1	0
T	0	0	-1	0	-3	-2	-3	-1	0	0
Θ	0	0	0	1	-1	-1	-1	0	0	-1

Ako se pogleda dobivena matrica može se uočiti da je potrebna samo jedna linearna transformacija (drugog retka) te množenje trećeg retka sa (-1).

	ρ	d	n	ΔT	α	c_p	λ	η	D	γ_0
M	1	0	0	0	1	0	1	1	0	0
3M+L	0	1	0	0	3	2	4	2	1	0
-T	0	0	1	0	3	2	3	1	0	0
Θ	0	0	0	1	-1	-1	-1	0	0	-1

Da bi se formirale bezdimenzijske grupe slažu se razlomci kod kojih je u brojniku veličina iz rezidualne matrice, a nazivnik se sastoji od umnoška veličina osnovne matrice podignute na potenciju

koja odgovara brojevima u koloni ispod veličine u rezidualnoj matrici. Tako se u ovom slučaju može formirati šest bezdimenzijskih grupa ($m = n - r = 10 - 4 = 6$).

$$\Pi_1 = \frac{\alpha}{\rho^1 \cdot d^3 \cdot n^3 \cdot \Delta T^{-1}} = \frac{\alpha \cdot \Delta T}{\rho \cdot d^3 \cdot n^3} \quad (3.182.)$$

$$\Pi_2 = \frac{c_p}{\rho^0 \cdot d^2 \cdot n^2 \cdot \Delta T^{-1}} = \frac{c_p \cdot \Delta T}{d^2 \cdot n^2} \quad (3.183.)$$

$$\Pi_3 = \frac{\lambda}{\rho^1 \cdot d^4 \cdot n^3 \cdot \Delta T^{-1}} = \frac{\lambda \cdot \Delta T}{\rho \cdot d^4 \cdot n^3} \quad (3.184.)$$

$$\Pi_4 = \frac{\eta}{\rho^1 \cdot d^2 \cdot n^1 \cdot \Delta T^0} = \frac{\eta}{\rho \cdot d^2 \cdot n} = \frac{1}{\text{Re}} \quad (3.185.)$$

$$\Pi_5 = \frac{D}{\rho^0 \cdot d^1 \cdot n^0 \cdot \Delta T^0} = \frac{D}{d} \quad (3.186.)$$

$$\Pi_6 = \frac{\gamma_0}{\rho^0 \cdot d^0 \cdot n^0 \cdot \Delta T^{-1}} = \gamma_0 \cdot \Delta T \quad (3.187.)$$

Može se vidjeti da je samo jedna bezdimenzijska grupa poznata, $\Pi_4 = \text{Re}^{-1}$

Kombinacijom preostalih grupa dolazi se do:

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_3} = \frac{\frac{\alpha \cdot \Delta T}{\rho \cdot d^3 \cdot n^3}}{\frac{\lambda \cdot \Delta T}{\rho \cdot d^4 \cdot n^3}} = \frac{\alpha}{d \cdot \lambda} \equiv \text{Nu} \quad (3.188.)$$

$$\frac{\Pi_2}{\Pi_3 \cdot \Pi_4} = \frac{c_p \cdot \eta}{\lambda} \equiv \text{Pr} \quad (3.189.)$$

$\Pi_3 = \text{????}$

Dimenzijskom analizom dobiva se skup od 6 bezdimenzijskih veličina:

$$\{\text{Nu}, \text{Pr}, \Pi_3, \text{Re}, \gamma_0 \cdot \Delta T, D/d\} \quad (3.190.)$$

Obzirom da je jedan bezdimenzijski broj nepoznat uvodi se nova veličina u dimenzijski sustav, odnosno Jouleov ekvivalent topline:

$$[J] = [M^1 L^2 T^{-2} \Theta^{-1} H^1]$$

Pa su koeficijent toplinske vodljivosti:

$$[\lambda] = [M^1 L^1 T^{-3} \Theta^{-1}] \cdot \underbrace{[M^{-1} L^{-2} T^2]}_H = [L^{-1} T^{-1} \Theta^{-1} H^1]$$

Koeficijent prijelaza topline:

$$[\alpha] = [M^1 T^{-3} \Theta^{-1}] \cdot \underbrace{[M^{-1} L^{-2} T^2]}_H = [L^{-2} T^{-1} \Theta^{-1} H^1]$$

Specifični toplinski kapacitet:

$$[c_p] = [L^2 T^{-2} \Theta^{-1}] \cdot \underbrace{[M^{-1} L^{-2} T^2]}_H = [M^{-1} \Theta^{-1} H^1]$$

Dobiva se sljedeća matrica:

	ρ	d	n	ΔT	λ	α	c_p	J	η	D	γ_0
M	1	0	0	0	0	0	-1	1	1	0	0
L	-3	1	0	0	-1	-2	0	2	-1	1	0
T	0	0	-1	0	-1	-1	0	-2	-1	0	0
Θ	0	0	0	1	-1	-1	-1	0	0	0	-1
H	0	0	0	0	1	1	1	-1	0	0	0

U jednom se koraku dobiva sljedeća jedinična matrica:

	ρ	d	n	ΔT	λ	α	c_p	J	η	D	γ_0
M	1	0	0	0	0	0	-1	1	1	0	0
3M+L+H	0	1	0	0	0	-1	-2	4	2	1	0
-T-H	0	0	1	0	0	0	-1	3	1	0	0
⊕+H	0	0	0	1	0	0	0	-1	0	0	-1
H	0	0	0	0	1	1	1	-1	0	0	0

Kako je $m = n - r = 11 - 5 = 6$, može se formirati 6 bezdimenzijskih grupa u kojima se mogu prepoznati Nusseltova i reynoldsova značajka te dva simpleksa.

$$\Pi_1 = \frac{\alpha \cdot d}{\lambda} \equiv \text{Nu} \quad (3.191.)$$

$$\Pi_2 = \frac{c_p \cdot \rho \cdot d^2 \cdot n}{\lambda} \quad (3.192.)$$

$$\Pi_3 = \frac{J \cdot \Delta T \cdot \lambda}{\rho \cdot d^4 \cdot n^3} \quad (3.193.)$$

$$\Pi_4 = \frac{\eta}{\rho \cdot d^2 \cdot n} = \frac{1}{\text{Re}} \quad (3.194.)$$

$$\Pi_5 = \frac{D}{d} \quad (3.195.)$$

$$\Pi_6 = \gamma_0 \cdot \Delta T \quad (3.196.)$$

Kombinacijom bezdimenzijskih grupa može se dobiti:

$$\Pi_2 \cdot \Pi_4 \equiv \text{Pr} \quad (3.197.)$$

$$\frac{\Pi_4}{\Pi_3} = \frac{\eta \cdot d^2 \cdot n^2}{J \cdot \Delta T \cdot \lambda} \equiv \text{Br} \quad (3.198.)$$

Pri čemu je Br – Brinkmanova značajka

Dimenzijskom analizom dobiva se skup od 6 bezdimenzijskih veličina:

$$\{\text{Nu}, \text{Pr}, \text{Re}, \text{Br}, \gamma_0 \cdot \Delta T, D/d\} \quad (3.199.)$$

Obzirom da su brzine vrtnje miješala uglavnom takve da je strujanje turbulentno, temperaturni koeficijent viskoznosti može se zanemariti. Osim toga, Brinkmanova značajka je mjera viskoznog zagrijavanja u odnosu na prijenos topline kondukcijom i značajne vrijednosti poprima samo u slučaju kada se na malim udaljenostima razvijaju veliki profile brzina. Dakle i Brinkmanova značajka može se zanemariti. Tako da preostaje sljedeća korelacija za procjenu koeficijenta prijelaza topline:

$$\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pr}, \text{geometrija}) \quad (3.200.)$$

Prijenos topline u miješalici ovisan je, kao i kod strujanja kroz cijev, o karakteru strujanja koje izaziva miješalo. Kod malih vrijednosti Reynoldsa, količina gibanja koja se iz vrtložne mase fluida prenosi na granični sloj je mala pa je i količina prenesene topline mala. a koeficijent prijelaza može se približno računati na temelju penetracije količine gibanja koja se odvija u hidrauličkom graničnom sloju ($x_p = \delta_H$):

$$\alpha = \frac{\lambda}{\delta_T} = \frac{\lambda}{\delta_H} \cdot \frac{\delta_H}{\delta_T} = \frac{\lambda}{\delta_H} \cdot \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \cong \frac{\lambda}{x_p} \cdot \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \quad (3.201.)$$

Uzme li se u obzir jednačina kojom se definira penetracija topline, jednačina (3.201.) prelazi u sljedeći oblik:

$$\alpha = \frac{\lambda}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot a \cdot t}} \cdot \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \quad (3.202.)$$

Vrijeme penetracije može se definirati kao omjer uzdužne udaljenosti zida od mjesta dodira s kapljevinom, x i srednje brzine uz stijenu ($v_s = n \cdot d$) pa se izraz za koeficijent prijelaza topline piše na sljedeći način:

$$\alpha = \frac{\lambda}{2 \cdot \sqrt{\pi \cdot a \cdot \frac{x}{v_s}}} \cdot \text{Pr}^{\frac{1}{3}} \quad (3.203.)$$

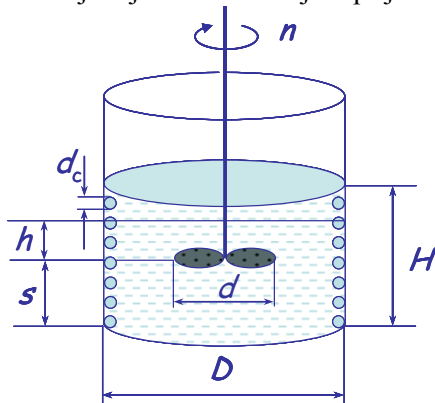
Budući da nazivnik predstavlja debljinu hidrauličkog graničnog sloja, a ujedno i x_p na čiju debljinu utječe Re -značajka slijedi da je:

$$\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pr})$$

U općem slučaju vrijedi:

$$\text{Nu} = f(\text{Re}, \text{Pr}, \text{geometrija})$$

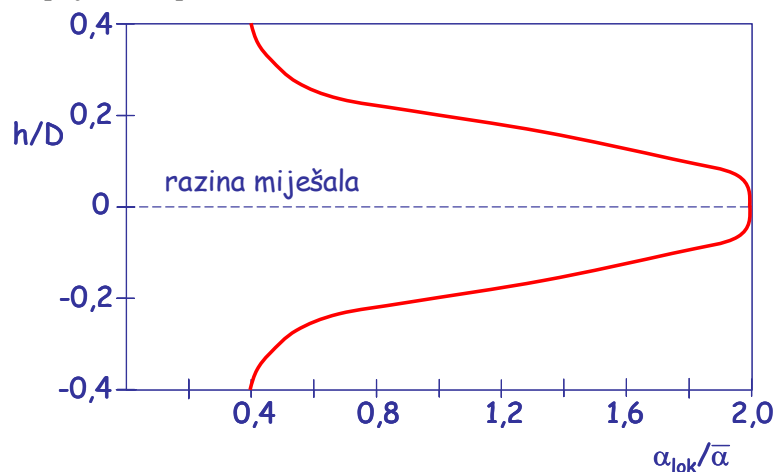
Za velike vrijednosti Reynoldsove značajke debljina graničnog sloja je praktički konstantna, a ona je osnovna veličina koja utječe na koeficijent prijelaza topline.



h - vertikalna udaljenost lokalnog koeficijenta α od miješala
 d_c - promjer spiralne cijevi (zagrijavanje ili hlađenje)

Slika 3.33. Miješalica u kojoj dolazi do izmjene topline

Na slici 3.33. prikazana je shematski miješalica definiranih geometrijskih karakteristika. Budući da po volumenu miješalice postoji i različita slika strujnog toka unutar mase fluida, različite su i vrijednosti lokalnog koeficijenta prijelaza topline.



Slika 3.34. Lokalni koeficijent prijelaza topline

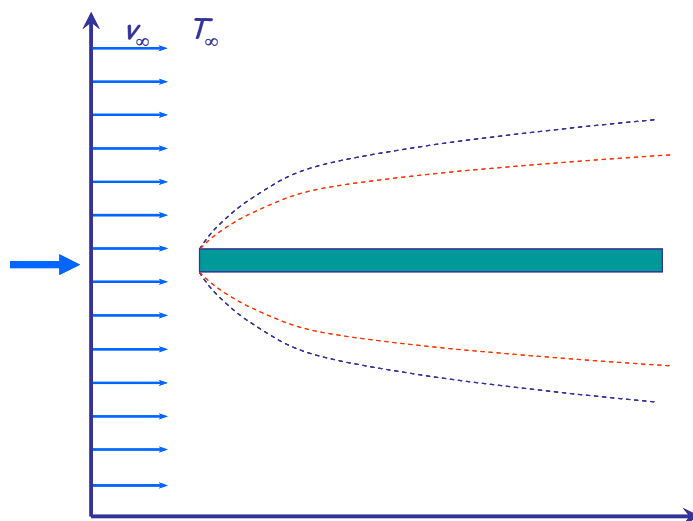
Srednja vrijednost koeficijenta prijelaza topline može se odrediti iz funkcionalne ovisnosti Nusseltove značajke. Izrazi su različiti ovisno o geometrijskim karakteristikama miješalice. Srednji koeficijent prijelaza topline mijenja se s vertikalnom udaljenošću od miješala. Najveći lokalni koeficijent prijelaza topline postignut je u razini miješala (slika 3.34.).

Jedan od praktički primjenjivih izraza za određivanje α_{sr} :

$$Nu = \frac{\alpha_{sr} \cdot d}{\lambda} = 0,75 \cdot Re^{\frac{2}{3}} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{\eta_f}{\eta_s} \right)^{0,14} \quad (3.204.)$$

3.2.7. Prijelaz topline pri optjecanju

Pri strujanju fluida oko čvrstog tijela (ili obrnuto), pri čemu su temperature tijela i fluida različite, dolazi do formiranja hidrodinamičkog graničnog sloja unutar kojeg egzistira i toplinski granični sloj. Debljina hidrodinamičkog graničnog sloja se mijenja, pa će se mijenjati i debljina toplinskog graničnog sloja. Debljina toplinskog graničnog sloja povećava se u smjeru gibanja pa se zbog toga i koeficijent prijelaza topline smanjuje tako dugo dok se debljina toplinskog graničnog sloja ne ustali. Pri tome su najveći otpori na mjestu gdje fluid nastruji na tijelo.



Slika 3.35. Hidrodinamički i toplinski granični sloj kod optjecanja

Na temelju već poznatog izraza za debljinu hidrodinamičkog graničnog sloja pri optjecanju oko ravne ploče $\delta_H = \frac{k \cdot x}{\sqrt{Re_x}}$ i poznate relacije $\frac{\delta_H}{\delta_T} = Pr^{\frac{1}{3}}$, slijedi:

$$Nu = \frac{\alpha \cdot x}{\lambda} = \frac{x}{\delta_T} \cdot \frac{\delta_H}{\delta_H} = \frac{x}{\delta_H} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \quad (3.205.)$$

$$Nu = \frac{1}{k} \cdot Re^{0,5} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \quad (3.206.)$$

Jednadžba (3.206.) vrijedi za optjecanje oko ravne ploče, za laminarni granični sloj ($Re_x < 2 \cdot 10^5$). Kod većih vrijednosti Re -značajki i različitih geometrijskih oblika čvrstog tijela, koriste se bezdimenzijske korelacijske jednadžbe u kojima su konstante i eksponenti eksperimentalno određeni. Tako npr. za razvijeno turbulentno strujanje zraka oko kugle ($20 < Re < 1,5 \cdot 10^5$) vrijedi empirijska korelacija:

$$Nu = 0,31 \cdot Re^{0,6} \quad (Pr_{zrak} \approx 1) \quad (3.207.)$$

Za ostale plinove:

$$Nu = 0,37 \cdot Re^{0,6} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \quad (3.208.)$$

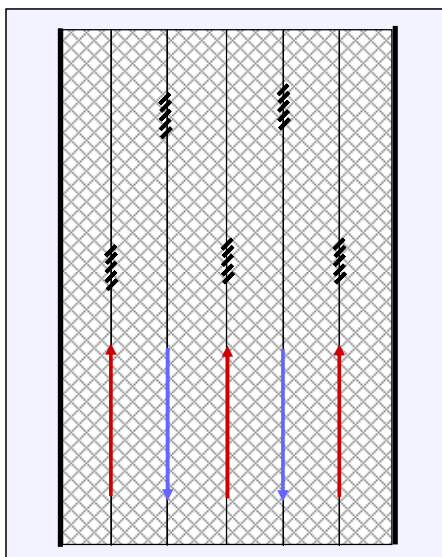
Kod kapljevine za područje $1 < Re < 7 \cdot 10^4$ za kuglu vrijedi empirijska korelacija:

$$Nu = 2,0 + 0,60 \cdot Re^{0,5} \cdot Pr^{\frac{1}{3}} \quad (3.209.)$$

Za ostale geometrijske oblike primjenjuju se analogne korelacijske jednadžbe, a vrijednosti konstanti i eksponenta su također eksperimentalno određene.

3.2.8. Prijelaz topline pri strujanju kroz poroznu sredinu

Već je spomenuto da se u većini procesa koji se susreću u praksi istovremeno odvijaju procesi prijenosa količine gibanja, topline i tvari. Do prijenosa topline pri strujanju kroz poroznu sredinu dolazi na primjer tijekom destilacije u kolonama ispunjenim nasipnim ili strukturiranim punilima. Za proračun takvih procesa također je značajno poznavanje koeficijenta prijelaza topline. U prethodnom su poglavlju dane neke korelacijske jednadžbe koje vrijede za tijelo koje se nalazi u struji zraka različite temperature. Za prijenos topline pri strujanju kroz poroznu sredinu mnogo teže se dolazi do korelacijskih jednadžbi za procjenu koeficijenta prijelaza topline obzirom da se pokretačka sila ne može direktno izmjeriti.



Slika 3.36. Strujanje fluida (pare i kapljevine) u koloni ispunjenoj punilima

Zadovoljavajući se rezultati dobivaju uz korištenje sljedećeg izraza:

$$\varepsilon \cdot St \cdot Pr^{2/3} = 2,06 \cdot Re^{-0,575} \quad (3.210.)$$

Još je teže izvesti korelacijske jednadžbe ukoliko proces uključuje i prijenos topline između stjenke kolone i fluida koji struji kroz poroznu sredinu, kao što je to upravo slučaj kod destilacijskih kolona. Jedinstvena korelacija ne postoji zbog raznovrsnosti geometrije punila. Na temelju eksperimentalnih podataka došlo se do sljedeće korelacije:

$$Nu \propto Re^{0,7-0,9} \quad (3.211.)$$

Osim kod destilacije, do prijenosa topline kroz poroznu sredinu dolazi i kod sušenja porznih tvari. Procjena koeficijenta prijelaza topline također je vrlo složena, jer osim prijenosa količine gibanja i tvari, uključuje i prijenos topline kondukcijom i konvekcijom. Opća jednadžba također ne postoji, zbog raznovrsnosti materijala koji se suši. Na vrijednost koeficijenta prijelaza topline dakle utječu uvjeti strujanja i prijenosa topline te geometrija sustava. Literatura nudi velik broj korelacija, od kojih se najčešće koristi:

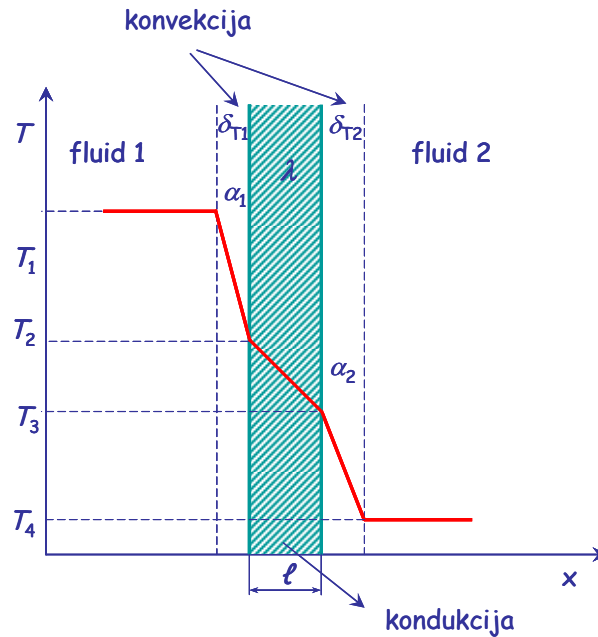
$$Nu \cdot \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} = (0,5 \cdot (Re \cdot (1 - \varepsilon))^{1/2} + 0,2 \cdot (Re \cdot (1 - \varepsilon))^{2/3}) \cdot Pr^{1/3} \quad (3.212.)$$

Izraz vrijedi za: $2 \cdot 10^3 < Re < 8 \cdot 10^3$

3.2.9. Prolaz topline

Ukoliko se topline prenosi s jednog fluida na drugi koji su međusobno odijeljeni čvrstom stijenkom, govorimo o *prolazu topline*. Dakle problem uključuje kombinaciju kondukcijskog i konveksijskog prijenosa topline.

Za ilustraciju promotrimo razmjenu topline između toplog i hladnog fluida koji struje s različitih strana uz ravnu stijenku. Pri strujanju fluida formira se hidrodinamički granični sloj unutar kojeg je i toplinski granični sloj (δ_T) koji predstavlja otpor pri prijelazu topline s fluida a stijenku (ili obrnuto).



Slika 3.37. Izmjena topline između dva fluida odvojena čvrstom stijenkom

Neka je temperatura toplijeg fluida T_1 , a hladnijeg T_4 .

Općenito vrijedi da je gustoća toka jednaka omjeru pokretačke sile i odgovarajućih otpora, pa je za prijenos topline:

$$q = \frac{\Delta T}{R_{\text{toplinski}}} \quad (3.213.)$$

Za sustav u kojem postoji više toplinskih otpora u seriji u stacionarnim uvjetima vrijedi:

$$q_{\text{uk}} = \frac{\Delta T_{\text{uk}}}{\sum_{i=1}^n R} \quad (3.214.)$$

Mehanizmi prijenosa topline:

- sa fluida na stjenku → KONVEKCIJA
- kroz stjenku → KONDUKCIJA
- sa stjenke na fluid → KONVEKCIJA

Prijelaz topline s fluida 1 na stjenku:

$$q = \alpha_1 \cdot (T_1 - T_2) \quad (3.215.)$$

Kondukcija kroz stjenku:

$$q = \frac{\lambda}{l} \cdot (T_2 - T_3) \quad (3.216.)$$

Prijelaz topline sa stjenke na fluid 2:

$$q = \alpha_2 \cdot (T_3 - T_4) \quad (3.217.)$$

Uz uvjet da je proces stacionaran, dakle da je $q = \text{konst.}$, zbrajanjem gornjih jednadžbi dobiva se:

$$q \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) = T_1 - T_4 \quad (3.218.)$$

$$q = \frac{T_1 - T_4}{\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) \sum_{i=1}^n R} = \frac{\Delta T_{\text{uk}}}{\sum_{i=1}^n R} \quad (3.219.)$$

Izraz u nazivniku predstavlja sumu toplinskih otpora, a recipročna vrijednost sume svih toplinskih otpora predstavlja koeficijent prolaza topline:

$$K = \frac{1}{\left(\frac{1}{\alpha_1} + \frac{l}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \right) \sum_{i=1}^n R} = \frac{1}{\sum_j R_{\text{konv.j}} + \sum_k R_{\text{kond.k}} + \sum_l R_{\text{fl}}} \quad (3.220.)$$

Vrijednost koeficijenta prolaza topline često se definira najvećim otporom u seriji.

Mjerodavna površina izmjene topline i razlika temperatura

Za procjenu prenesene topline nužno je poznavati površinu izmjene topline te se primjenjuje kinetička jednadžba:

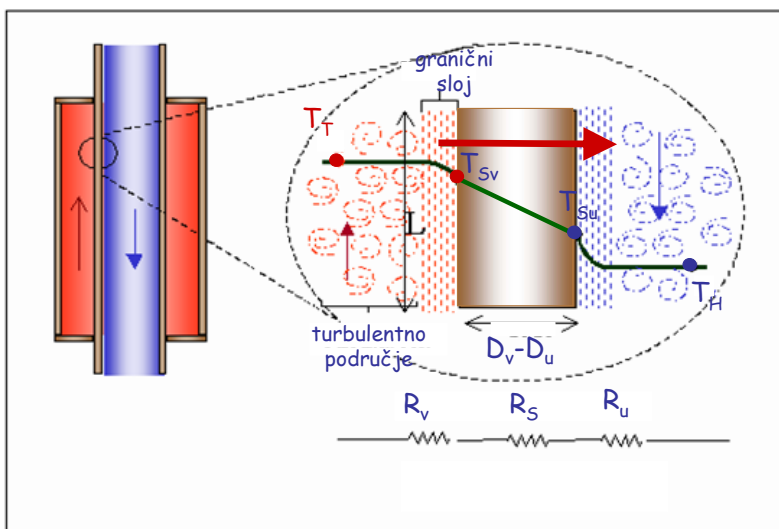
$$\dot{Q} = K \cdot A \cdot \Delta \bar{T} \quad (3.221.)$$

Ovdje su:

- K – koeficijent prolaza topline, $\text{Wm}^{-2}\text{K}^{-1}$
- A – površina izmjene topline, m^2
- $\Delta \bar{T}$ - srednja pokretačka sila procesa, K

Ukoliko se radi o ravnoj stjenki tada su površine s obje strane jednake. Međutim, kod zakrivljenih stjenki se mora definirati mjerodavna površina, a to je površina na strani onog fluida koji pruža veći otpor prijenosu topline, odnosno čiji je koeficijent prijelaza topline manji. Ukoliko su koeficijenti prijelaza topline istog reda veličine, uzima se srednja vrijednost površina.

- vanjska površina cijevi: $A_v = 2 \cdot \pi \cdot D_v \cdot L$
- unutarnja površina cijevi: $A_u = 2 \cdot \pi \cdot D_u \cdot L$
- srednja površina: $A_{\text{lm}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot (r_v - r_u) \cdot L}{\ln\left(\frac{r_v}{r_u}\right)}$



Slika 3.38. Otpori prijenosu topline

Tako se koeficijent prolaza topline izražava:
obzirom na vanjsku površinu cijevi

$$K = \frac{1}{\left(\frac{D_v}{D_u}\right) \cdot \left(\frac{1}{\alpha_u}\right) + \frac{D_v}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{D_v}{D_u}\right) + \frac{1}{\alpha_v}} \quad (3.222.)$$

obzirom na unutarnju površinu cijevi

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_u} + \frac{D_u}{\lambda} \cdot \ln\left(\frac{D_v}{D_u}\right) + \left(\frac{D_u}{D_v}\right) \cdot \left(\frac{1}{\alpha_v}\right)} \quad (3.223.)$$

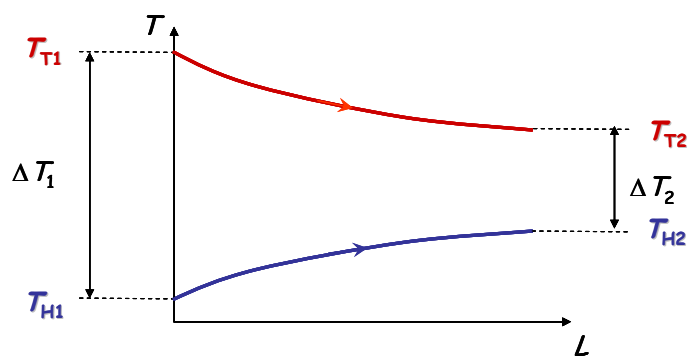
Površina izložena konvekcijskom prijenosu topline nije ista za oba fluida (kod cijevnih izmjenjivača topline), ali je količina izmjenjene topline jednaka:

$$Q = K_v \cdot A_v \cdot \Delta T_{LM} = K_u \cdot A_u \cdot \Delta T_{LM} \quad (3.224.)$$

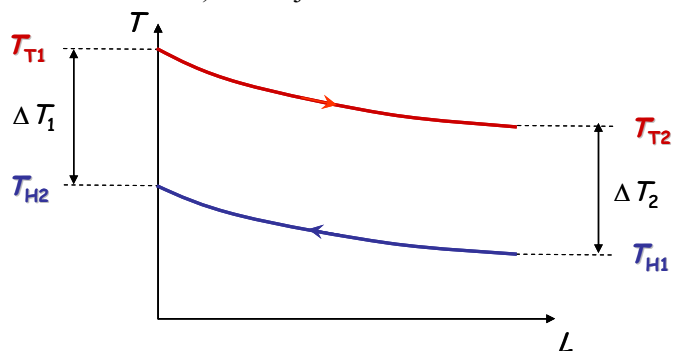
Literatura nudi velik broj podataka za različite geometrije izmjenjivača topline, uvjete strujanja i materijale od kojih su načinjeni.

Budući da se temperaturna razlika između toplog i hladnog fluida mijenja od ulaza do izlaza (vidi sliku 3.39.), potrebno je definirati mjerodavnu razliku temperatura koja se koristi pri proračunu. Osim toga kod realnog izmjenjivača topline $K=f(L)$ jer se koeficijenti prijelaza topline mijenjaju po duljini izmjenjivača. Pokretačka sila određuje se uz sljedeće pretpostavke:

- da je osigurano dobro miješanje
- stacionaran rad
- $c_p = \text{const.}$
- $K = \text{const.}$
- zanemarivi gubici
- nema kondukcije u aksijalnom smjeru



a) istosmjerni tok fluida



b) protustrujni tok fluida

Slika 3.39. Dijagram promjene temperatura toplog i hladnog fluida s duljinom izmjene topline

Ako je $\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} < 2$ koristi se aritmetička srednja vrijednost temperatura: $\Delta \bar{T}_a = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2}$

Ako je $\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2} > 2$ koristi se logaritamska srednja vrijednost temperatura: $\Delta \bar{T}_{LM} = \frac{\Delta T_1 - \Delta T_2}{\ln\left(\frac{\Delta T_1}{\Delta T_2}\right)}$

3.3. Prijenos topline zračenjem

Prijenos topline konvekcijom i kondukcijom praćen je, u manjoj ili većoj mjeri, pojavom toplinskog zračenja. Toplinsko zračenje je direktna posljedica kretanja atoma i molekula sastavljenih od nabijenih čestica pri čemu gibanje rezultira elektromagnetskim zračenjem koje odvodi energiju od površine. Energija se prenosi elektromagnetskim valovima različitih valnih duljina, a poseban značaj imaju oni valovi koji se nakon apsorpcije drugog tijela (koje prima energiju) ponovno pretvaraju u toplinsku energiju. Prijenos energije zračenjem u odnosu na kondukciju i konvekciju ima nekoliko jedinstvenih karakteristika:

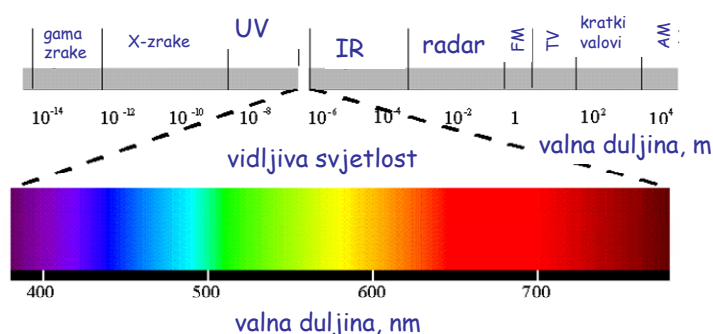
- nije potreban medij → medij usporava zračenje
- količina i kvaliteta zračenja ovise o temperaturi
- kod kondukcije i konvekcije količina prenesene topline ovisi o razlici temperatura
- kod zračenja ovisi i o temperaturi i o razlici temperatura
- zračenje posjeduje svojstva slična česticama i svojstva valova
- ne postoje analogije prijenosu tvari i količine gibanja

Boja užarenih tijela mijenja se s temperaturom → promjena optičkih svojstava zračenja s temperaturom važna kod određivanja količine izmjenjene topline između dva tijela. Elektromagnetsko zračenje koje emitira tijelo zbog svoje temperature naziva se toplinsko zračenje ($0,1 < \lambda < 100 \text{ mm}$) i prenosi se brzinom svjetlosti, $c=3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

$$c = \lambda \cdot \nu$$

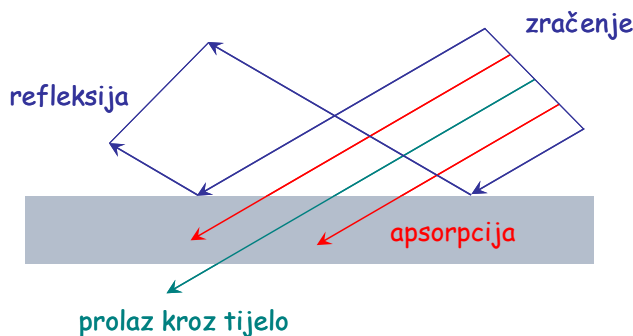
λ – valna duljina, mm, cm, Å ($1 \text{ Å} = 10^{-8} \text{ cm}$)

ν – frekvencija



Slika 3.40. Valne duljine zračenja

Tijelo može toplinsko zračenje apsorbirati, reflektirati ili propustiti. Apsorbirani dio je odgovoran za promjenu temperature.



Slika 3.41.

Energetska bilanca temelji se na pojavama prirodnog toplinskog zračenja te se ti osnovni zakoni mogu ovdje primjeniti:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_A + \dot{Q}_R + \dot{Q}_P$$

\dot{Q} - energija zračenja

\dot{Q}_A - apsorbirana energija

\dot{Q}_R - reflektirana energija

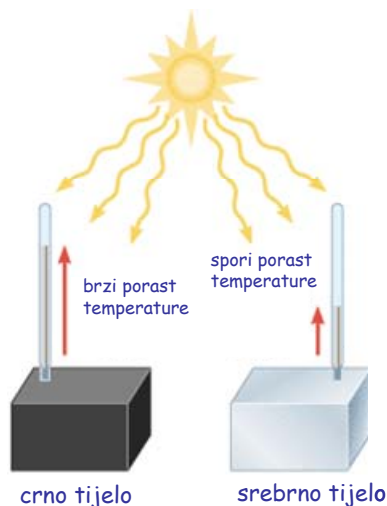
\dot{Q}_P - energija koja prolazi kroz tijelo

Dijeljenjem s \dot{Q} jednažba (___) izražava se u bezdimenzijskom obliku:

$$A + R + P = 1$$

Slijede tri krajnja slučaja:

- $A = 1$ ($R = P = 0$) - ukupna energija koja je pristigla do tijela je i apsorbirana. To je slučaj kod **apsolutno crnog tijela**.
- $R = 1$ ($A = P = 0$) - energija se u potpunosti reflektira što je slučaj kod **apsolutno bijelog tijela**. Refleksija pri tome može biti pravilna (zrcalno tijelo) ili difuzna (bijelo tijelo).
- $P = 1$ ($A = R = 0$) - sva energija prolazi kroz tijelo što će biti slučaj kod **diatermičkog (prozračnog) tijela**.



Slika 3.42.

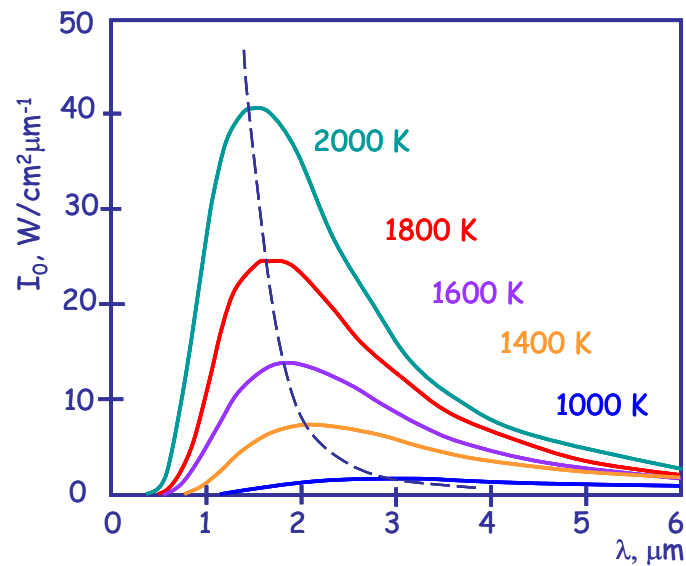
U prirodi takovi ekstremi ne postoje, već su tijela manje ili više *siva*, a odnosi između apsorbirane, reflektirane energije i energije koja prolazi kroz tijelo ovise o prirodi tijela, njegovoj temperaturi, valnoj duljini zračenja te o karakteristikama površine tijela (hrapava ili glatka). Zračenje crnog tijela može se simulirati malim otvorom u izotermnom tijelu.

Čvrsta tijela apsorbiraju i reflektiraju energiju zračenja svih valnih duljina, znači u kontinuiranom dijelu spektra, dok *plinovi* apsorbiraju ili reflektiraju toplinsku energiju u strogo definiranim dijelovima spektra, ali su većim dijelom prozračni. Obojena tijela prispjelo zračenje apsorbiraju različito po valnim duljinama. Površine bijele boje dobro reflektiraju energiju vidljivog dijela spektra (hladnjaci, cisterne i spremnici za lako hlapljive kapljevine). Prozorsko staklo prozračno je za svjetlosno zračenje, a nepropusno za UV i IR. Energiju koja se emitira u infracrvenom (IR) dijelu spektra, bijela tijela međutim apsorbiraju gotovo isto kao i crna. Općenito, tijela glatke i polirane površine dobro reflektiraju toplinsku energiju. Dakle, kod čvrstih tijela i kapljevina $P = 0$, dok su plinovi diatermička tijela ($P = 1$).

Zračenje crnog tijela

Intenzitet zračenja apsolutno crnog tijela ovisan je o temperaturi i valnoj duljini (*Planckov zakon*). Kod neke temperature, crno tijelo zrači najveću moguću energiju. Porastom temperature

povećava se i intenzitet zračenja, a maksimum krivulje pomiče se prema kraćim valnim duljinama (slika 3.43.).



Slika 3.43. Grafički prikaz Planckovog zakona

Planckov zakon

Planck je predložio izraz za izračunavanje intenziteta zračenja apsolutno crnog tijela.

$$I_0 = \frac{c_1 \cdot \lambda^{-5}}{e^{c_2/\lambda T} - 1}$$

λ - valna duljina, m

T - temperatura, K

c_1 - konstanta ($3,17 \cdot 10^{16} \text{ W m}^{-2}$)

c_2 - konstanta ($1,4388 \cdot 10^{-2} \text{ m K}$)

Intenzitet zračenja se može izraziti jednadžbom $I = \frac{dq}{d\lambda}$

te integriranjem jednadžbe (___) dobiva se:

$$q_0 = \int_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{c_1}{\lambda^5 \cdot (e^{c_2/\lambda T} - 1)} \cdot d\lambda = \frac{6,494 \cdot c_1}{c_2^4} \cdot T^4$$

Wienov zakon pomaka maksimuma intenziteta zračenja kaže da se povećanjem temperature, maksimalna količina energije pomiče u područje nižih temperatura (slika 5.18).

$$\lambda_{\max} = \frac{2,898 \cdot 10^{-3}}{T}$$

(Stefan-Boltzmanov zakon)

$$q_0 = \sigma_0 \cdot T^4$$

σ_0 - Boltzmanova konstanta ($5,77 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$)

Dakle, sposobnost zračenja apsolutno crnog tijela proporcionalna je četvrtoj potenciji apsolutne temperature i vrijedi za zračenje u svim smjerovima.

Zbog pogodnosti ovaj se zakon piše u obliku:

$$q_0 = c_0 \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4$$

gdje je c_0 koeficijent zračenja apsolutno crnog tijela ($5,77 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$).

Pokazalo se da se navedeni zakon može primjeniti i na siva tijela pri čemu je omjer intenziteta zračenja sivog i apsolutno crnog tijela konstantan kod svih valnih duljina, a predstavlja relativnu sposobnost zračenja i naziva se *stupanj crnoće*.

$$\frac{I}{I_0} = \frac{q}{q_0} = \varepsilon = \text{konst.}$$

Koeficijent zračenja može se izvesti iz stupnja crnoće:

$$\varepsilon = \frac{q}{q_0} = \frac{c \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4}{c_0 \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4} = \frac{c}{c_0}$$

odnosno:

$$c = \varepsilon \cdot c_0$$

Stupanj crnoće kreće se u rasponu od 0 do 1 ovisno o karakteru promatranog tijela.

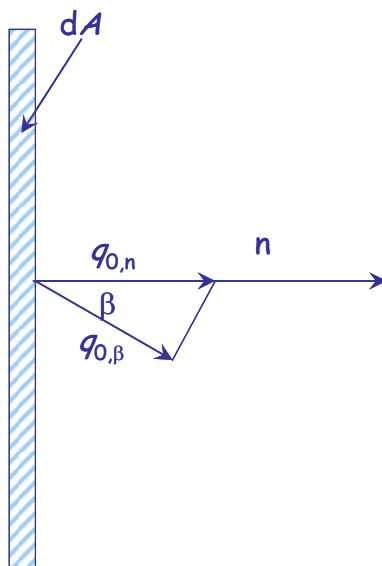
Fluks toplinske energije zračenja sivog tijela izražava se na sljedeći način:

$$q_0 = c \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4 = c_0 \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{T}{100}\right)^4$$

Lambertov kosinusni zakon

Definira energiju zračenja u nekom smjeru (slika 3.44.)

$$q_{0,\beta} = q_{0,n} \cdot \cos(\beta)$$



Slika 3.44. Kut zračenja

Zračenje je najjače u smjeru normale na površinu. Energija zračenja u pravcu različitom od normalnog na površinu smanjuje se s kosinusom kuta.

$$0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

Za $\beta = 0$

$$q_{0,\beta} = q_{0,n}$$

Za $\beta = \frac{\pi}{2}$

$$q_{0,\beta} = 0$$

Kirchhoffov zakon

Ovaj zakon povezuje emitiranu i apsorbiranu energiju. Omjer emitirane i apsorbirane energije je konstantan za sva tijela i jednak je sposobnosti zračenja apsolutno crnog tijela.

$$\frac{q_1}{A_1} = \frac{q_2}{A_2} = \dots = \frac{q_0}{A_0} = q_0$$

q_0 - fluks energije zračenja apsolutno crnog tijela

q - fluks energije zračenja sivog tijela

$A_0 = 1$ - sposobnost apsorpcije apsolutno crnog tijela

A - sposobnost apsorpcije sivog tijela

Ukoliko se q_0 izrazi pomoću Stefan Boltzmanovog zakona:

$$q_0 = c_0 \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4$$

a za sivo tijelo:

$$q = c \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4$$

slijedi:

$$\frac{c \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4}{A} = c_0 \cdot \left(\frac{T}{100} \right)^4$$

odnosno

$$c = A \cdot c_0$$

Iz jednadžbe (189) i (191) slijedi:

$$A = \varepsilon$$

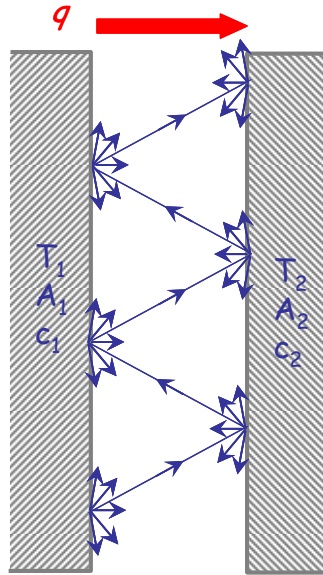
Dakle, sposobnost apsorpcije tijela (A) brojčano je jednaka stupnju crnoće (ε). Budući da se i A i ε kreću u intervalu od 0 do 1, zaključuje se da je sposobnost zračenja realnog sivog tijela uvijek manja od sposobnosti zračenja apsolutno crnog tijela pri određenoj temperaturi. Dalje, može se zaključiti da je sposobnost zračenja tijela utoliko veća ukoliko je veća njegova sposobnost apsorpcije i obrnuto. Tijela koja dobro reflektiraju energiju zračenja, zrače vrlo dobro. U krajnjem slučaju sposobnost zračenja apsolutno bijelog tijela jednaka je nuli.

Kod tijela koja nisu crna stupanj crnoće ovisi o kutu zračenja zaokrenutog od normale, β , vrsti materijala, svojstvima njegove površine i o temperaturi. Ako se sa ε_n označi prosječni stupanj crnoće u smjeru normale može se izračunati stupanj crnoće za:

- sjajne metalne plohe: $\varepsilon = 1,2 \cdot \varepsilon_n$
- nemetalne glatke plohe: $\varepsilon = 0,95 \cdot \varepsilon_n$
- hrapave plohe: $\varepsilon = 0,98 \cdot \varepsilon_n$

3.3.1. Izmjena topline između dvije ravne ploče

Dva ili više tijela izmjenjuju toplinu zračenjem, pri čemu i toplo i hladno tijelo zrače, ali izmijenjeni toplinski tok uvijek ide s toplijeg na hladnije tijelo. Na izmijenjenu količinu topline utječe i međusobni položaj ta dva tijela.



Slika 3.45. Izmjena topline zračenjem između dvije ravne ploče

Prijenos topline između dvije ravne ploče može se izraziti na sljedeći način:

$$q = q_1 - q_2 = c_1 \cdot \left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - c_2 \cdot \left(\frac{T_2}{100}\right)^4$$

odnosno:

$$q = c_{1-2} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^4 - \left(\frac{T_2}{100}\right)^4 \right]$$

gdje je c_{1-2} ukupni koeficijent zračenja tijela ili tzv. *reducirani koeficijent zračenja*. Reducirani koeficijent zračenja izražava se na temelju pojedinačnih koeficijenata zračenja:

$$c_{1-2} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_0}}$$

Izraze li se koeficijenti zračenja preko stupnja crnoće ($c = \varepsilon \cdot c_0$) jednadžba (___) piše se u obliku:

$$c_{1-2} = \frac{c_0}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

Reducirani stupanj crnoće definira se na sljedeći način:

$$\varepsilon_{1-2} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}$$

Ukoliko se toplinsko zračenje odvija između dvije površine koje su pod određenim kutom, toplinski tok je proporcionalan projekciji površine vidljivoj iz položaja druge površine i obrnuto proporcionalan kvadratu udaljenosti. Prema Lambertovom zakonu:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_n \cdot \cos(\beta) = q_n \cdot dA \cdot \cos(\beta)$$

q_n je gustoća toka okomita na površinu.

Za dva tijela u prostoru vrijedi:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_n \cdot \underbrace{\frac{\cos \beta_1 \cdot \cos \beta_2}{l^2}}_{\phi} \cdot dA$$

odnosno:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_n \cdot \varphi$$

gdje je φ vidni kut.

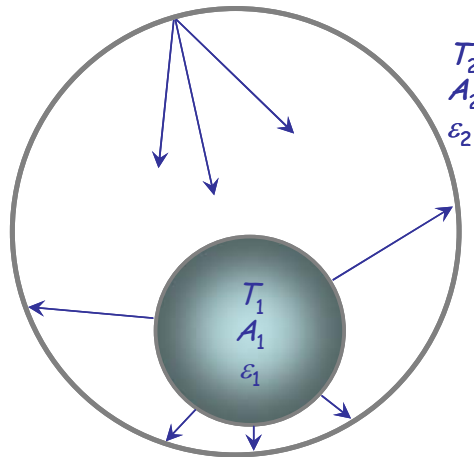
Konačno slijedi:

$$q = c_{1-2} \cdot \varphi \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$$

3.3.2. Zračenje u zatvorenom prostoru

Za ilustraciju se razmatra slučaj izmjene topline između dviju površina pri čemu je jedna u potpunosti okružena drugom. Pri tome vrijedi:

- s površine 1 sve zrake moraju pogadati tijelo 2
- tijelo 2 mora biti glatko
- dio zraka tijelo 2 će pogadati tijelo 1 a dio tijelo 2



Slika 3.46. Zračenje u zatvorenom prostoru (obuhvaćeno tijelo)

Na tijelo A_1 dopjeva samo dio energije zračenja s tijela A_2 . Mjerodavna je površina stoga manja površina A_1 .

Izmjenjena toplina može se izračunati na sljedeći način:

$$\dot{Q}_{1-2} = c_{1-2} \cdot A_1 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$$

pri čemu je ukupni koeficijent zračenja:

$$c_{1-2} = \frac{1}{\frac{1}{c_1} + \frac{A_1}{A_2} \cdot \left(\frac{1}{c_2} - \frac{1}{c_0} \right)}$$

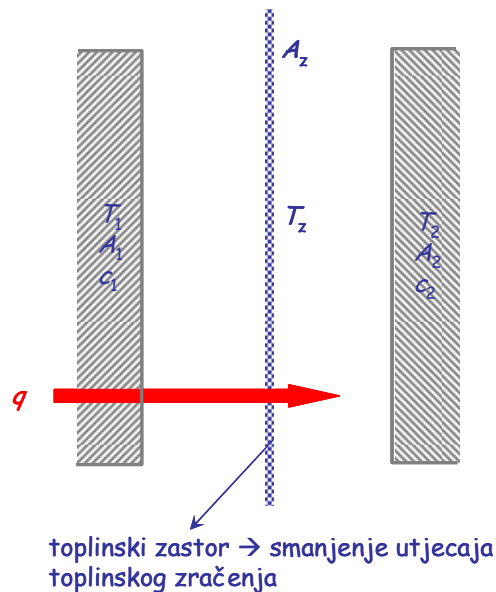
Ako je $A_2 \gg A_1$ $c_{1-2} = c_1$ te slijedi:

$$\dot{Q}_{1-2} = c_1 \cdot A_1 \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$$

3.3.3. Intenzifikacija i zaštita od toplinskog zračenja

Intenzifikaciju toplinskog zračenja najjednostavnije je postići ili povišenjem temperature ili povišenjem stupnja crnoće, odnosno povišenjem ukupnog zajedničkog koeficijenta zračenja (c_{1-2}).

Zaštita. S druge se strane javlja problem smanjenja toplinskog zračenja, a kao uspješan način pokazala se primjena tzv. *toplinskih zastora* koji ne dovode nite ne odvede toplinu. To su najčešće polirane površine (npr. aluminijska folija) koje osiguravaju stacionarnost prijenosa topline. Ukoliko se između dvije paralelne plohe postavi toplinski zastor smanjuje se gustoća toka zračenja (uvođenjem novog otpora).



Slika 3.47. zaštita od toplinskog zračenja

Zbog jednostavnosti se uzima da je:

$$c_1 = c_z = c_2 \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_z = \varepsilon_2$$

Gustoća toka topline s površine A_1 na površinu A_2 bez zastora:

$$q_{1-2} = c_{1-2} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$$

Gustoća toka topline s površine A_1 na površinu zastora A_z :

$$q_{1-z} = c_{1-z} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_z}{100} \right)^4 \right]$$

Gustoća toka topline s površine zastora A_z na površinu A_1 :

$$q_{z-2} = c_{z-2} \cdot \left[\left(\frac{T_z}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$$

U stacionarnim uvjetima $q_{1-z} = q_{z-2}$

$$\left(\frac{T_z}{100} \right)^4 = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 + \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$$

pa slijedi:

$$q_{z-2} = c \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\left(\frac{T_z}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right) - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$$

$$q_{z-2} = \frac{1}{2} \cdot c \cdot \left[\left(\frac{T_1}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_2}{100} \right)^4 \right]$$

S brojem zastora smanjuje se gubitak energije zračenja:

$$q_{1-2} \text{ (uz zastor)} = \frac{1}{2} \cdot q_{1-2} \text{ (bez zastora)}$$

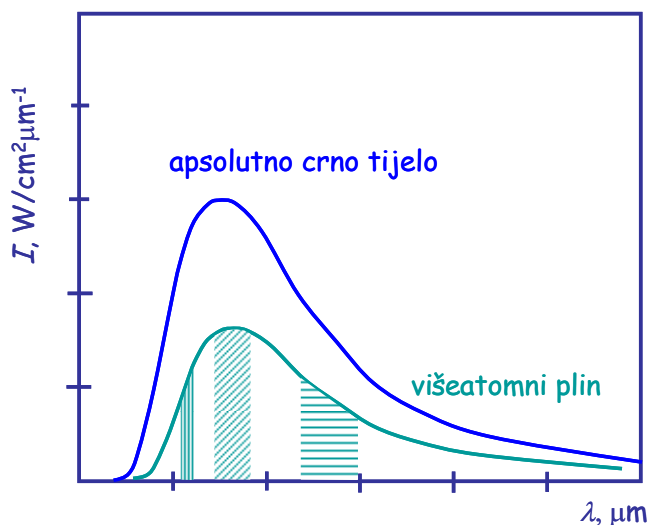
Ukoliko se poveća broj zastora:

$$q \text{ (uz } n \text{ zastora)} = \frac{1}{n+1} \cdot q \text{ (bez zastora)}$$

3.3.4. Toplinsko zračenje plinova

Plinovi su uglavnom propusni za zračenje, a zračenje apsorbiraju ili emitiraju u uskom rasponu valnih duljina → selektivno zračenje.

Plinovi se sa stanovišta toplinskog zračenja i apsorpcije energije ponašaju ovisno o molekularnoj strukturi. Mono i diatomski plinovi i pare su praktički u potpunosti prozirni – diatermički. Višeatomni plinovi (CO₂, H₂O) imaju sposobnost visoke emisivnosti i apsorpcije topline, ali samo u određenim intervalima valnih duljina (IC područje). N₂, O₂, i plinovi simetrične molekularne strukture propusni su pri nižim temperaturama



Slika 3.48. Zračenje plinova

Za razliku od plinova, čvrsta tijela zrače u kontinuiranom dijelu spektra. Kod plinova se energija zračenja apsorbira po cijelom volumenu koji zauzimaju, dok kod čvrstih tijela samo na površini jer su neprozračna.

Zračenje ovisi o temperaturi, sastavu, gustoći i geometriji plina (zrači cijelim volumenom). Pri opisu procesa uvode se određena pojednostavljenja. Uglavnom se pretpostavlja da je plin u termodinamičkoj ravnoteži pa se stanje plina se može definirati jednom temperaturom, te se plin može smatrati sivim odnosno apsorpcija i emisija zračenja mogu se okarakterizirati jednim parametrom, $A = \varepsilon$.

Stupanj crnoće ovisi o temperaturi, parcijalnom tlaku i debljini sloja:

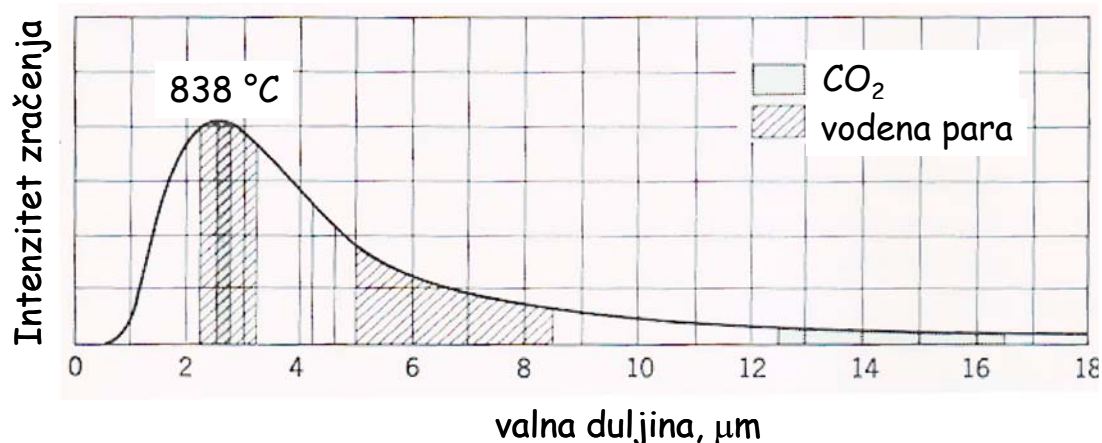
$$\varepsilon_{pl} = f(T, p, l)$$

Smjese plinova imaju manju ukupnu energiju zračenja od sume pojedinačnih jer jedan plin apsorbira dio energije zračenja drugog plina.

Na slici 3.49. prikazan je spektar za smjesu CO₂ i vodene pare. Može se vidjeti da se valne duljine CO₂ i H₂O preklapaju. U tom se slučaju ukupan stupanj crnoće može izračunati iz:

$$\varepsilon_{uk} = \varepsilon_{H_2O} + \varepsilon_{CO_2} - \Delta\varepsilon$$

Pri čemu je $\Delta\varepsilon$ tabeliran.



Slika 3.49. Zračenje smjese plinova

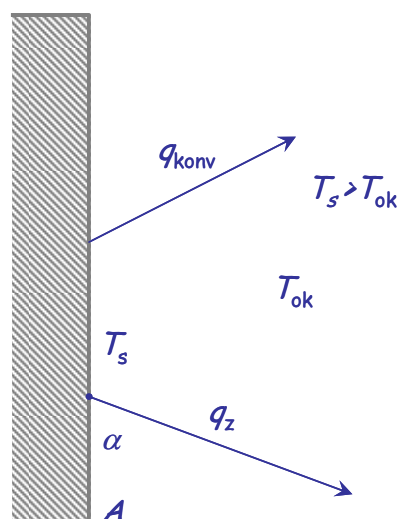
3.3.5. Složeni prijenos topline zračenjem i konvekcijom

Ukoliko površina tijela ima znatno višu temperaturu od okoline, potrebno je pri proračunima uzeti u obzir prijenos topline u okolinu i toplinskim zračenjem i konvekcijom.

Površina konveksijski predaje (ili prima) toplinu okolini i zračenjem drugom tijelu, pri čemu je okolni fluid propustan za zračenje.

Ukupni koeficijent prijenosa topline računa se prema:

$$\alpha_{uk} = \alpha_{konv} + \alpha_{rad}$$



Slika 4.50. Prijenos topline zračenjem i konvekcijom

Ukupno prenesena toplina:

$$\dot{Q}_{uk} = \dot{Q}_{konv} + \dot{Q}_{rad}$$

Obzirom da se koeficijenti konveksijskog prijelaza topline i izmjene topline zračenjem svode na istu površinu i istu razliku temperatura, toplinski tok zbog zračenja može se izraziti analogno konvekciji:

$$\dot{Q}_r = \alpha_r \cdot A \cdot (T_s - T_{ok})$$

Pa je koeficijent prijelaza topline zračenjem:

$$\alpha_r = \frac{\dot{Q}_r}{A \cdot (T_s - T_{ok})}$$

Kako je:

$$\dot{Q}_r = \varepsilon \cdot c_0 \cdot A \cdot \left[\left(\frac{T_s}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{ok}}{100} \right)^4 \right]$$

Izjednačavanjem izraza ___ i ___ dobiva se za koeficijent prijelaza topline zračenjem:

$$\alpha_r = \frac{\varepsilon \cdot c_0 \cdot \left[\left(\frac{T_s}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{ok}}{100} \right)^4 \right]}{(T_s - T_{ok})}$$

Gustoća konvekcijskog toka topline jednaka je:

$$q_K = \alpha_1 \cdot (T_s - T_{ok})$$

Ukupna gustoća toplinskog toka:

$$q_{uk} = q_K + q_R = \alpha_1 \cdot (T_s - T_{ok}) + \varepsilon \cdot c_0 \cdot \left[\left(\frac{T_s}{100} \right)^4 - \left(\frac{T_{ok}}{100} \right)^4 \right]$$

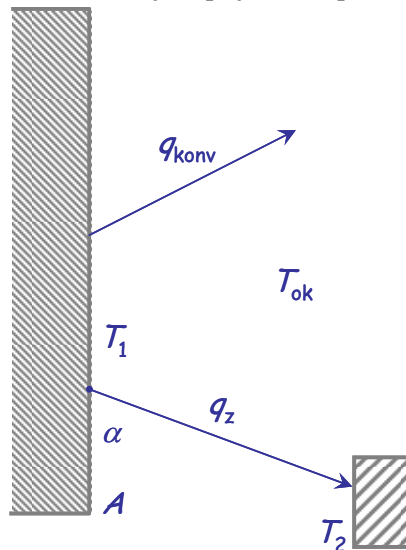
Odnosno:

$$q_{uk} = q_K + q_R = \alpha_1 \cdot (T_s - T_{ok}) + \alpha_r \cdot (T_s - T_{ok})$$

Konačno se može pisati:

$$q = (T_s - T_{ok}) \cdot \alpha_{ekv}$$

Gdje je α_{ekv} je složeni ili ekvivalentni koeficijent prijelaza topline.



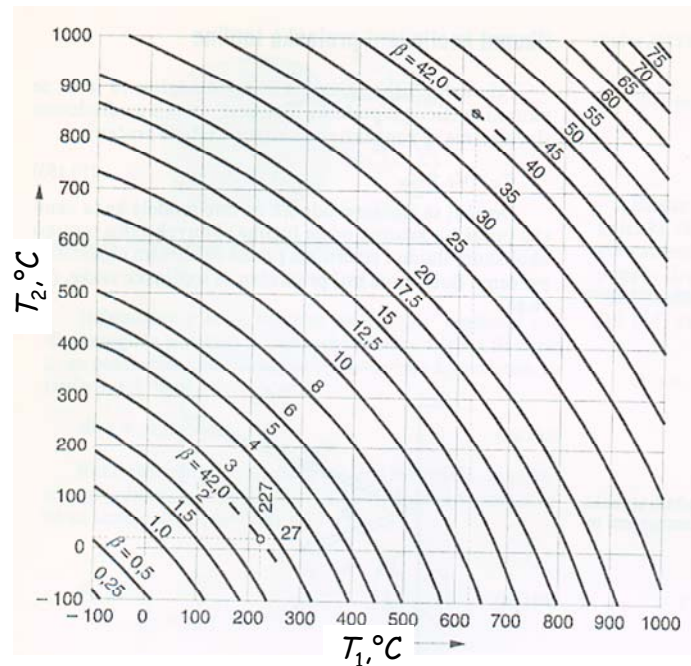
Slika 4.51. Prijenos topline zračenjem i konvekcijom između dva tijela

Ukoliko u procesu izmjene topline sudjeluje i drugo tijelo koje je na temperaturi T_2 , koeficijent prijelaza topline zračenjem računa se za $T_2 = T_{ok}$ korištenjem izraza ___.

Ako je $T_2 \neq T_{ok}$ koeficijent prijelaza topline radijacijom računa se prema:

$$\alpha_{zr} = C_{12} \cdot \beta \cdot \frac{T_1 - T_2}{(T_1 - T_{ok})}$$

Pri čemu se β očita sa dijagrama prikazanog na slici 4.52.

Slika 4.52. Korekcijski faktor za izračunavanje α_r

3.3.6. Prijenos topline pri promjeni agregatnog stanja

Najčešći procesi kod kojih dolazi do promjene agregatnog stanja homogenih jednofaznih sustava tijekom izmjene topline su vrenje kapljevine i kondenzacija pare. Kod oba procesa ostvaruju se velike brzine prijenosa topline. Tijekom promjene agregatnog stanja mijenjaju se gustoća, viskoznost, specifični toplinski kapacitet i toplinska vodljivost, a latentna se toplota ili troši ili oslobađa. Zbog složenosti procesa koeficijent prijelaza topline se procjenjuje korištenjem empirijskih korelacija.

3.3.6.1. Vrenje kapljevina

Kada je površina u kontaktu s kapljevnom na temperaturi većoj od temperature zasićenja dolazi do vrenja. Gustoća toplinskog toka ovisi o razlici temperatura između površine i temperature zasićenja.

Pri vrenju kapljevina prijenos topline je još složeniji fenomen nego što je to slučaj bez promjene agregatnog stanja jer, između ostalog, nastaje dvofazni sustav. Na prijenos topline može utjecati više faktora:

- čvrsta stijenka (horizontalna ili vertikalna)
- stanje kapljevine (na temperaturi vrelišta ili pothlađena)
- gibanje ili mirovanje fluida

Vrenje se provodi na površini grijačeg tijela (elementa) ili u masi fluida. Nema egzaktnog analitičkog rješenja problema već se proračuni provode na temelju empirijskih izraza.

Vrenje na površini grijačeg elementa

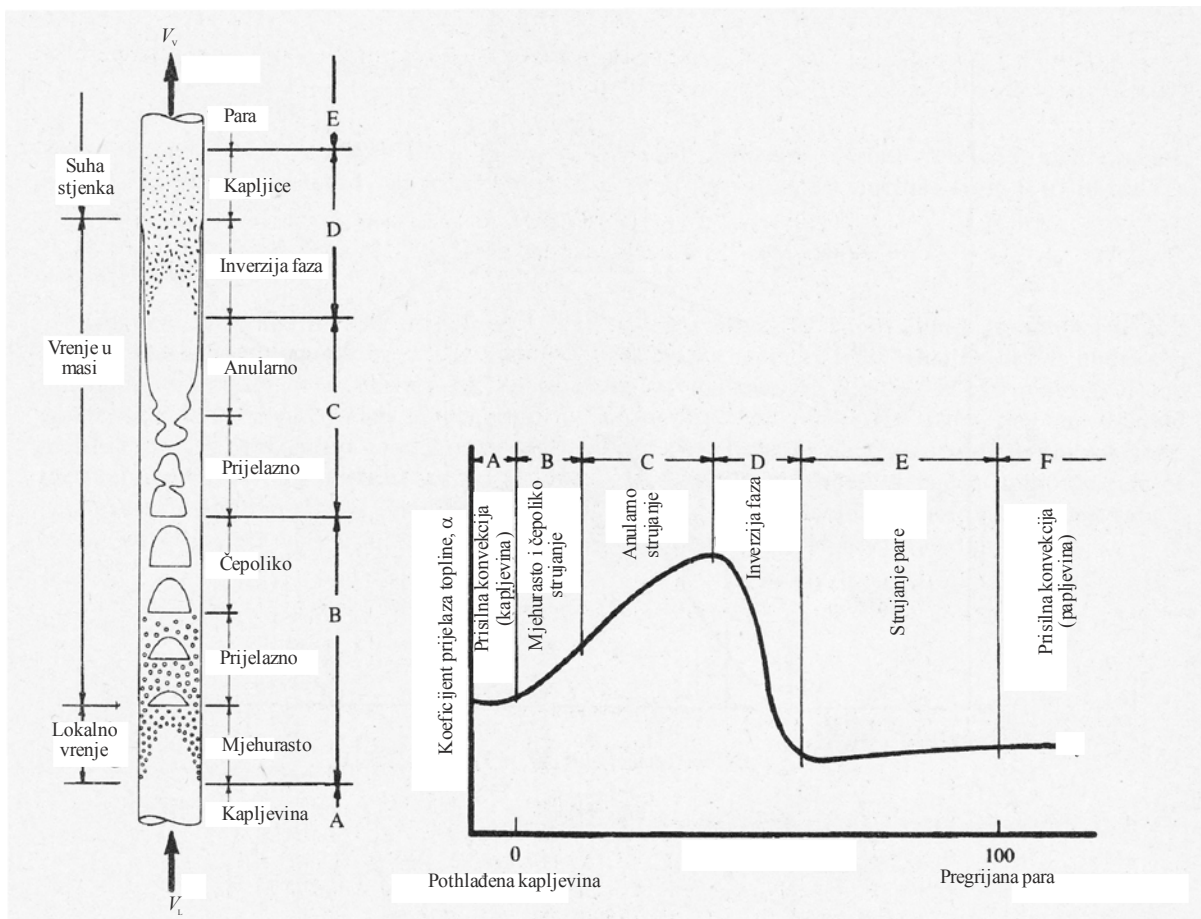
Fluid struji preko grijačeg elementa i dio fluida koji je neposredno uz stijenku zagrijava se i nalazi u stanju vrenja, dok su udaljeniji slojevi fluida pothlađeni. Mjehurići pare se od površine grijača gibaju kroz hladnije dijelove kapljevine gdje iščezavaju tako da nema potrebe za prostorom za otparavanje. Ovaj način vrenja naziva se *pothlađeno vrenje pri protjecanju*. U ovom se slučaju govori o dvofaznom

strujanju pare i kapljevine. Na slici 4.53. prikazano je kako se ovisno o mehanizmu vrenja mijenja vrijednost koeficijenta prileaza topline. Pothlađena kapljevina ulazi u cijevni isparivač grijanih stjenki. Na početku je vrenje lokalno (mjehurasto). Porastom količine mjehurića koji se podižu prema gore raste i vrijednost koeficijenta prijelaza topline. Sa sve većom količinom pare strujanje postaje prvo čepoliko a zatim anularno. Kod anularnog strujanja kapljevina tvori tanki sloj uz samu stjenku a para struji kroz središte. Toplina se sa zagrijane stjenke prenosi kondukcijski kroz sloj kapljevine a do isparavanja dolazi na granici faza. Pri određenom protoku pare dolazi do inverzije faza (para postaje kontinuirana faza a kapljevina disperzna-kapljice). U tom trenutku dolazi do naglog pada vrijednosti koeficijenta prijelaza topline obzirom da se sada toplina prenosi kroz paru koja ima znatno niži koeficijent toplinske vodljivosti od kapljevine. Kada strujanje postane jednofazno (samo para) koeficijent prijelaza topline može se procijeniti iz korelacija za prisilnu konvekciju.

Za vrenje vode u uvjetima prisilne konvekcije unutar vertikalne cijevi predložena je jednostavna korelacija za procjenu koeficijenta prijelaza topline ($0,5 \text{ MPa} < p < 17 \text{ MPa}$):

$$\alpha = 2,54 \cdot \Delta T^3 \cdot e^{p/1,551}$$

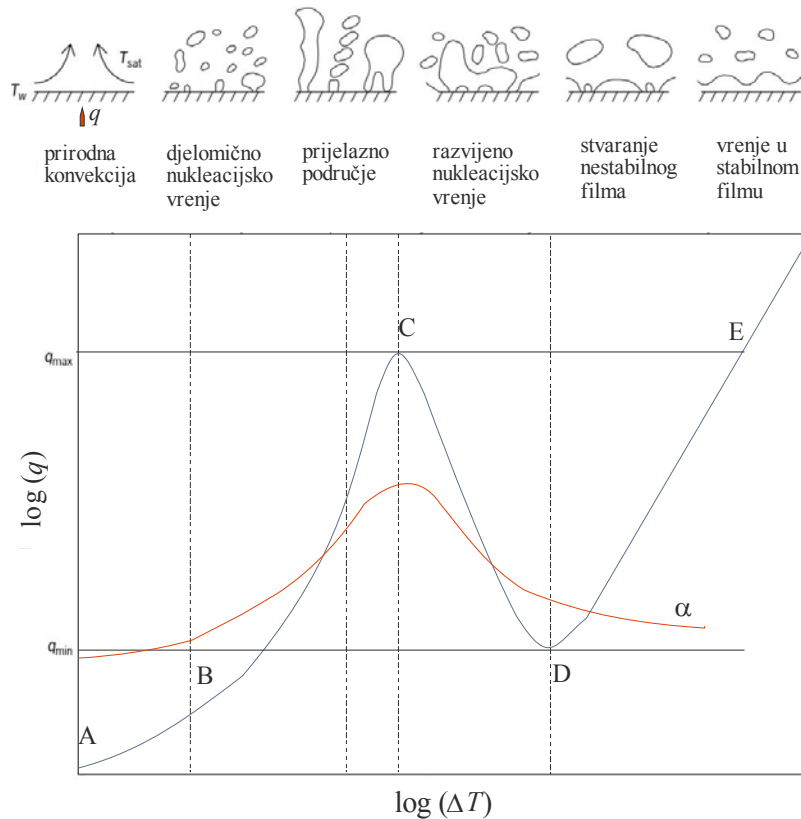
Ovdje su: ΔT - razlika temperatura površine i zasićene kapljevine, °C
 p - tlak, MPa



Slika 4.53. Mehanizmi vrenja tijekom strujanja u isparivaču

Vrenje u masi fluida

Vrenje se odvija u ograničenom prostoru ispunjenim kapljevnom u koji je uronjen grijač. Temperatura vrelišta ovisi o dubini uranjanja (zbog hidrostatskog tlaka). Mjehurići pare nastaju na površini grijača, prolaze kroz masu kapljevine i oslobađaju se na površini te odlaze u prostor za paru. Ovaj način vrenja naziva se *vrenje zasićene kapljevine* budući da su para i kapljevina u ravnoteži na temperaturi vrenja. Koeficijent prijelaza topline i fluks topline ovise o razlici temperatura što se može prikazati dijagramom na slici 4.54.



Slika 4.54. Ovisnost prenesene topline i koeficijenta prijelaza topline o temperaturnoj razlici

Toplinski fluks se izražava jednadžbom:

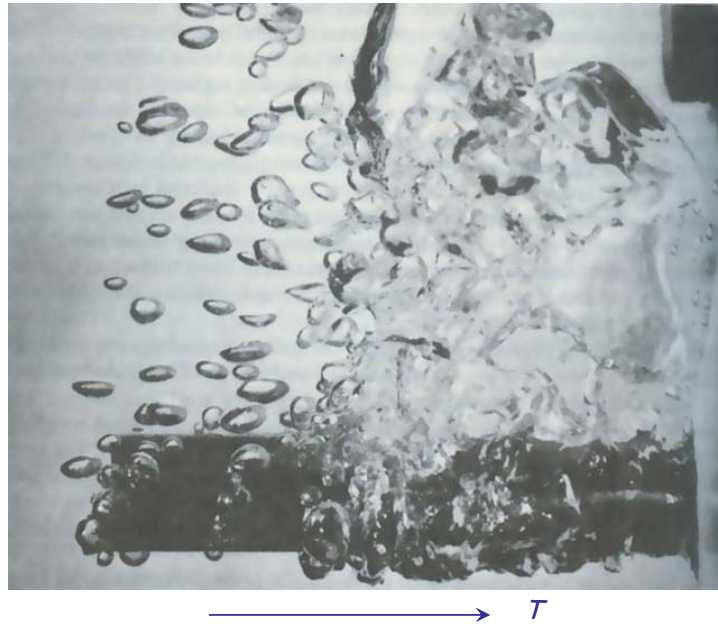
$$q = \alpha \cdot \Delta T$$

gdje je ΔT razlika temperature grijača i kapljevine

Tok krivulje ovisi o stanju fluida što se može podijeliti u nekoliko faza:

- \overline{AB} - praktički linearna ovisnost, kapljevina u blizini grijača podgrijava se zbog čega dolazi do lokalne razlike temperatura i javlja se prirodna konvekcija. Dakle, toplina se prenosi konvekcijski a do isparavanja dolazi na granici faza. Koeficijent prijelaza topline može se procijeniti korištenjem korelacija za prirodnu konvekciju.
- \overline{BC} - stvaraju se mjehurići pare koji svojim snažnim gibanjem intenziviraju prijenos topline jer svaki mjehurić predstavlja nukleus ili jezgru vrenja te se ova faza naziva *nukleacijsko vrenje*. Još uvijek je znatan dio grijača u neposrednom kontaktu s kapljevnom.
- C - kritična temperatura \rightarrow malom promjenom temperature dolazi do naglog pada koeficijenta prijelaza topline
- \overline{CD} - porastom temperaturne razlike mjehurići nastaju tako brzo da potpuno prekriju ogrjevnu površinu te sprječavaju dolazak svježe kapljevine na grijanu površinu \rightarrow dolazi do koalescencije i stvaranja tankog filma pare koji prekriva površinu – *nestabilno mjehurasto vrenje*. Toplina se mora voditi (kondukcija) kroz taj film do kapljevine gdje utječe na vrenje \rightarrow dolazi do smanjenja toplinskog toka i pada vrijednosti koeficijenta prijelaza topline.
- \overline{DE} - grijač je u potpunosti prekriven stabilnim filmom pare te se tu odvija površinsko vrenje ili *vrenje u filmu* (kao kapljice na vrućem glačalu; zbog filma pare one skakuću po površini). Da bi se održao stabilno vrenje u filmu (tankom sloju) potrebne su velike temperature površine. Zbog izrazito velike temperaturne razlike dolazi do izražaja i toplinsko zračenje zbog čega se povećava brzina prijenosa topline.

Neki od navedenih mehanizmi vrenja slikovito se mogu prikazati na primjeru zagrijavanja žice uronjene u kapljevinu (Slika 4.55.). Žica se grije na jednom kraju. S udaljenošću od mjesta zagrijavanja smanjuje se temperatura žice pa je moguće zapaziti nekoliko mehanizama vrenja. Na najudaljenijem dijelu od mjesta zagrijavanja može se uočiti nukleacijsko vrenje (stvaranje mjehurića). S porastom temperature žice vrenje prelazi u razvijeno nukleacijsko, prijelazno i uz samu stjenku kapljevinu vrije u tankom sloju.



Slika 4.55. Zagrijana bakrena žica uronjena u kapljevinu

U praksi je potrebno proces voditi u području nukleacijskog vrenja jer se tada postižu optimalni uvjeti s obzirom na utrošak energije i postignute efekte, a izbjegava se i pregrijavanje grijača.

Koeficijent prijelaza topline u području nukleacijskog vrenja ovisi o nizu parametara:

$$\alpha = f(T, \rho, r, \eta, \sigma, \lambda, c_p)$$

gdje je: r - latentna toplina isparavanja
 σ - napetost površine

U praksi se koriste empirijski izrazi koji uzimaju u obzir sve navedene varijable. U slučaju vrenja vode pri atmosferskom tlaku, postoje pojednostavljene korelacije:

Horizontalna površina:

$$q < 16 \text{ kW/m}^2 \quad \alpha = 1042 \cdot \Delta T^{1/3}$$

$$16 < q < 240 \text{ kW/m}^2 \quad \alpha = 5,56 \cdot \Delta T^3$$

Vertikalna površina:

$$q < 3 \text{ kW/m}^2 \quad \alpha = 537 \cdot \Delta T^{1/7}$$

$$3 < q < 63 \text{ kW/m}^2 \quad \alpha = 7,96 \cdot \Delta T^3$$

Ako se vrenje odvija pri nekom drugom tlaku, vrijednost koeficijenta prijelaza topline se korigira korištenjem sljedećeg izraza:

$$\alpha_p = \alpha_1 \cdot \left(\frac{p}{p_1} \right)^{0,4}$$

3.3.6.2. Kondenzacija pare

Do kondenzacije dolazi kada zasićena para dođe u kontakt s površinom koja je na nižoj temperaturi. Kapljevina (kondenzat) se sakuplja na površini odakle se cijedi pod utjecajem gravitacije. Toplina se prenosi kondukcijski a brzina prijenosa topline ovisi o debljini sloka kapljevine koji pak ovisi o brzini kondenzacije i brzini uklanjanja kapljevine s površine. Dva su osnovna načina kojima dolazi do kondenzacije pare: kapljična kondenzacija i kondenzacija u tankom sloju (slika 4.56.).



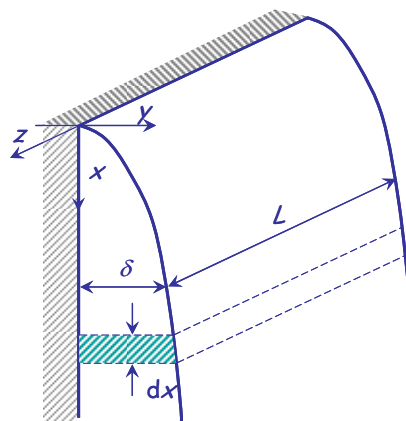
Slika 4.56. kapljična kondenzacija i kondenzacija u tankom sloju

Kapljičasta kondenzacija

Javlja se kada kondenzat slabo kvasi površinu na kojoj nastaje (velik dio površine u direktnom je kontaktu s parom). Kapljica se u trenutku dostizanja određene (dovoljno velike) veličine otkida i uklanja s površine. Zbog toga je prijenos topline bolji budući da nema toplinskog otpora filma kapljevine, a koeficijent prijelaza topline je i do 20 puta veći nego što je to slučaj kod površinske kondenzacije. Međutim, uvjete za kapljičnu nije moguće održavati dovoljno dugo vremena kondenzaciju jer se s vremenom stvori tanki sloj, pa dolazi do kondenzacije u tankom sloju.

Površinska kondenzacija (kondenzacija u tankom sloju)

Provodi se na vertikalnim ili kosim površinama, a rijetko na horizontalnim. Koeficijent prijelaza topline ovisi o debljini filma. U praksi se proračuni svode na ovaj tip kondenzacije jer se kod kapljičaste kondenzacije ne može definirati prekrivena površina.



Slika 4.57. kondenzacija u tankom sloju

Površina izmjene topline blokirana je tankim slojem kapljevine, a debljina sloja raste kako se sloj slijeva. Unutar sloja postoji temperaturni gradijent jer sloj predstavlja otpor prijenou topline.

Korelacije za procjenu koeficijenta prijelaza topline dane su sljedećim izrazima:

$$\text{Vertikalni zid: } \bar{\alpha} = 0,94 \cdot \sqrt{\frac{g \cdot \rho_{\text{fl}} \cdot r \cdot \lambda_{\text{fl}}^3}{\nu_{\text{fl}} \cdot H \cdot (T^* - T_S)}}$$

$$\text{Horizontalni zid: } \bar{\alpha} = 0,72 \cdot \sqrt{\frac{g \cdot \rho_{\text{fl}} \cdot r \cdot \lambda_{\text{fl}}^3}{n \cdot \nu_{\text{fl}} \cdot H \cdot (T^* - T_S) \cdot d}}$$

gdje je: H - visina stijenke koja je kvašena kondenzatom
 T^* - temperatura zasićenja
 n - broj cijevi kondenzatora

Vrlo je nepoželjno prisustvo nekondenzirajućih plinova budući da oni blokiraju površinu. Ako je omjer tlakova inerta i ukupnog tlaka:

$$0,01 < \frac{P_{\text{inert}}}{P_{\text{ukupni}}} < 0,4$$

potrebno je uvesti korekciju: $\frac{\alpha_{\text{smjese}}}{\alpha_{\text{čiste pare}}} \cong 0,1 \cdot \sqrt{\frac{P_{\text{ukupni}}}{P_{\text{inert}}}}$

4. PRIJENOS TVARI

Procesi prijenosa količine gibanja i topline uključivali su jednokomponentne sustave s prirodnom tendencijom prema postizanju ravnotežnog stanja.

Ako neki sustav sadrži dvije ili više različitih komponenti čije se koncentracije razlikuju od točke do točke u prostoru, tada postoji prirodna tendencija da se tvar prenosi čak i kod minimalnih razlika koncentracija. Prijenos jedne komponente iz područja više koncentracije prema području niže koncentracije naziva se *prijenos tvari*. Ta se pojava uočava svakodnevno jednako kao i prijenos količine gibanja i prijenos topline.

U industriji se prijenos tvari javlja u procesima kao što su adsorpcija, apsorpcija, destilacija, ekstrakcija, kristalizacija, sušenje, sve kemijske i biokemijske reakcije.

Često se uz prijenos tvari istovremeno odvijaju i procesi prijenosa količine gibanja i topline. Prijenos tvari uz prijenos topline temelj je toplinskog procesnog inženjerstva koje proučava toplinske separacijske procese.

Mehanizam prijenosa tvari, kao i mehanizam prijenosa topline, ovisi o hidrodinamičkim uvjetima u sustavu. Prijenos tvari može se odvijati molekularnim mehanizmom (difuzija) ili konvektivnim mehanizmom (vrtložnim). Pri tome je difuzija analogna prijenosu topline kondukcijom, a konvekcija prijenosu topline konvekcijom. U slučaju kada djeluju oba mehanizma, odnosi su vrlo složeni te se za dobivanje aproksimativnih modela koji opisuju proces primjenjuje ograničavajući mehanizam, odnosno mehanizam koji pruža veći otpor prijenosu.

Kao i kod dugih procesa i kod prijenosa tvari vrijedi zakon očuvanja:

$$V \cdot \frac{dX_V}{dt} = \dot{V}_{ul.} \cdot X_{V, ul.} - \dot{V}_{izl.} \cdot X_{V, izl.} + V_r$$

AKUMULACIJA = ULAZ - IZLAZ + GENERACIJA

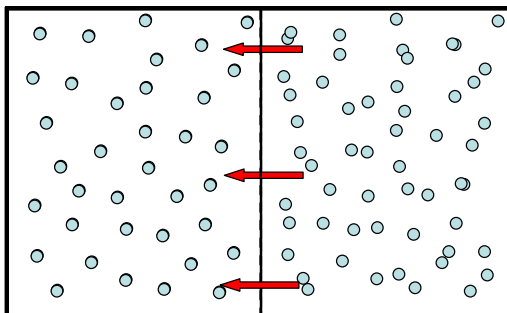
X_V - predstavlja količinu prenesene tvari po jedinici volumena, a izražava se kao molarna koncentracija C , mol m⁻³ ili masena koncentracija γ , kg m⁻³.

Kod prijenosa tvari javljaju se i određene posebnosti:

- akumulacija tvari uzrokovana kemijskom reakcijom ovisi o čitavom nizu faktora (molne koncentracije reaktanata, temperatura), a često je zbog prisutnosti kemijske reakcije potrebno uzeti u obzir i generiranje količine tvari i topline.
- površinu faza između kojih se odvija prijenos tvari često je teško definirati jer je često pokretna ili se mijenja tijekom procesa (reakcija između dva fluida). Kod prijenosa topline i količine gibanja jedna je faza često površina čvrste faze.
- vrijednost prijenosnog koeficijenta kod malih vrijednosti Reynoldsove značajke (koeficijent difuzije D) izrazito je niska u odnosu na kinematičku viskoznost ili koeficijent toplinske vodljivosti. Zbog toga je gustoća toka (fluks) prijenosa tvari znatno manja u odnosu na gustoće toka topline ili količine gibanja. Međutim, već kod malih brzina strujanja povećava se količina prenesene tvari vrtložnim mehanizmom, a također i molekularnim mehanizmom u smjeru protjecanja. Gustoća toka se povećava jer se pokretačka sila tijekom procesa konstantno održava velikom.

4.1. Prijenos tvari difuzijom

Difuzija je, u širem smislu, migracija jedne vrste čestica tvari unutar smjese koja se sastoji od dvije ili više komponenata. Takav način prijenosa u pravilu je spor te često predstavlja ograničavajući (mjerodavni) faktor kod mnogih separacijskih procesa ili kod kemijske reakcije. Do prijenosa dolazi zbog pokretačke sile (razlika koncentracija). Dakle, ako u nekom sustavu postoji razlika koncentracija po prostoru promatrane vrste čestica, u tom slučaju do prijenosa dolazi od mjesta veće koncentracije prema mjestu manje koncentracije. Drugim riječima, difuzija je molekularni mehanizam prijenosa tvari s mjesta višeg ka mjestu nižeg kemijskog potencijala neovisan o konvekciji. Proces prijenosa traje dok se u promatranom sustavu koncentracije izjednače, odnosno dok se ne uspostavi ravnotežno stanje.



Slika 4.1. Molekularni mehanizam prijenosa tvari

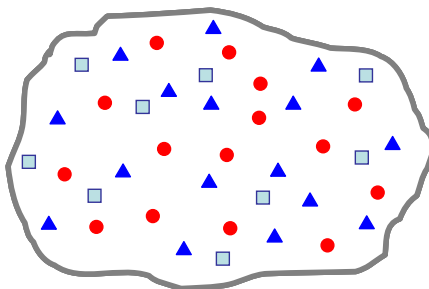
Zakoni koji opisuju proces prijenosa tvari daju vezu između gustoće toka tvari koja difundira i gradijenta koncentracije odgovornog za prijenos tvari. Kvantitativni opis procesa mnogo je složeniji od opisa procesa prijenosa količine gibanja i topline do kojih dolazi u jednofaznom sustavu, obzirom da do prijenosa tvari dolazi u smjesama pa je potrebno uzeti u obzir utjecaj svake pojedinačne komponente.

Proces prijenosa tvari može se odvijati u stacionarnim i nestacionarnim uvjetima. U stacionarnim uvjetima prijenos tvari se odvija uz konstantni koncentracijski gradijent.

$$\text{Stacionarni procesi: } \frac{(dc/dy)}{dt} = 0. \quad (4.1.)$$

$$\text{Nestacionarni procesi: } \frac{(dc/dy)}{dt} \neq 0. \quad (4.2.)$$

Koncentracija



Slika 4.2. Kontrolni volumen višekomponentne smjese

Sastav višekomponentne smjese izražava se koncentracijom (masena, molarna, udio pojedine komponente u smjesi).

Masena koncentracija:

- definira se kao masa komponente A u jediničnom volumenu smjese, γ_A , kgm^{-3}

Ukupna masena koncentracija ili gustoća

- ukupna masa smjese sadržane u jediničnom volumenu

$$\gamma = \sum_{i=1}^n \gamma_i \quad (4.3.)$$

maseni udio

$$\omega_A = \frac{\gamma_A}{\sum_{i=1}^n \gamma_i} = \frac{\gamma_A}{\gamma} = \frac{m_A}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad (4.4.)$$

Molna koncentracija, c_A , molm⁻³:

$$c_A = \frac{\gamma_A}{M_A} \quad (4.5.)$$

Koncentracija komponente plinske smjese izražava se često parcijalnim tlakom. Ako se plin ponaša kao idealan:

$$c_A = \frac{n_A}{V} = \frac{p_A}{R \cdot T} \quad (4.6.)$$

Gdje su:

- p_A – parcijalni tlak komponente A u smjesi
- n_A – broj molova komponente A
- R – plinska konstanta
- V – volumen plina
- T – apsolutna temperatura

Ukupna molna koncentracija, *ukupni molovi smjese u jediničnom volumenu* računaju se prema:

$$c = \sum_{i=1}^n c_i \quad (4.7.)$$

Za smjesu idealnih plinova:

$$c = \frac{n_{uk}}{V} = \frac{P}{R \cdot T} \quad (4.8.)$$

Gdje je: P – ukupni tlak

Molni udio komponente A u kapljevitoj ili čvrstoj smjesi:

$$x_A = \frac{c_A}{c} \quad (4.9.)$$

Za smjesu plinova:

$$y_A = \frac{c_A}{c} \quad (4.10.)$$

Odnosno za idealne plinove:

$$y_A = \frac{c_A}{c} = \frac{\frac{p_A}{R \cdot T}}{\frac{P}{R \cdot T}} = \frac{p_A}{P} \quad (4.11.)$$

Koncentracije se mogu preračunati jedna u drugu korištenjem sljedećih izraza:

$$\gamma_A = c_A \cdot M_A \quad (4.12.)$$

$$x_A = \frac{\frac{\omega_A}{M_A}}{\frac{\omega_A}{M_A} + \frac{\omega_B}{M_B}} \quad (4.13.)$$

$$\omega_A = \frac{x_A \cdot M_A}{x_A \cdot M_A + x_B \cdot M_B} \quad (4.14.)$$

U tablici 4.1. dani su izrazi za dvokomponentnu smjesu.

Tablica 4.1. Načini izražavanja koncentracije

	Molna koncentracija		Masena koncentracija
	kapljevina	plin	
smjesa, c	$c = \frac{n}{V}$	$c = \frac{n}{V} = \frac{P}{R \cdot T}$	γ, ρ
komponenta A	$c_A = \frac{n_A}{M_A}$	$c_A = \frac{n_A}{V} = \frac{p_A}{R \cdot T}$	γ_A, ρ_A
komponenta B	$c_B = \frac{n_B}{M_B}$	$c_B = \frac{n_B}{V} = \frac{p_B}{R \cdot T}$	γ_B, ρ_B
udio A	$x_A = \frac{c_A}{c}$	$y_A = \frac{c_A}{c} = \frac{n_A}{n} = \frac{p_A}{P}$	$\omega_A = \frac{\gamma_A}{\gamma}$
udio B	$x_B = \frac{c_B}{c}$	$y_B = \frac{c_B}{c} = \frac{n_B}{n} = \frac{p_B}{P}$	$\omega_B = \frac{\gamma_B}{\gamma}$
	$c = c_A + c_B$		$\gamma = \gamma_A + \gamma_B$
	$1 = x_A + x_B$	$1 = y_A + y_B$	$1 = \omega_A + \omega_B$

Brzine

U višekomponentnom sustavu različite komponente će se kretati različitim brzinama, pri tome se mogu izračunati masena i molna srednja brzina

$$v = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \cdot v_i}{\sum_{i=1}^n \rho_i} = \frac{\sum_{i=1}^n \rho_i \cdot v_i}{\rho} \quad (4.15.)$$

$$V = \frac{\sum_{i=1}^n c_i \cdot v_i}{\sum_{i=1}^n c_i} = \frac{\sum_{i=1}^n c_i \cdot v_i}{c} \quad (4.16.)$$

Gustoća toka tvari

Masena ili molna gustoća toka je vektorska veličina koja označava količinu (masa ili množina) tvari koja se u jediničnom vremenu prenese preko jedinične površine i izražava se u $\text{kgm}^{-2}\text{s}^{-1}$ ili $\text{kmolm}^{-2}\text{s}^{-1}$.

Gustoća toka tvari (fluks tvari) za molekularni mehanizam prijenosa može se općenito pisati:

$$\Phi = \kappa \cdot \frac{\Delta}{y} \quad (4.17.)$$

odnosno:

$$j_A = -D_{AB} \cdot \left(\frac{d\gamma_A}{dz} \right)_{T,p=const.} = \frac{\dot{m}}{A} \quad (4.18.)$$

ili

$$J_A = -D_{AB} \cdot \left(\frac{dc_A}{dz} \right)_{T,p=const.} = \frac{\dot{n}}{A} \quad (4.19.)$$

što predstavlja I Fickov zakon.

Molna gustoća toka tvari u stacionarnim uvjetima proporcionalna je razlici koncentracija i obrnuto proporcionalna udaljenosti, odnosno putu difuzije.

Ovdje su:

- γ_A - masena koncentracija komponente A, kg m^{-3}
- c_A - molna koncentracija komponente A, mol m^{-3}
- D_A - koeficijent difuzivnosti, $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
- y - udaljenost, otpor
- $\frac{dc_A}{dz}$ - koncentracijski gradijent (promjena koncentracije okomito na z)
- A - površina izmjene tvari, m^2

Za dvokomponentnu smjesu, A i B, može se pisati:

$$J_{A,z} = c_A \cdot (v_{A,z} - V_z) \quad (4.20.)$$

Izjednačenjem s Fickovom jednačbom (4.19.) uz (4.10.):

$$c_A \cdot (v_{A,z} - V_z) = -c \cdot D_{AB} \cdot \frac{dy_A}{dz} \quad (4.21.)$$

i preuređenje dobiva se:

$$c_A \cdot v_{A,z} = -c \cdot D_{AB} \cdot \frac{dy_A}{dz} + c_A \cdot V_z \quad (4.22.)$$

korištenjem izraza za brzinu (4.16.):

$$V_z = \frac{1}{c} \cdot (c_A \cdot v_{A,z} + c_B \cdot v_{B,z}) \quad (4.23.)$$

dobiva se izraz za gustoća toka komponente A u odnosu na koordinatu z :

$$c_A \cdot v_{A,z} = -c \cdot D_{AB} \cdot \frac{dy_A}{dz} + y_A \cdot (c_A \cdot v_{A,z} + c_B \cdot v_{B,z}) \quad (4.24.)$$

Ako se sa:

$$N_A = c_A \cdot v_A \quad (4.25.)$$

označi gustoća toka komponente A, dobiva se:

$$N_{A,z} = -c \cdot D_{AB} \cdot \frac{dy_A}{dz} + y_A \cdot (N_{A,z} + N_{B,z}) \quad (4.26.)$$

Dakle, općenito se može pisati u vektorskom obliku:

$$N_A = -c \cdot D_{AB} \cdot \nabla y_A + y_A \cdot (N_A + N_B) \quad (4.27.)$$

Gdje prvi član izraza predstavlja doprinos zbog gradijenta koncentracije, J_A , a drugi član doprinos zbog gibanja mase \rightarrow komponenta A prelazi u masu fluida.

Ovdje je:

$$\nabla \gamma_A = \left(\frac{\partial \gamma_A}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \gamma_A}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial \gamma_A}{\partial z} \right) \quad (4.28.)$$

Analogni se izrazi mogu pisati za masenu gustoću toka:

$$m_A = -\rho \cdot D_{AB} \cdot \nabla \omega_A + \omega_A \cdot (m_A + m_B) \quad (4.29.)$$

$$m_A = \gamma_A \cdot v_A \quad (4.30.)$$

$$m_B = \gamma_B \cdot v_B \quad (4.31.)$$

$$n_A = -D_{AB} \cdot \nabla \gamma_A + \omega_A \cdot (n_A + n_B) \quad (4.32.)$$

Do prijenosa tvari uglavnom dolazi između dvije faze. Na primjer kod destilacije lakše hlapiva komponenta prelazi iz kapljevite faze u paru, a teže hlapiva komponenta iz pare u kapljevinu.

Difuzijski koeficijent

Koeficijent proporcionalnosti u I Fickovom zakonu naziva se koeficijent difuzije. Prema definiciji može se izračunati iz navedenog zakona za difuziju u smjeru osi z :

$$D_{AB} = - \frac{J_{A,z}}{(dc_A / dz)} \quad (4.33.)$$

Difuzijski koeficijent ima istu jedinicu [m^2/s] kao i odgovarajuće veličine vezane uz prijenos količine gibanja i prijenos topline, odnosno kinematička viskoznost, ν i toplinska difuzivnost, a (koeficijent temperaturne vodljivosti).

Difuzijski koeficijent ovisi o temperaturi, tlaku i koncentraciji. Vrijednosti koeficijenta difuzije najveće su za plinove, a zatim slijede kapljevine i čvrsta tijela. Difuzijski se koeficijent može odrediti eksperimentalno, a u nedostatku eksperimentalnih podataka koriste se odgovarajuće korelacijske jednadžbe.

Difuzija u plinovima

Vrijednosti difuzijskog koeficijenta kreću se oko reda veličine $10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. Literatura nudi velik broj korelacija za procjenu difuzijskog koeficijenta dvokomponentnih smjesa. Koncentracija ne utječe na njegove vrijednosti pri atmosferskom tlaku, a pri višim ili nižim tlakovima taj je utjecaj zanemariv. Utjecaj tlaka prilično je složen, no za većinu sustava može se reći da umnožak difuzijskog koeficijenta i ukupnog tlaka, $D \cdot P$, ne ovisi o tlaku do 25 atm. Pri višim tlakovima navedena vrijednost opada. Difuzijski koeficijent raste s porastom temperature. Za višekomponentne smjese potrebno je poznavanje difuzijskih koeficijenata pojedinih komponenti i odgovarajućih molnih udjela, pa se difuzijski koeficijent može procijeniti prema (na primjer difuzija komponente 1 u rokomponentnoj smjesi):

$$D_{1,2,3} = \frac{1 - y_1}{y_2 / D_{12} + y_3 / D_{13}} \quad (4.34.)$$

Difuzija u kapljevinama

Za procjenu koeficijenta difuzije potrebno je znati o kakvom se sustavu radi (elektroliti ili neelektroliti, te razrijeđene ili koncentrirane otopine). Difuzija u kapljevinama javlja se mnogim separacijskim procesima (destilacija, ekstrakcija, apsorpcija). Vrijednosti koeficijent difuzije nalaze se u intervalu od $10^{-9} - 10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$. S porastom temperature raste i vrijednost koeficijenta difuzije. Porastom koncentracije razrijeđene otopine difuzijski koeficijent može rasti ili padati. U otopinama elektrolita pri malim koncentracijama prvo opada a zatim raste s porastom koncentracije. Ukoliko je poznat koeficijent difuzije pri jednoj temperaturi, može se procijeniti njegova vrijednost pri nekoj drugoj temperaturi:

$$\frac{D_{T_1}}{T_{T_2}} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{\eta_{T_2}}{\eta_{T_1}} \quad (4.35.)$$

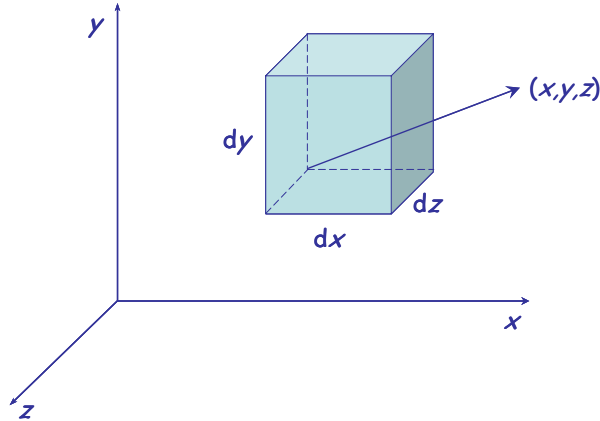
Ovdje su: T - temperatura, K
 D - difuzijski koeficijent, m^2/s
 η - dinamička viskoznost, Pa s

Difuzija kroz porozna čvrsta tijela

Prijenos tvari difuzijom kroz poroznu sredinu (npr. kod sušenja) je složeni proces i često uključuje više mehanizama prijenosa, pa se u ovom slučaju govori o efektivnom difuzijskom koeficijentu. Efektivni difuzijski koeficijent, osim što uključuje različite mehanizme prijenosa tvari, uzima u obzir i heterogenost materijala, pa se za opis procesa može koristiti Fickov zakon. Donja granica vrijednosti difuzijskog koeficijenta iznosi $10^{-13} \text{ m}^2/\text{s}$. Porastom temperature i koncentracije raste i vrijednost difuzijskog koeficijenta. Utjecaj temperature može se opisati jednadžbom Arrheniusova tipa, dok se opis utjecaja koncentracije koriste uglavnom emirijske korelacije. U literaturi se mogu pronaći korelacije koje uključuju oba utjecaja.

4.1.1. Diferencijalna jednadžba prijenosa tvari

Analogno izvedenim diferencijalnim jednadžbama za prijenos količine gibanja i topline, izvest će se diferencijalna jednadžba procesa prijenosa tvari. Promotrimo dio procesnog prostora volumena smjese $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$ kroz koji struji komponenta A (slika 4.3.).



Slika 4.3. Diferencijalni kontrolni volumen

Razlika masenih protoka komponente A:

u smjeru osi x:

$$(v_{A,x} \cdot \rho_A + d(v_{A,x} \cdot \rho_A)) \cdot dy \cdot dz - v_{A,x} \cdot \rho_A \cdot dy \cdot dz = d(v_{A,x} \cdot \rho_A) \cdot dy \cdot dz \quad (4.36.)$$

u smjeru osi y:

$$(v_{A,y} \cdot \rho_A + d(v_{A,y} \cdot \rho_A)) \cdot dx \cdot dz - v_{A,y} \cdot \rho_A \cdot dx \cdot dz = d(v_{A,y} \cdot \rho_A) \cdot dx \cdot dz \quad (4.37.)$$

u smjeru osi z:

$$(v_{A,z} \cdot \rho_A + d(v_{A,z} \cdot \rho_A)) \cdot dx \cdot dy - v_{A,z} \cdot \rho_A \cdot dx \cdot dy = d(v_{A,z} \cdot \rho_A) \cdot dx \cdot dy \quad (4.38.)$$

Brzina akumulacije tvari A u kontrolnom volumenu:

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (4.39.)$$

Obzirom da je (IZLAZ-ULAZ=AKUMULACIJA) može se napisati:

$$d(v_{A,x} \cdot \rho_A) \cdot dy \cdot dz + d(v_{A,y} \cdot \rho_A) \cdot dx \cdot dz + d(v_{A,z} \cdot \rho_A) \cdot dx \cdot dy + \frac{\partial \rho_A}{\partial t} \cdot dx \cdot dy \cdot dz = 0 \quad (4.40.)$$

Ako se jednadžbe podijele s volumenom, i ako se pretpostavi da se radi o infinitezimalno malom volumenu, dobiva se:

$$\frac{\partial(v_{A,x} \cdot \rho_A)}{\partial x} + \frac{\partial(v_{A,y} \cdot \rho_A)}{\partial y} + \frac{\partial(v_{A,z} \cdot \rho_A)}{\partial z} + \frac{\partial \rho_A}{\partial t} = 0 \quad (4.41.)$$

Ukoliko komponenta A nastaje kemijskom reakcijom, potrebno je u jednadžbu ___ uvrstiti i brzinu nastajanja, r_A , $\text{kg/m}^3\text{s}$:

$$r_A \cdot dx \cdot dy \cdot dz \quad (4.42.)$$

Pa jednadžba poprima oblik:

$$\frac{\partial(v_{A,x} \cdot \rho_A)}{\partial x} + \frac{\partial(v_{A,y} \cdot \rho_A)}{\partial y} + \frac{\partial(v_{A,z} \cdot \rho_A)}{\partial z} + \frac{\partial \rho_A}{\partial t} - r_A = 0 \quad (4.43.)$$

Uz:

$$n_A = v_A \cdot \rho_A \quad (4.44.)$$

Dobiva se:

$$\nabla n_A + \frac{\partial \rho_A}{\partial t} - r_A = 0 \quad (4.45.)$$

Ako se radi o dvokomponentnoj smjesi, analogne se jednadžbe pišu i za komponentu B:

$$\frac{\partial(v_{B,x} \cdot \rho_B)}{\partial x} + \frac{\partial(v_{B,y} \cdot \rho_B)}{\partial y} + \frac{\partial(v_{B,z} \cdot \rho_B)}{\partial z} + \frac{\partial \rho_B}{\partial t} - r_B = 0 \quad (4.46.)$$

$$\nabla n_B + \frac{\partial \rho_B}{\partial t} - r_B = 0 \quad (4.47.)$$

Za dvokomponentnu se smjesu onda može pisati za ukupnu gustoću toka tvari:

$$n_A + n_B = \rho_A \cdot v_A + \rho_B \cdot v_B = \rho \cdot v \quad (4.48.)$$

$$\rho_A + \rho_B = \rho \quad (4.49.)$$

te zbog zakona očuvanja mase:

$$r_A = -r_B \quad (4.50.)$$

Konačno se dobiva jednadžba kontinuiteta za smjesu:

$$\nabla(v \cdot \rho) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.51.)$$

Analogne jednadžbe se dobivaju ako se gustoća toka tvari izrazi u molnim jedinicama:

$$\text{Za komponentu A:} \quad \nabla N_A + \frac{\partial c_A}{\partial t} - R_A = 0 \quad (4.52.)$$

$$\text{Za komponentu B:} \quad \nabla N_B + \frac{\partial c_B}{\partial t} - R_B = 0 \quad (4.53.)$$

$$\text{Za smjesu:} \quad \nabla(N_A + N_B) + \frac{\partial(c_A + c_B)}{\partial t} - (R_A + R_B) = 0 \quad (4.54.)$$

Ukupna gustoća toka može se izraziti kao:

$$N_A + N_B = c_A \cdot v_A + c_B \cdot v_B = c \cdot v \quad (4.55.)$$

$$c_A + c_B = c \quad (4.56.)$$

Samo u slučaju kada za jedan mol komponente A koja nestaje, kemijskom reakcijom nastaje 1 mol komponente B vrijedi:

$$R_A = -R_B \quad (4.57.)$$

Jednadžba kontinuiteta u općem obliku:

$$\nabla(c \cdot v) + \frac{\partial c}{\partial t} - (R_A + R_B) = 0 \quad (4.58.)$$

Ako se gustoće toka tvari (molne i masene) izraze pomoću jednadžbi:

$$N_A = -c \cdot D_{AB} \cdot \nabla y_A + c_A \cdot v \quad (4.58.)$$

$$n_A = -\rho \cdot D_{AB} \cdot \nabla \omega_A + \rho_A \cdot v \quad (4.59.)$$

Dobivaju se jednadžbe koje opisuju koncentracijske profile:

$$-\nabla c \cdot D_{AB} \cdot \nabla y_A + \nabla(c_A \cdot v) + \frac{\partial c_A}{\partial t} - R_A = 0 \quad (4.60.)$$

$$-\nabla \rho \cdot D_{AB} \cdot \nabla \omega_A + \nabla(\rho \cdot v) + \frac{\partial \gamma_A}{\partial t} - r_A = 0 \quad (4.61.)$$

Odnosno:

$$-D_{AB} \nabla^2 c_A + v \cdot \nabla c_A + c_A \cdot \nabla v + \frac{\partial c_A}{\partial t} - R_A = 0 \quad (4.62.)$$

$$-D_{AB} \cdot \nabla^2 \rho_A + v \cdot \nabla \rho_A + \rho_A \cdot \nabla v + \frac{\partial \gamma_A}{\partial t} - r_A = 0 \quad (4.63.)$$

Uz odgovarajuća ograničenja jednadžbe se mogu pojednostviti na sljedeće načine:

$$- \rho \text{ i } D_{AB} \text{ su konstantni:} \quad v \cdot \nabla c_A + \frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \cdot \nabla^2 c_A + R_A \quad (4.64.)$$

$$v \cdot \nabla \rho_A + \frac{\partial \rho_A}{\partial t} = D_{AB} \cdot \nabla^2 \rho_A + r_A \quad (4.65.)$$

– nema kemijske reakcije:
$$\mathbf{v} \cdot \nabla c_A + \frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \cdot \nabla^2 c_A \quad (4.66.)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \rho_A + \frac{\partial \rho_A}{\partial t} = D_{AB} \cdot \nabla^2 \rho_A \quad (4.67.)$$

– ako nema strujanja fluida:
$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \cdot \nabla^2 c_A \quad (4.68.)$$

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = D_{AB} \cdot \nabla^2 \rho_A \quad (4.69.)$$

Jednadžbe 4.68. i 4.69. analogne su II Fourierovom zakonu, i predstavljaju II Fickov zakon difuzije.

Daljnje pojednostavljenje dobivenih jednadžbi vezano je uz stacionarne procese: $\frac{\partial c_A}{\partial t} = 0$ i $\frac{\partial \rho_A}{\partial t} = 0$:

– ρ i D_{AB} su konstantni:
$$\mathbf{v} \cdot \nabla c_A = D_{AB} \cdot \nabla^2 c_A + R_A \quad (4.70.)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \rho_A = D_{AB} \cdot \nabla^2 \rho_A + r_A \quad (4.71.)$$

– nema kemijske reakcije:
$$\mathbf{v} \cdot \nabla c_A = D_{AB} \cdot \nabla^2 c_A \quad (4.72.)$$

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \rho_A = D_{AB} \cdot \nabla^2 \rho_A \quad (4.73.)$$

– ako nema strujanja fluida:
$$\nabla^2 c_A = 0 \quad (4.74.)$$

$$\nabla^2 \rho_A = 0 \quad (4.75.)$$

Analička rješenja diferencijalne jednadžbe koja opisuje prijenos tvari dobivaju se ovisno o geometriji i definiranim početnim i graničnim uvjetima. Tako postoje izvedeni izrazi za ploču, cilindar i kuglu, i ono su analogni jednadžbama koje se koriste za prijenos topline.

Početni uvjet: $t = 0$ $c_A = c_{A0}$
 $\rho_A = \rho_{A0}$

Granični uvjeti:

- I. definirana koncentracija na površini: $c_A = c_{A1}$ ili $\rho_A = \rho_{A1}$
- II. definirana gustoća toka: $N_A = N_{A1}$ ili $n_A = n_{A1}$
- III. definirana brzina kemijske reakcije: $N_{A1} = k_1 \cdot c_{A1}$ ili $n_{A1} = k_2 \cdot \rho_{A1}$
- IV. konvekcijski granični uvjet: $N_{A1} = k_c \cdot (c_{A1} - c_{A\infty})$

Ovdje su: k_c - koeficijent prijenosa tvari
 c_{A1} - koncentracija uz površinu
 $c_{A\infty}$ - koncentracija u struji fluida

4.1.2. Prijenos tvari difuzijom u stacionarnim uvjetima

U stacionarnim uvjetima koncentracija u određenoj točki ne mijenja se s vremenom. Promatra se smjesa komponenata A i B koja se giba brzinom v uzduž osi z . Dakle promatra se jednodimenzionalni proces prijenosa tvari bez kemijske reakcije.

Slijedom izvoda danog jednadžbama 4.18. do 4.25. dolazi se do izraza koji se koristi za proračun gustoće toka komponente A u dvokomponentnom sustavu, danog jednadžbom 4.26.

$$N_{A,z} = -c \cdot D_{AB} \cdot \frac{dy_A}{dz} + y_A \cdot (N_{A,z} + N_{B,z}) \quad (4.26.)$$

odnosno uz $y = \frac{c_A}{c}$:

$$N_{A,z} = -D_{AB} \cdot \frac{dc_A}{dz} + \frac{c_A}{c} \cdot (N_{A,z} + N_{B,z}) \quad (4.76.)$$

Izraz se može riješiti ukoliko je poznat odnos između molnih gustoća tokova komponenata A i B.

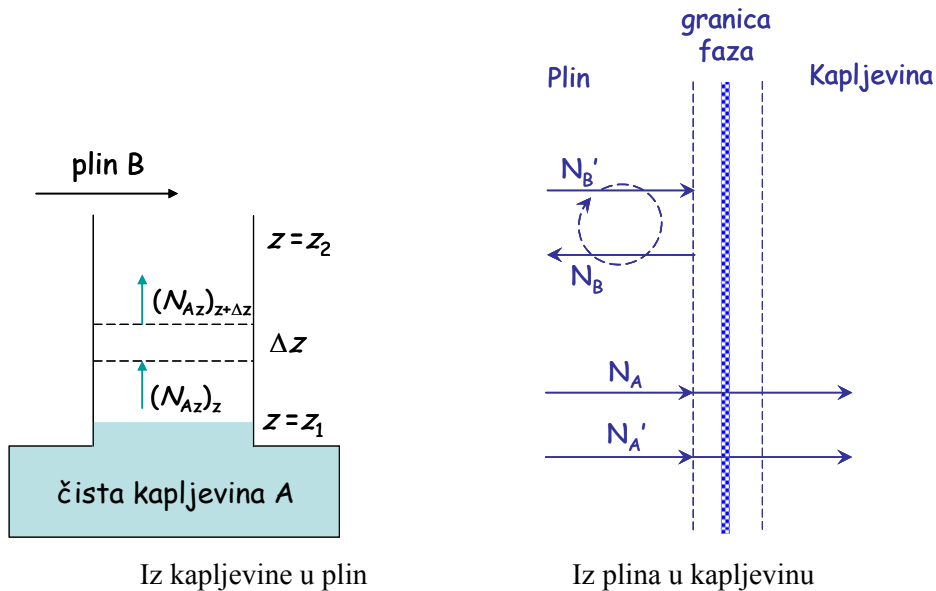
Primjeri stacionarne difuzije su:

- Jednokomponentna difuzija – difuzija komponente A kroz nepokretnu komponentu B
- Pseudostacionarna jednokomponentna difuzija (granica faza se pomiče s vremenom)
- Ekvimolarna protustrujna difuzija

U ovom poglavlju objasniti će se detaljnije difuzija komponente A kroz nepokretnu komponentu B i Ekvimolarna protustrujna difuzija

4.1.2.1. Difuzija komponente A kroz nepokretnu komponentu B

Ovaj fenomen javlja se kod selektivne apsorpcije ili ekstrakcije komponente A iz smjese A i B. (Npr. apsorpcija NH_3 u vodi iz smjese zraka i NH_3). Promatra se gibanje smjese komponenata A i B brzinom v uz granicu faza.



Slika 4.4. Difuzija komponente A iz jedne u drugu fazu

- N_A, N_B - gustoća toka difuzije
 N_A', N_B' - gustoća toka uslijed strujanja

Kroz granicu faza prolazi samo komponenta A. Komponenta B ne prolazi kroz granicu faza već recirkulira unutar svoje prvobitne faze. Otpor prijenosu tvari javlja se neposredno uz granicu faza, a to je difuzijski granični sloj.

Obzirom da se radi o stacionarnom procesu, prijenos tvari opisuje se sljedećim izrazom:

$$N_{A,z} = -c \cdot D_{AB} \cdot \frac{dy_A}{dz} + y_A \cdot (N_{A,z} + N_{B,z}) \quad (4.26.)$$

Budući da je komponenta B inertna:

$$N_{B,z} = 0$$

pa se jednačba reducira do:

$$N_{A,z} = -c \cdot D_{AB} \cdot \frac{dy_A}{dz} + y_A \cdot N_{A,z} \quad (4.77.)$$

Gustoća toka komponente A sada je:

$$N_{A,z} = -\frac{c \cdot D_{AB}}{1 - y_A} \cdot \frac{dy_A}{dz} + y_A \cdot N_{A,z} \quad (4.78.)$$

Uz pretpostavku da difuzijski koeficijent ne ovisi o koncentraciji te da se gustoća toka ne mijenja s duljinom puta difuzije jednadžba se može preurediti:

$$N_{A,z} \int_{z_1}^{z_2} dz = c \cdot D_{A,z} \int_{y_{A1}}^{y_{A2}} -\frac{dy_A}{1 - y_A} \quad (4.79.)$$

Integriranjem gornje jednadžbe za gustoću toka dobiva se:

$$N_{A,z} = \frac{c \cdot D_{AB}}{z_2 - z_1} \cdot \ln \frac{1 - y_{A2}}{1 - y_{A1}} \quad (4.80.)$$

Koncentracija komponente A se mijenja, a koncentracija inertne komponente B, iako ne prolazi kroz granicu faza, također se mijenja budući da se koncentracija komponente A u prvobitnoj smjesi smanjuje.

Ako je $y_{B,lm}$ srednja logaritamska koncentracija komponente B

$$y_{B,lm} = \frac{y_{B2} - y_{B1}}{\ln \left(\frac{y_{B2}}{y_{B1}} \right)} \quad (4.81.)$$

Za slučaj dvokomponentnog sustava može se pisati:

$$y_{B,lm} = \frac{(1 - y_{A2}) - (1 - y_{A1})}{\ln \left(\frac{1 - y_{A2}}{1 - y_{A1}} \right)} = \frac{y_{A1} - y_{A2}}{\ln \left(\frac{1 - y_{A2}}{1 - y_{A1}} \right)} \quad (4.82.)$$

Uvrštenjem jednadžbe 4.82. u jednadžbu 4.80. dobiva se :

$$N_{A,z} = \frac{c \cdot D_{AB}}{z_2 - z_1} \cdot \frac{(y_{A1} - y_{A2})}{y_{B,lm}} \quad (4.83.)$$

Obzirom da je za plinove:

$$c = \frac{n}{V} = \frac{P}{R \cdot T} \quad (4.84.)$$

i

$$y_A = \frac{p_A}{P} \quad (4.85.)$$

pa jednadžba (4.82) poprima sljedeći oblik:

$$N_{A,z} = \frac{P \cdot D_{AB}}{R \cdot T \cdot (z_2 - z_1)} \cdot \frac{(p_{A1} - p_{A2})}{p_{B,lm}} \quad (4.86.)$$

gdje je

P - ukupni tlak smjese

$p_{B,LM}$ - logaritamska srednja vrijednost parcijalnih tlakova inertne komponente na ulazu i izlazu.

$$p_{B,LM} = \frac{p_{B,ulaz} - p_{B,izlaz}}{\ln \frac{p_{B,ulaz}}{p_{B,izlaz}}} \quad (4.87.)$$

Ukoliko plin struji iznad površine sa koje se odvija prijenos tvari (slika 4.5.), iz dobivenih se jednadžbi može procijeniti koeficijent prijenosa tvari. Naime, koeficijent prijenosa tvari može se izraziti preko difuzijskog koeficijenta.

Neka je:

$$z_2 - z_1 = \delta$$

Jednadžba 4.86. prelazi u:

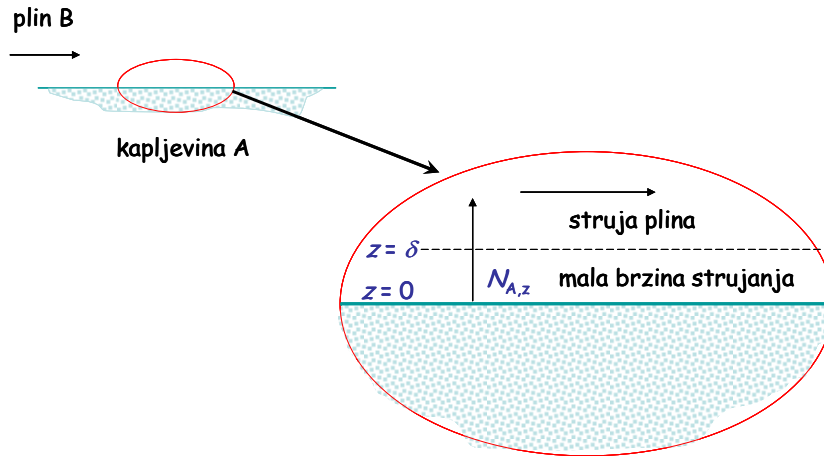
$$N_{A,z} = \frac{P \cdot D_{AB}}{R \cdot T \cdot \delta} \cdot \frac{(p_{A1} - p_{A2})}{p_{B,lm}} \quad (4.88.)$$

Uz konvekcijski granični uvjet (analogno Newtonovom zakonu hlađenja):

$$N_{A,z} = \frac{k_c}{R \cdot T} \cdot (p_{A1} - p_{A2}) \quad (4.89.)$$

Izjednačavanjem jednadžbi 4.88. i 4.89. dobiva se za koeficijent prijenosa tvari:

$$k_c = \frac{P \cdot D_{AB}}{\delta \cdot p_{B,lm}} \quad (4.90.)$$



Slika 4.5. Model tankog sloja za prijenos komponente A u pokretnu struju plina B

4.1.2.2. Ekvimolarna protustrujna difuzija

Ovaj tip prijenosa tvari temelj je proučavanja toplinskih separacijskih procesa kod kojih stalno dolazi do prijenosa tvari kroz granicu faza u oba smjera (npr. destilacija). U uvjetima ekvimolarne difuzije vrijedi da je gustoća toka jedne komponente jednaka je ali suprotnog smjera gustoći toka druge komponente:

$$N_A + N_B = 0 \quad N_A = -N_B$$

Za svaku jedinicu mase komponente A koja prolazi (difundira) kroz graničnu površinu, prolazi difuzijom kroz tu istu površinu jedinica mase komponente B u suprotnom smjeru. Netto gustoća toka tada je jednaka 0. Zbog pojednostavljenja promatra se idealiziran slučaj difuzije. Uz adijabatske uvjete i pod pretpostavkom da su molarne topline isparavanja iste $c_A = c_B = c$, $dc_A = dc_B = 0$, $D_{AB} = D_{BA}$. Ako se krene od općeg izraza (jednadžba (4.52.)):

$$\nabla N_A + \frac{\partial c_A}{\partial t} - R_A = 0 \quad (4.52.)$$

- za stacionarni proces bez kemijske reakcije:

$$\nabla N_A = 0$$

- za jednodimenzionalni prijenos tvari vrijedi:

$$\frac{d}{dz} N_{A,z} = 0$$

- molarna gustoća toka je konstantna na putu prijenosa (jednadžba 4.26.):

$$N_{Az} = -D_{AB} \cdot \frac{dc_A}{dz} + y_A \cdot (N_{A,z} + N_{B,z})$$

Obzirom da su gustoće toka obje komponente jednake ali suprotnog smjera ($N_A = -N_B$), sređivanjem jednadžbe 4.26. dobiva se jednadžba koja opisuje ekvimolarnu protustrujnu difuziju:

$$N_{Az} = -D_{AB} \cdot \frac{dc_A}{dz} \quad (4.91.)$$

Analitičko rješenje se dobiva integriranjem uz definirane granične uvjete:

$$\text{Za: } z = z_1 \quad c_A = c_{A1}$$

Za $z = z_2$ $c_A = c_{A2}$

$$N_{Az} \cdot \int_{z_1}^{z_2} dz = -D_{AB} \cdot \int_{c_{A1}}^{c_{A2}} dc_A \quad (4.92.)$$

$$N_{Az} = \frac{D_{AB}}{(z_2 - z_1)} \cdot (c_{A1} - c_{A2}) \quad (4.93.)$$

Odnosno:

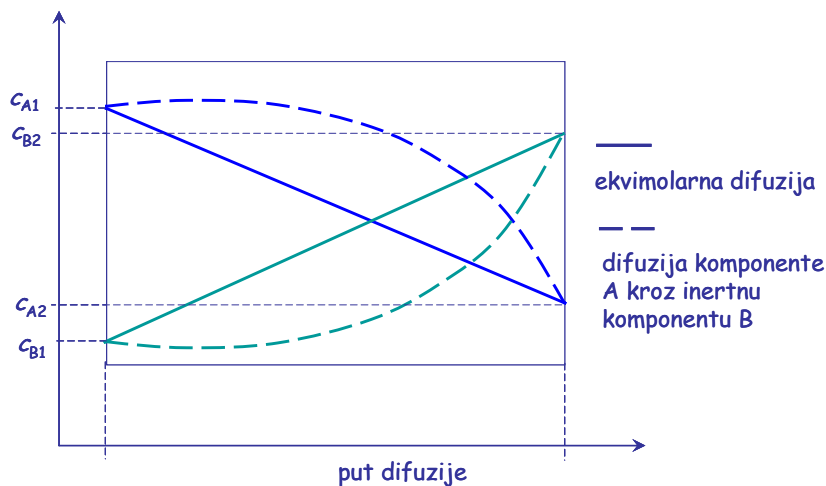
$$N_{Az} = \frac{D_{AB}}{\delta} \cdot (c_{A1} - c_{A2}) \quad (4.94.)$$

Za plinove jednadžba poprima sljedeći oblik:

$$N_{A,z} = \frac{D_{AB}}{R \cdot T \cdot (z_2 - z_1)} \cdot (p_{A1} - p_{A2}) \quad (4.95.)$$

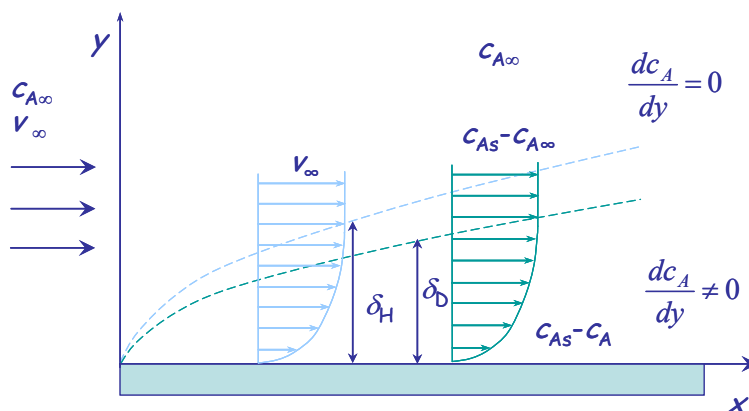
Odnosno:

$$N_{A,z} = \frac{D_{AB}}{R \cdot T \cdot \delta} \cdot (p_{A1} - p_{A2}) \quad (4.96.)$$



Slika 4.6. Koncentracijski profili

Raspodjela koncentracija je linearna, za razliku od difuzije komponente A kroz nepokretnu komponentu B. Komponente A i B difundiraju s istim molarnim brzinama u suprotnom smjeru.



Slika 4.7. Hidrodinamički i koncentracijski granični sloj

Vrijednost Δy na kojoj se uspostavlja koncentracijski gradijent naziva se **difuzijski granični sloj** (δ_D) ili **koncentracijski granični sloj** (δ_C). Izvan difuzijskog graničnog sloja nema koncentracijskog gradijenta, što znači da je koncentracija u masi fluida konstantna i obično se označava sa $c_{A\infty}$.

Difuzijski granični sloj koji se formira neposredno uz granicu faza, predstavlja glavni otpor prijenosu tvari. Granica faza ne predstavlja otpor, ali je važan geometrijski faktor. Ako postoji gibanje fluida uz graničnu površinu, prijenos tvari kroz difuzijski sloj odvija se difuzijom.

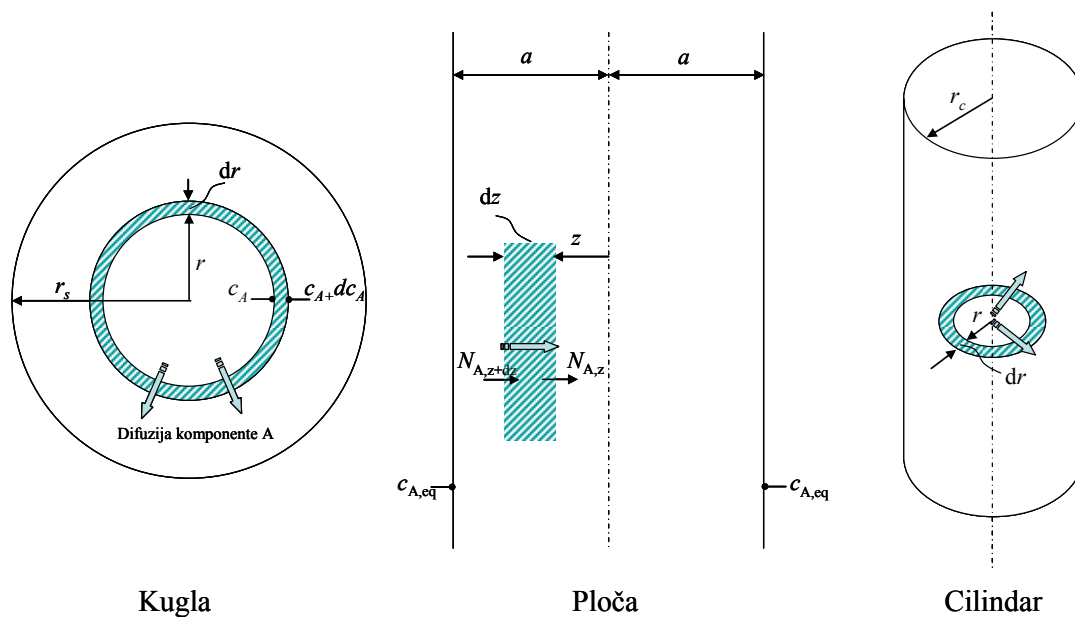
4.1.3. Nestacionarna difuzija

Pri prijenosu tvari u nestacionarnim uvjetima, koncentracija u danju točki mijenja se s vremenom zbog promjene masene gustoće toka. Kontinuirani procesi prijenosa tvari nestacionarni su samo na početku, a s vremenom se uspostavlja stacionarni uvjeti. S druge strane, prijenos tvari u šaržni procesima odvija se u nestacionarnim uvjetima.

Jednadžba kontinuiteta za komponentu A opisuje se izrazom:

$$\nabla N_A + \frac{\partial c_A}{\partial t} - R_A = 0 \quad (4.52.)$$

Analitička su rješenja ograničena na tijela jednostavnih geometrija (slika 4.8.) i graničnih uvjeta, te konstantnu vrijednost koeficijenta difuzije. Pri tome je posebno važno definirati smjer difuzije. Za ploču je potrebno znati da li se difuzija odvija kroz obe plohe ili samo s jedne strane. Za cilindar su dana rješenja za difuziju samo u radijalnom smjeru. U literaturi se mogu pronaći rješenja za cijeli niz različitih graničnih uvjeta.



Slika 4.8. Jednodimenzijaska difuzija kroz kuglu, ploču i cilindar

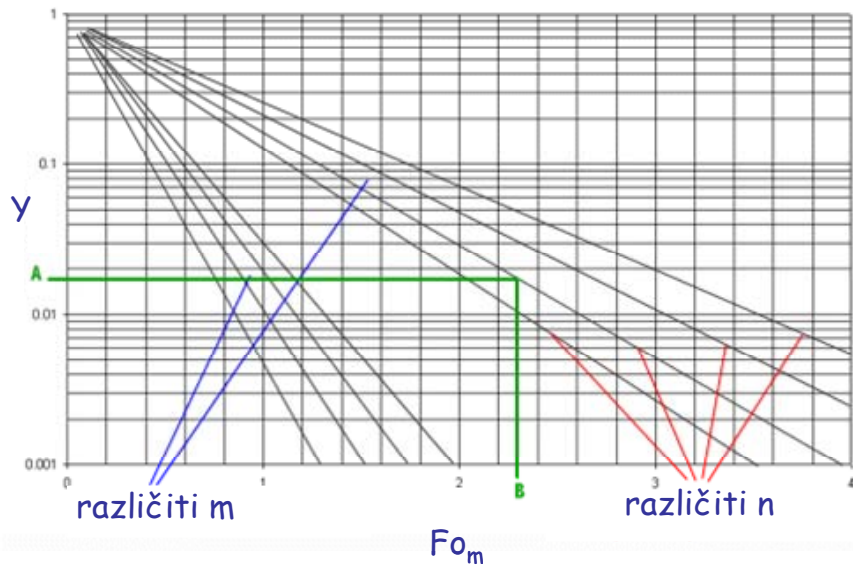
Uz pretpostavku da nema kemijske reakcije ($R_A = 0$) i bez strujanja fluida ($v = 0$), dobiva se II Fickov zakon difuzije:

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} = D_{AB} \cdot \frac{\partial^2 c_A}{\partial z^2} \quad (4.97.)$$

Rješenja se dobivaju u obliku trigonometrijskog niza koji brzo konvergira za duga vremena ili može uključivati funkcije pogreške i integrale koji su pogodni za procjenu za kratka vremena trajanja procesa. Rješenja su analognih oblika kao i rješenja II Fourierovog zakona.

$$Y = f(Bi_M, Fo_M) \quad (4.98.)$$

Gurney-Lurievi dijagrami daju rješenja za ploču, kuglu i dugački valjak → koriste se dijagrami za prijenos topline kondukcijom uz promjene oznaka na osima.



Slika 4.8. Primjer Gurney-Lurievog dijagrama

Pri tome su:

Neostvarena promjena koncentracija:

$$Y = \frac{c_{As} - c_A}{c_{As} - c_{A0}} \quad (4.99.)$$

Masena Fourierova značajka:

$$Fo_m = \frac{D_{AB} \cdot t}{\ell^2} \quad (4.100.)$$

Bezdimenzijski položaj:

$$n = \frac{\ell}{L} \quad (4.101.)$$

Masena Biotova značajka:

$$Bi_m = \frac{k_c \cdot \ell}{D_{AB}} \quad (4.102.)$$

te:

$$m = \frac{1}{Bi_m} = \frac{D_{AB}}{k_c \cdot \ell} \quad (4.103.)$$

4.2. Prijenos tvari konvekcijom

U prethodnom se poglavlju govorilo o prijenosu tvari molekularnom difuzijom izazvanom koncentracijskim gradijentom. U sustavi koji uključuju prijenos tvari između faza (plin, kapljevine) dolazi i do prijenosa tvari konvekcijom.

Konvektivni prijenos tvari uključuje prijenos između površine granice faza i fluida koji struji ili između dva relativno nemješljiva fluida u gibanju. Ovaj način prijenosa ovisi i o transportnim svojstvima i o hidrodinamičkim karakteristikama gibanja fluida. Ovisno o uvjetu zbog kojeg dolazi do strujanja fluida, razlikuje se:

- prijenos tvari prisilnom konvekcijom – gibanje fluida uzrokovano je narinutom silom
- prijenos tvari prirodnom konvekcijom – gibanje fluida uzrokovano je razlikom lokalnih gustoća otopine koje su nastale razlikom lokalnih koncentracija.

Kinetička jednadžba za konvektivni prijenos tvari analogna je Newtonovom zakonu za prijenos topline konvekcijom, i spomenuta je u prethodnom poglavlju uz granični konvektivski uvjet pri rješavanju diferencijalne jednadžbe prijenosa tvari difuzijom:

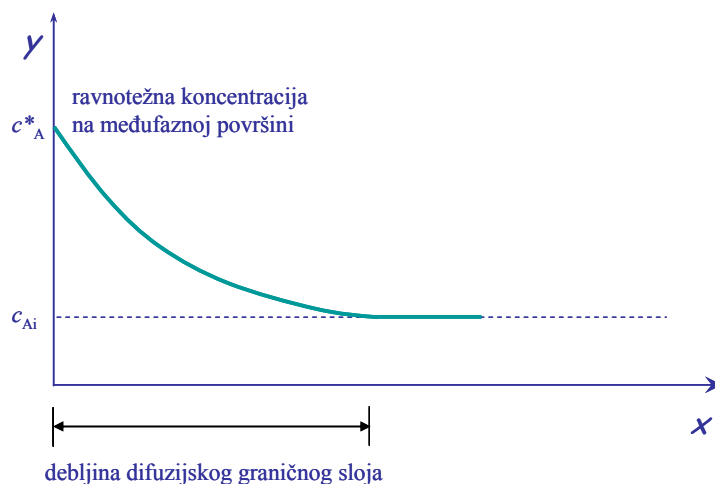
$$N_A = K_C \cdot \Delta c_A \quad (4.104.)$$

gdje je: N_A , gustoća toka tvari,
 K_C koeficijent prijenosa tvari, m s^{-1} .

4.2.1. Koeficijent prijenosa tvari

Analogno teoriji graničnog sloja pri prijenosu topline, *Lewis* i *Whitman* uveli su pojam difuzijskog graničnog sloja kod prijenosa tvari koji predstavlja glavni otpor prijenosu tvari.

Uz samu površinu uz koju struji fluid razvija se tanki sloj unutar kojeg je strujanje laminarno, što znači da će uvijek biti prisutan i molekularni mehanizam prijenosa tvari koji utječe na konvekciju. Kako je već spomenuto u prethodnom poglavlju tijekom procesa prijenosa tvari razvija se koncentracijski (difuzijski) granični sloj, što je i prikazano na slici 4.7.

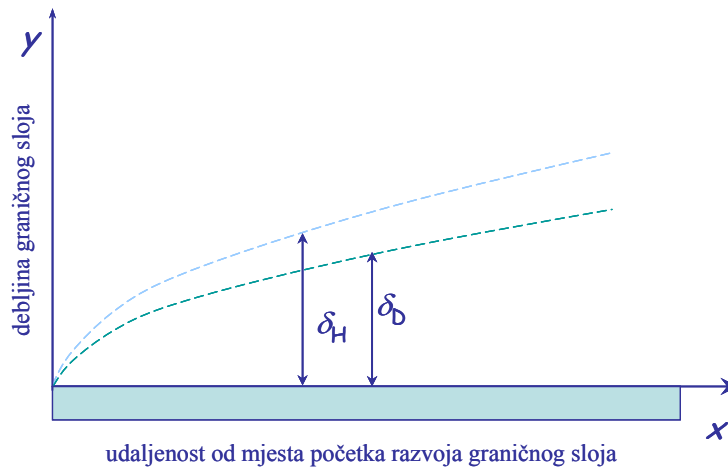


Slika 4.9. Raspodjela koncentracija unutar difuzijskog graničnog sloja

Difuzijski granični sloj postoji unutar hidrodinamičkog graničnog sloja, a njihove debljine se odnose prema izrazu *Polhausena*:

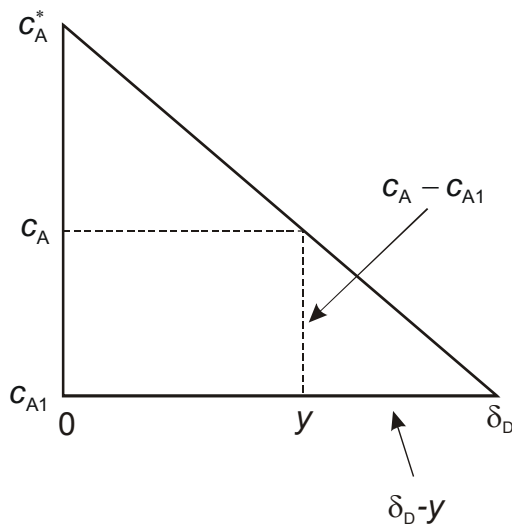
$$\frac{\delta_H}{\delta_D} = Sc^{\frac{1}{3}}$$

$$Sc = \frac{\nu}{D} \quad \text{Schmidtova značajka.}$$



Slika 4.10. Odnos debljina hidrodinamičkog i difuzijskog graničnog sloja

Na udaljenosti $y = \delta_D$, koncentracija se izjednačuje s onom u masi fluida c_{A1} . Raspodjela koncentracija dobiva se analizom slike 4.9. Promjena koncentracije na slici 4.9. može se aproksimirati s trokutom.



Iz sličnosti trokuta:

$$\frac{c_A - c_{A1}}{c_A^* - c_{A1}} = \frac{\delta_D - y}{\delta_D - 0}$$

$$\frac{c_A - c_{A1}}{\delta_D - y} = \frac{c_A^* - c_{A1}}{\delta_D} \cdot D$$

$$D \cdot \frac{\partial c_A}{\partial y} = \frac{D}{\delta_D} \cdot (c_A^* - c_{A1})$$

$$D \cdot \frac{\partial c_A}{\partial y} = K \cdot (c_A^* - c_{A1}) \quad (213)$$

U jednadžbi (213) K je koeficijent prijenosa tvari a predstavlja odnos između difuzijskog koeficijenta i debljine difuzijskog graničnog sloja. Na taj način vidi se da na vrijednost koeficijenta prijenosa tvari, te nadalje i na fluks tvari utječu hidrodinamički uvjeti gibanja. Promjenom hidrodinamičkih uvjeta, koji su izraženi Re -značajkom, mijenja se debljina hidrodinamičkog graničnog sloja, a istovremeno i debljina difuzijskog graničnog sloja, te tako i vrijednost koeficijenta prijenosa tvari.

Koeficijent prijenosa tvari je potrebno definirati za uvjete u kojima se odvija prijenosa tvari, a definiranje ovisi i o tome da li se radi o plinskoj ili kapljevitofazi.

Za ekvimolarnu protustrujnu difuziju:

- za kapljevine $K_c = \frac{D}{\delta_D}$

- za plinove $K_p = \frac{D}{RT\delta_D}$

Za difuziju komponente A kroz inertnu komponentu B:

- za kapljevine $K_c = K_{c,c} \cdot \frac{c_B}{c_{B,LM}} = \frac{D}{\delta_D} \cdot \frac{c_B}{c_{B,LM}}$

- za plinove $K_p = K_{p,p} \cdot \frac{P}{p_{B,LM}} = \frac{D}{RT\delta_D} \cdot \frac{P}{p_{B,LM}}$

Vrijednost koeficijenta prijenosa tvari procjenjuje se na sljedeće načine:

- dimenzijska analiza kombinirana eksperimentalnim podacima
- točna analiza graničnog sloja
- približna analiza graničnog sloja
- primjenom analogija procesa prijenosa količine gibanja, topline i tvari

4.2.1.1. Procjena koeficijenta prijenosa tvari

Bezdimenzijske značajke, odnosno korelacijske jednadžbe, često se koriste za procjenu koeficijenta prijenosa tvari. Kod prijenosa količine gibanja tako veliku ulogu imaju Reynoldsova značajka i koeficijent trenja. Koeficijent prijelaza topline procjenjuje se na temelju korelacijskih izraza $Nu = f(Re, Pr)$. Analogne bezdimenzijske značajke i funkcijske ovisnosti primjenjuju se i za prijenos tvari konvekcijom.

Već su ranije definirane difuzivnosti spomenutih procesa prijenosa:

Kinematička difuzivnost: $\nu = \frac{\mu}{\rho}, m^2s^{-1}$

Temperaturna difuzivnost: $a = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}, m^2s^{-1}$

Masena difuzivnost: D_{AB}, m^2s^{-1}

Obzirom da sve navedene veličine (difuzivnosti) imaju istu jedinicu, očito je da omjer bilo koje dvije mora biti bezdimenzijski broj. Ranije je već definirana Prandtlova značajka, kao omjer kinematičke i temperaturne difuzivnosti:

$$Pr = \frac{\nu}{a} = \frac{c_p \cdot \eta}{\lambda}$$

Analogna bezdimenzijska značajka u procesima prijenosa tvari je Schmidtova značajka, definirana kao omjer kinematičke i masene difuzivnosti:

$$Sc = \frac{\nu}{D_{AB}} = \frac{\eta}{\rho \cdot D_{AB}}$$

Omjer temperaturne i masene difuzivnosti predstavlja Lewisovu značajku, koja je bitna za opis procesa u kojima dolazi do istovremenog procesa prijenosa topline i tvari konvekcijom:

$$Le = \frac{a}{D_{AB}} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_p \cdot D_{AB}}$$

Promotrimo process prijenosa tvari komponente A sa čvrste površine u fluid koji struji uz tu površinu. Pri tome se razvijaju koncentracijski i brzinski gradijenti kao što je prikazano na slici (___). Prijenos tvari između čvrste površine i fluida opisuje se sljedećim izrazom:

$$N_A = k_c \cdot (C_{As} - C_{A\infty})$$

Obzirom da se tvar kroz granični sloj prenosi difuzijskim mehanizmom, može se pisati:

$$N_A = -D_{AB} \cdot \left. \frac{dC_A}{dy} \right|_{y=0}$$

Izjednačavanjem tih dviju jednadžbi dobiva se:

$$k_c \cdot (C_{As} - C_{A\infty}) = -D_{AB} \cdot \left. \frac{d(C_A - C_{As})}{dy} \right|_{y=0}$$

Odnosno, preuređenjem:

$$\frac{k_c}{D_{AB}} = - \left. \frac{d(C_A - C_{As})/dy}{(C_A - C_{A\infty})} \right|_{y=0}$$

Ako pomnožimo obje strane jednadžbe sa karakterističnom duljinom, ℓ , dobiva se sljedeća bezdimenzijska korelacija:

$$\frac{k_c \cdot \ell}{D_{AB}} = - \left. \frac{d(C_A - C_{As})/dy}{(C_{As} - C_{A\infty})/\ell} \right|_{y=0}$$

Desna strana jednadžbe predstavlja omjer koncentracijskog gradijenta uz površinu i ukupnog koncentracijskog gradijenta. Lijeva strana jednadžbe predstavlja omjer otpora prijenosu tvari difuzijom i otpora prijenosa tvari konvekcijom. Navedeni omjer naziva se Sherwoodova značajka, i ona je analogna Nusseltovoj značajki definiranoj u poglavlju prijenos topline.

Primjena dimenzijske analize

Već je ranije spomenuto da se dimenzijska analiza primjenjuje za dobivanje korelacijskih jednadžbi na temelju kojih se procijenjuje vrijednost koeficijenta prijenosa tvari.

Opći oblik bezdimenzijskih korelacija:

- za prisilnu konvekciju $Sh = K \cdot Re^m \cdot Sc^n$
- za prirodnu konvekciju $Sh = K \cdot Gr^m \cdot Sc^n$

Za područje niskih koncentracija, vrijednosti eksponenata odgovaraju eksponentima iz jednadžbi za prijenos topline, ali uz ograničenje da *Reynoldsova* i *Schmidtova* značajka odgovaraju *Reynoldsovoj* i *Prandtlovoj* kod prijenosa topline.

Kod plinova $Sc \approx Pr$.

Kod kapljevina je najčešće $\left(Sc = \frac{\nu}{D} \right) \gg \left(Pr = \frac{\nu}{a} \right)$ jer je $D \ll a$.

Vrijednosti eksponenata ovise o hidrodinamičkim uvjetima i o geometrijskim karakteristikama sustava:

- $m = \frac{1}{3}$ - za laminarnu ulaznu zonu u cijevi
- $m = 0,5$ - optjecanje oko kugle
- $m = 0,8$ - turbulentno strujanje kroz cijev

$$n = \frac{1}{3} \quad - \text{eksponent na Sc-značajci isti je kao i kod prijenosa topline} \left(Pr^{\frac{1}{3}} \right)$$

U prvom dijelu razvoja difuzijskog graničnog sloja, slika strujnica nije konstantna. Strujni tok se razvija te se i koeficijent prijenosa tvari mijenja ovisno o debljini hidrodinamičkog i difuzijskog graničnog sloja. Zbog toga za svaki položaj x (udaljenost od početka razvijanja difuzijskog graničnog sloja) postoji određeni lokalni koeficijent prijenosa tvari $(K_{\text{lok}})_x$. U proračunu se zato uzima srednja vrijednost koeficijenta prijenosa tvari, \bar{K} . Kolika je dužina tog područja razvoja toka ovisi o uvjetima strujanja. Kod laminarnog strujanja je često duža jer se debljina laminarnog graničnog sloja stalno povećava. Kod turbulentnog strujanja, laminarni podsloj je kod visokih vrijednosti Reynoldsove značajke praktički konstantan pa je i koeficijent prijenosa tvari konstantan.

Primjena dimenzijske analize pokazat će se na primjeru prirodne i prisilne konvekcije.

4.2.1.2. Prijenos tvari pri gibanju fluida (prisilna konvekcija)

Ukoliko se prijenos tvari odvija bez kemijske reakcije i u području niskih koncentracija, proučavanja se temelje na zakonitostima prijenosa topline. Dimenzijskom analizom izvedene su analogne bezdimenzijske kriterijalne jednadžbe koje povezuju sljedeće bezdimenzijske značajke:

Scherwoodova značajka

Definira se kao omjer ukupno prenesene količine tvari i količine tvari prenesene difuzijom.

$$Sh = \frac{K \cdot d}{D}$$

Schmidtova značajka

$$Sc = \frac{\nu}{D} = \frac{\eta}{\rho \cdot D}$$

Grashoffova značajka

Predstavlja omjer sile uzgona uzrokovane lokalnom gustoćom i molekularnog trenja.

$$Gr_m = \frac{\beta \cdot g \cdot l^3 \cdot \Delta c}{\nu^2}$$

Graetzova značajka

Graetzova značajka ukazuje na duljinu puta na kojem se odvija prijenos tvari.

$$Gz_m = \frac{D \cdot x}{\nu \cdot d^2}$$

Fourierova značajka

Fourierova značajka kao i kod procesa prijenosa topline predstavlja bezdimenzijsko vrijeme.

$$Fo_m = \frac{D \cdot t}{d^2}$$

Zbog analogije s prijenosom topline, često se u literaturi Sh , Sc i ostale značajke nazivaju *Nusselt maseni* ($Nu_M = Sh$), odnosno *Prandtl maseni* ($Pr_M = Sc$).

Promotrimo prijenos tvari sa stjenki cijevi u fluid koji struji kroz cijev. Do prijenosa tvari dolazi zbog razlike u koncentracijama, odnosno zbog postojanja pokretačke sile $c_{As} - c_A$. U tablici su dane veličine bitne za process (geometrijske karakteristike, svojstva fluida, prijenosna svojstva).

Veličina	Jedinica	Dimenzija
Promjer cijevi, d	m	L
Gustoća fluida, ρ	kgm ⁻³	M L ⁻³
Viskoznost fluida, η	Pa s	M L T ⁻¹
Brzina strujanja fluida, v	m s ⁻¹	L T ⁻¹
Koeficijent difuzije, D_{AB}	m ² s	L ² T ⁻¹
Koeficijent prijenosa tvari, k_c	ms ⁻¹	L T ⁻¹

Prema Buckinghamovom teoremu broj potrebnih π grupa mora biti jednak razlici broja veličina i broja osnovnih dimenzija. U ovom slučaju je potrebno ($6 - 3 = 3$) definirati tri bezdimenzijske grupe.

Formira se matrica 3 x 3 na sljedeći način:

	ρ	d	D_{AB}	k_c	v	η
M	1	0	0	0	0	1
L	-3	1	2	1	1	-1
T	0	0	-1	-1	-1	-1

Obzirom da osnovna matrica mora biti jedinična matrica, provodi se linearna transformacija i to u dva koraka.

$$Z_1 = M$$

$$Z_2 = 3 \cdot M + L$$

$$Z_3 = -T$$

	ρ	d	D_{AB}	k_c	v	η
Z1	1	0	0	0	0	1
Z2	0	1	2	1	1	2
Z3	0	0	1	1	1	1

U sljedećem koraku dobiva se jedinična matrica:

$$Z_1' = Z_1$$

$$Z_2' = Z_2 - 2 \cdot Z_3$$

$$Z_3' = Z_3$$

	ρ	d	D_{AB}	k_c	v	η
Z1'	1	0	0	0	0	1
Z2'	0	1	0	-1	-1	0
Z3'	0	0	1	1	1	1

Sada se formiraju tri π grupe:

$$\pi_1 = \frac{k_c}{\rho^0 \cdot d^{-1} D_{AB}^1} = \frac{k_c \cdot d}{D_{AB}} = Sh$$

$$\pi_2 = \frac{v}{\rho^0 \cdot d^{-1} D_{AB}^1} = \frac{d \cdot v}{D_{AB}}$$

$$\pi_3 = \frac{\eta}{\rho^1 \cdot d^0 \cdot D_{AB}^1} = \frac{\eta}{\rho \cdot D_{AB}} = Sc$$

Ako sada podijelimo π_2 sa π_3 , dobiva se:

$$\frac{\pi_2}{\pi_3} = \frac{\frac{d \cdot v}{D_{AB}}}{\frac{\eta}{\rho \cdot D_{AB}}} = \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\eta} = Re$$

Na temelju dimenzijske analize procesa prijenosa tvari prisilnom konvekcijom u cijevi kružnog presjeka dobiva se sljedeća korelacijska jednačnja:

$$Sh = f(Re, Sc)$$

Što je analogno korelacijskoj jednačnji za prijenos topline:

$$Nu = f(Re, Pr)$$

Za prijenos tvari sa stijenke u fluid koji se turbulentno giba ($2 \cdot 10^3 < Re < 10^5$, $Sc > 0,7$) vrijedi sljedeća korelacija:

$$Sh = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Sc^{0,33}$$

koja izuzetno podsjeća na *Dittus Boelterovu jednačnju* za prijenos topline ($Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{0,33}$).

Primjenom navedene korelacijske jednačnje omogućava se procjena koeficijenta prijenosa tvari $\left(K = \frac{Sh \cdot D}{d}\right)$ na temelju poznatih hidrodinamičkih uvjeta uz uvjet geometrijske, dinamičke i termičke sličnosti sustava.

4.2.1.3. Prijenos tvari prirodnom konvekcijom

Do prijenosa tvari prirodnom konvekcijom dolazi zbog razlika u gustoći fluida izazvanih razlikama temperature ili znatnim razlikama u koncentraciji.

Promotrimo slučaj u kojem dolazi do prijenosa tvari prirodnom konvekcijom sa vertikalne plohe u fluid. Na način opisan u prethodnom poglavlju dobivaju se tri bezdimenzijske π grupe.

$$\pi_1 = \frac{k_c \cdot \ell}{D_{AB}} = Sh$$

$$\pi_2 = \frac{\rho \cdot D_{AB}}{\eta} = \frac{1}{Sc}$$

$$\pi_3 = \frac{\ell^3 \cdot g \cdot \Delta\rho_A}{\eta \cdot D_{AB}}$$

Množenjem bezdimenzijskih grupa π_2 i π_3 , dobiva se Grashofov broj analogan bezdimenzijskoj značajci dobivenoj za prijenos topline prirodnom konvekcijom:

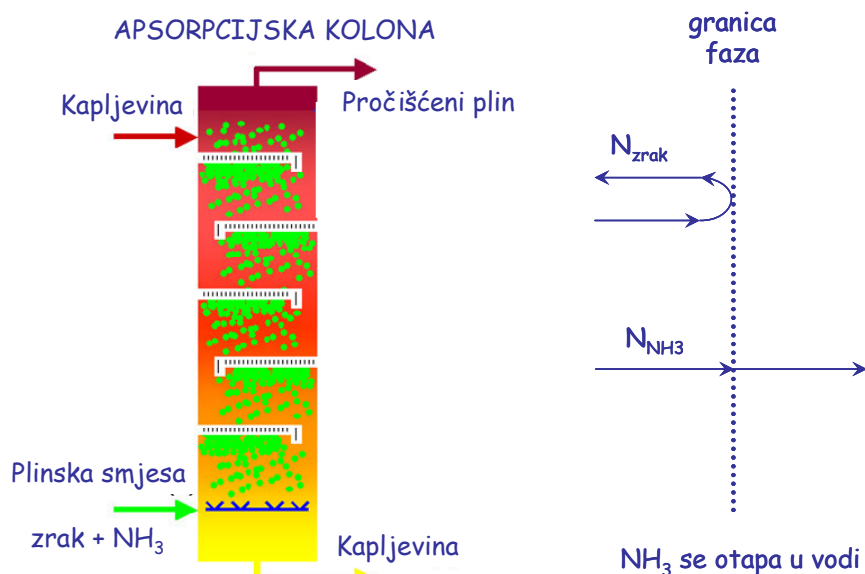
$$\pi_2 \cdot \pi_3 = \left(\frac{\rho \cdot D_{AB}}{\eta} \right) \left(\frac{\ell^3 \cdot g \cdot \Delta \cdot \rho_A}{\eta \cdot D_{AB}} \right) = \frac{\ell^3 \cdot \rho \cdot g \cdot \Delta \rho_A}{\eta^2} = Gr_{AB}$$

Dakle, na temelju dimenzijske analize dobiva se sljedeća korelacijska jednadžba za procjenu koeficijenta prijenosa tvari prirodnom konvekcijom:

$$Sh = f(Gr_{AB}, Sc)$$

4.2.2. Međufazni prijenos tvari

Obzirom da su procesi prijenosa tvari osnova toplinskih separacijskih procesa, potrebno se ovdje osvrnuti i na prijenos tvari između dva nemiješljiva fluida. Neka je komponenta A topljiva u oba fluida, a na početku se nalazi u fluidu 1. Dovođenjem dva fluida u kontakt, dolazi do prijenosa tvari iz fluida 1 u fluid 2 sve do postizanja ravnoteže. Do međufaznog prijenosa tvari dolazi na primjer kod apsorpcije (slika 4.11.) i ekstrakcije.



Slika 4.11. Apsorpcija amonijaka iz smjese sa zrakom pomoću vode

U slučajevima kada se može pretpostaviti da su plin i kapljevina idealni ravnoteža se opisuje jednostavnim izrazima.

Ako je kapljevina idealna, primjenjuje se Raoultov zakon:

$$p_{A,i} = x_A \cdot p_A^0$$

Ukoliko je plinska smjesa idealna, može se koristiti Daltonov zakon:

$$p_{A,i} = y_A \cdot P$$

U slučaju da se obje faze ponašaju kao idealne, kombinacijom gornjih jednadžbi dobiva se:

$$y_A = x_A \cdot \frac{p_A^0}{P}$$

Za razrijeđene otopine vrijedi Henryjev zakon:

$$p_{A,i} = H \cdot c_{A,i}$$

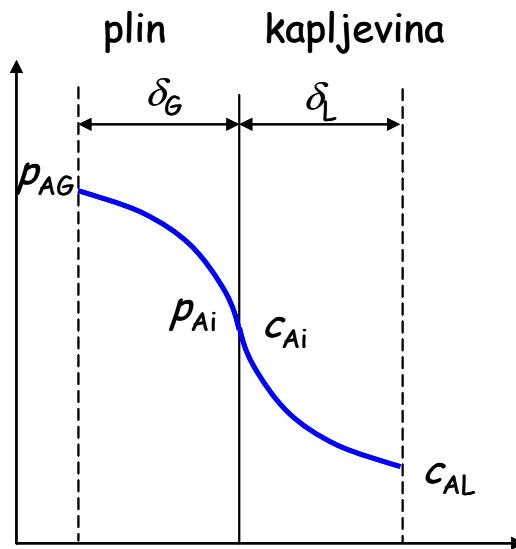
Za dvije nemiješljive kapljevine ravnoteža se može opisati sličnim izrazom:

$$c_{A,1} = K \cdot c_{A,2}$$

Ovdje su:

p_{Ai} :	ravnotežni parcijalni tlak komponente A u plinskoj smjesi
x_A :	molni udio komponente A u kapljevine
y_A :	molni udio komponente A u plinu
p_A^0 :	tlak para čiste komponente
P :	ukupni tlak
H :	Henryjeva konstanta
c_{Ai} :	ravnotežna koncentracija komponente A u kapljevine
K :	koeficijent raspodjele

Kada se prijenos tvari odvija između dvije faze potrebno je uzeti u obzir otpore prijenosu tvari obje faze. S obje strane granice faza razvijaju se koncentracijski granični slojevi. Obzirom da se radi o različitim fazama, otpori neće biti jednaki.



Slika 4.12. Koncentracijski gradijenti

Prema teoriji dva otpora, koji se odnose na dvije faze u kontaktu, međufazni prijenos tvari odvija se u tri stupnja:

- prijenos tvari iz mase jedne faze do granice faza
- prijenos tvari kroz granicu faza
- prijenos tvari sa granice faza u masu druge faze

Brzina prijenosa tvari kontrolirana je brzinama difuzije kroz granične slojeve s obje strane granice faza za koju se pretpostavlja da ne pruža nikakav otpor. Pri tome je p_{Ai} u ravnoteži sa c_{Ai} .

Brzine prijenosa tvari sa obje strane granice faza dane su sljedećim jednadžbama:

$$N_{A,z} = k_G \cdot (p_{AG} - p_{Ai})$$

$$N_{A,z} = k_L \cdot (c_{Ai} - c_{AL})$$

Ovdje su k_G i k_L lokalni koeficijenti prijenosa tvari.

$(p_{AG} - p_{Ai})$ pokretačka sila potrebna da komponenta A iz mase plina dođe do granice faza

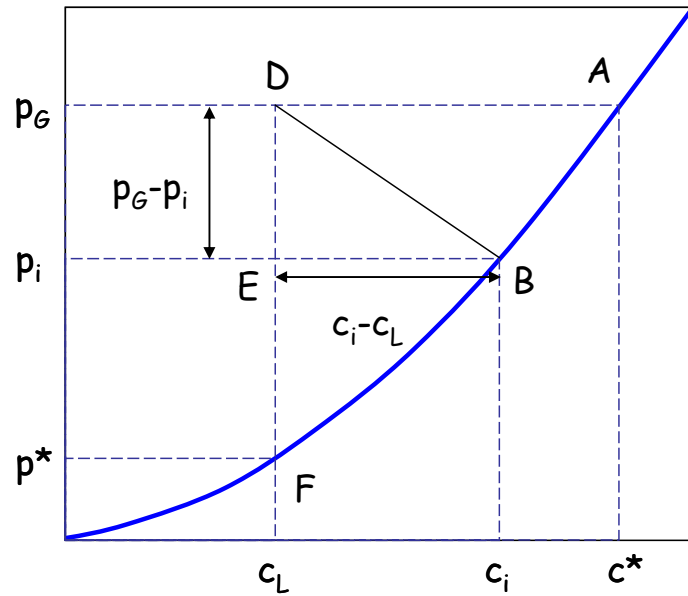
$(c_{Ai} - c_{AL})$ pokretačka sila potrebna da komponenta A od granice faza prijeđe u masu kapljevine

U stacionarnim uvjetima gustoća toka u jednoj fazi mora biti jednaka gustoći toka u drugoj fazi:

$$N_{A,z} = k_G \cdot (p_{AG} - p_{Ai}) = -k_L \cdot (c_{AL} - c_{Ai})$$

Za direktno mjerenje k_G i k_L potrebno je poznavanje koncentracija na granici faza. Obzirom da su one nepoznate, izraz za gustoću toka daje korištenjem ukupnih koeficijenata prijenosa tvari, K_L i K_G , za obje faze u kontaktu.

$$N_{A,z} = K_G \cdot (p_{AG} - p_A^*) = K_L \cdot (c_A^* - c_{AL})$$



Slika 4.13. Odnos pokretačkih sila procesa prijenosa tvari

Na slici 4.13. prikazane su odgovarajuće pokretačke sile, lokalne i ukupne za obje faze. Na temelju toga mogu se odrediti omjeri otpora u svakoj fazi i ukupnog otpora:

$$\frac{\text{otpor u plinskoj fazi}}{\text{ukupni otpor}} = \frac{\Delta p_A}{\Delta p_{A,uk}} = \frac{\frac{1}{k_G}}{\frac{1}{K_G}}$$

$$\frac{\text{otpor u kapljevitoj fazi}}{\text{ukupni otpor}} = \frac{\Delta c_A}{\Delta c_{A,uk}} = \frac{\frac{1}{k_L}}{\frac{1}{K_L}}$$

Obzirom da su koncentracije na granici faza ravnotežne, može se primijeniti Henryjev zakon:

$$p_{A,i} = H \cdot c_{A,i}$$

Uvrštenjem gornjeg izraza u izraz za gustoću toka dolazi se do jednadžbi koje povezuju lokalne i ukupne koeficijente prijenosa tvari.

$$K_G \cdot (p_{AG} - p_A^*) = K_L \cdot (c_A^* - c_{AL}) = k_L \cdot (c_{Ai} - c_{AL}) = k_G \cdot (p_{AG} - p_{Ai})$$

$$\frac{1}{K_G} = \frac{1}{k_G} + \frac{H}{k_L}$$

$$\frac{1}{K_L} = \frac{1}{H \cdot k_G} + \frac{1}{k_L}$$

Vrijednosti pojedinačnih otpora prijenosu tvari ovise o topljivosti plinske komponente u kapljevini. U slučaju dobro topljivih plinova H je mali broj, pa je lokalni koeficijent prijenosa u plinskoj fazi jednak ukupnom a glavni se otpor prijenosu nalazi na strani plina. S druge strane za slabo topljive plinove, H je velik broj pa se otpor na strani plina može zanemariti.

U većini slučajeva potrebno je uzeti u obzir oba otpora.

5. ANALOGIJA PRIJENOSA KOLIČINE GIBANJA, KOLIČINE TOPLINE I KOLIČINE TVARI

U kolegiju *Prijenos tvari i energije* uglavnom se proučavaju fenomeni prijenosa u tekućinama koje se gibaju laminarno ili turbulentno. Iz teorije o prijenosu količine gibanja zna se da je, bez obzira na stupanj turbulencije (visoki Re), tik uz stijenku uvijek prisutna i molekularna gustoća toka (*Von Karman*).

Dakle, uvijek su prisutni i molekularni i vrtložni mehanizmi prijenosa količine gibanja, a to je slučaj i kod prijenosa topline i tvari. Budući da nije moguće utvrditi koliki je udio u prijenosu jednim ili drugim mehanizmom, pri proučavanju gustoće toka koriste se empirijski (eksperimentalno utvrđeni) koeficijenti proporcionalnosti tj. koeficijenti prijenosa (transportni koeficijenti). Često se u dosadašnjim razmatranjima ukazivalo na sličnosti između prijenosa količine gibanja i topline. U svim slučajevima analitički izrazi slijede osnovnu zakonitost što je navedeno već na početku poglavlja 3:

$$\Phi = \kappa \cdot \frac{\Delta}{y} = \text{transportni koeficijent} \cdot \frac{\text{pokretačka sila}}{\text{otpor}}$$

Molekularni mehanizam

Moguće je izvesti egzaktne analitičke izraze.

- fluks količine gibanja $\tau = -v \cdot \frac{d(v\rho)}{dy}$
- fluks količine topline $q = -\lambda \cdot \frac{dT}{dy} = -a \cdot \frac{d(\rho c_p T)}{dy}$
- fluks količine tvari $N_A = -D \cdot \frac{dc_A}{dy}$

Vrtložni mehanizam

Kod vrtložnog mehanizma ta zakonitost također postoji, međutim otpor prijenosu je ugrađen u vrijednost transportnog koeficijenta u vidu utjecaja okoline, odnosno hidrodinamičkih uvjeta koji utječu na debljinu graničnog sloja koji predstavlja glavni otpor prijenosu. Ta se općenita zakonitost može pisati u obliku:

$$\Phi = \kappa' \cdot \Delta$$

pri čemu κ' u svojoj vrijednosti obuhvaća i fizikalna svojstva tvari i utjecaj uvjeta strujanja.

- fluks količine gibanja $\tau = f \cdot \frac{\bar{v}^2 \rho}{2}$
- fluks količine topline $q = \alpha \cdot \Delta T$
- fluks količine tvari $N_A = K \cdot \Delta c_A$

Postavlja se pitanje, s obzirom na analogne zakonitosti, da li se poznavanjem vrijednosti jednog transportnog koeficijenta mogu procijeniti vrijednosti drugih transportnih koeficijenata.

Za izvođenje analogija između prijenosa količine gibanja, topline i tvari moraju biti zadovoljeni sljedeći uvjeti u promatranom sustavu:

- Fizikalna svojstva su konstantna
- Ne dolazi do kemijske reakcije
- Nema prijenosa topline zračenjem
- Prijenos tvari na utječe na gradijent brzina

5.1. Reynoldsova analogija

Reynolds (1874.) je proučavao mogućnost izračunavanja koeficijenta prijelaza topline na temelju poznavanja faktora trenja. Reynolds je utvrdio da prilikom prijenosa količine gibanja ili topline između fluida i čvrste stjenke dva procesa doprinose procesu prijenosa:

- Prirodna unutrašnja difuzija fluida u mirovanju
- Vrtlozi izazvani vidljivim gibanjem koje uzumješava fluid i kontinuirano dovodi nove čestice u dodir sa površinom

Za prvu je pojavu uočio da ovisi o prirodi fluida, a druga je funkcija brzine fluida koji struji uz površinu.

Princip *Reynoldsove analogije* temelji se na proporcionalnosti zbivanja neposredno uz stijenku i u masi fluida.

Gustoća toplinskog toka sa fluida na stjenku (ostvarena):

$$\alpha \cdot (T_f - T_s)$$

Gustoća toka količine gibanja (ostvarena):

$$\tau = f \cdot \frac{\bar{v}^2 \rho}{2}$$

f predstavlja Fanningov faktor trenja i odnosi se s faktorom trenja: $f = \frac{\xi}{4}$

Raspoloživa količina topline fluida (maksimalno moguća toplina koju fluid može predati stijenci)

$$q = \rho \cdot \bar{v} \cdot c_p \cdot (T_s - T_f)$$

Raspoloživa količina gibanja (maksimalno moguća – kinetička energija izražena po jedinici volumena fluida):

$$\bar{v}^2 \rho$$

Pretpostavlja da je omjer ostvarene gustoće toka topline uz stijenku i raspoložive gustoće toka topline jednak omjeru ostvarene gustoće toka količine gibanja i raspoložive gustoće toka količine gibanja.

$$\frac{\alpha \cdot (T_s - T_f)}{\rho \cdot \bar{v} \cdot c_p \cdot (T_s - T_f)} = \frac{f \cdot \bar{v}^2 \rho}{\bar{v}^2 \rho}$$

$$\frac{\alpha}{\rho \cdot \bar{v} \cdot c_p} = \frac{f}{2} = St$$

Ovdje je:

$$St = \frac{Nu}{Re \cdot Pr} = \frac{\alpha \cdot \Delta T}{\rho \cdot \bar{v} \cdot c_p \cdot \Delta T} \quad - \text{Stantonova značajka}$$

Analogija se također može primjeniti i na prijenos tvari i količine gibanja uz pretpostavku da je omjer ostvarene gustoće toka tvari uz stijenku i raspoložive gustoće toka tvari jednak omjeru ostvarene gustoće toka količine gibanja i raspoložive gustoće toka količine gibanja:

$$\frac{K \cdot (c_{A1} - c_{A2})}{\bar{v} \cdot (c_{A1} - c_{A2})} = \frac{f \cdot \bar{v}^2 \rho}{\bar{v}^2 \rho}$$

$$\frac{K}{\bar{v}} = \frac{f}{2} = St' = St_M$$

Ovdje je:

$$St' = St_M = \frac{Sh}{Re \cdot Sc} \quad - \text{maseni Stantonov broj}$$

Reynoldsova analogija dakle glasi:

$$St = St' = \frac{f}{2}$$

ili cjelovitije:

$$\frac{\alpha}{\rho \cdot \bar{v} \cdot c_p} = \frac{K}{\bar{v}} = \frac{\tau}{\rho \cdot \bar{v}^2}$$

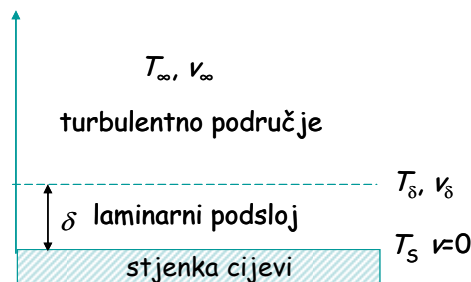
Nedostaci (ograničenja) Reynoldsove analogije:

Pretpostavlja da su vrijednosti $Pr=1$, $Sc=1$ što znači da su debljine hidrodinamičkog, toplinskog i difuzijskog graničnog sloja jednake, a to je slučaj samo kod plinova. Na taj način ne uzima u obzir udio molekularnog mehanizma prijenosa (unutar graničnog sloja) i vrtložnog mehanizma prijenosa.

Ova analogija je primjenjiva samo za slučajeve kad nema otpora oblika. Područje primjenjivosti je ograničeno na tok između paralelnih površina ili u cijevi.

5.2. Prandtl-Taylorova analogija

Jedan od nedostataka Reynolds-ove analogije je da su za fluide kojima je $Pr \neq 1$ zanemareni molekularni koeficijenti toplinske difuzivnosti i kinematičke viskoznosti. To obično zadovoljava u turbulentnom području u cijevi. Međutim laminarni podsloj znatno utječe na prijenos topline, gdje vrtložni koeficijenti teže u nulu, pa se molekularni koeficijenti ne mogu zanemariti. Za dobivanje jedinstvene jednadžbe za ukupne otpore Prandtl i Taylor povezuju jednadžbu kondukcije u laminarnom podsloju i Reynolds-ovu analogiju za turbulentni sloj.



Slika 5.1. Prandtl-Taylorov model

Analogija pretpostavlja da se u prijelaznom i turbulentnom području prijenos odvija vrtložnim mehanizmom, a u laminarnom području molekularnim mehanizmom, dakle uključuje i razliku debljine graničnog sloja ovisno o režimu strujanja ($Pr \neq 1$).

Analogija se temelji na Reynoldsovoj analogiji, a pri izvođenju se uzima u obzir univerzalna raspodjela brzina.

$$St = \frac{\frac{f}{2}}{1 + 5 \cdot \sqrt{\frac{f}{2}} \cdot (Pr - 1)}$$

Može se uočiti da za slučaj kada je $Pr=1$, analogija prelazi u Reynolds-ovu analogiju.

Primjenom analogije na proces prijenosa tvari korištenjem jednadžbe difuzije za laminarni podsloj i Reynolds-ove analogije za turbulentni sloj:

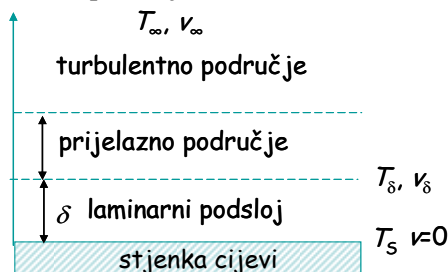
$$St' = \frac{K}{\bar{v}} = \frac{\frac{f}{2}}{1 + 5 \cdot \sqrt{\frac{f}{2}} \cdot (Sc - 1)}$$

$$Sh = \frac{\frac{f}{2} \cdot Re \cdot Sc}{1 + 5 \cdot \sqrt{\frac{f}{2}} \cdot (Sc - 1)}$$

Također, za vrijednost $Sc = 1$ dobiva se Reynolds-ova analogija.

5.3. Von-Karmanova analogija

Glavno poboljšanje Prandtl-Taylor-ove analogije uveo je Von Karman koji je smatrao da se otpori prijenosu topline sastoje od tri dijela (laminarni podsloj, prijelazno područje i turbulentni sloj), kako je prikazano na slici 5.2. Dakle, Von Karman uzima u obzir kompletno područje te univerzalnu raspodjelu brzina. Napisane su jednadžbe za laminarni podsloj, gdje se utjecaj toplinske difuzivnosti i kinematičke viskoznosti uzima u obzir, ali su zanemareni utjecaji turbulencije. U analizi prijelaznog područja uzeti su u obzir i molekularni i vrtložni mehanizmi prijenosa, te je na kraju primjenjena Reynolds-ova analogija za turbulentno područje.



Slika 5.2. Von Karmanov model

$$St = \frac{\frac{f}{2}}{1 + 5 \cdot \sqrt{\frac{f}{2}} \cdot \left\{ (Pr-1) + \ln \left[1 + \frac{5}{6} \cdot (Pr-1) \right] \right\}} \quad (150)$$

Kao i kod Prandtl-Taylorove analogije za $Pr=1$, izraz se reducira na Reynolds-ovu analogiju.

Za prijenos tvari vrijedi:

$$\frac{K}{\bar{v}} = \frac{\frac{f}{2}}{1 + 5 \cdot \sqrt{\frac{f}{2}} \cdot \left\{ (Sc - 1) + \ln \left[\frac{(1 + 5 \cdot Sc)}{6} \right] \right\}}$$

$$Sh = \frac{\frac{f}{2} \cdot Re \cdot Sc}{1 + 5 \cdot \sqrt{\frac{f}{2}} \cdot \left\{ (Sc - 1) + \ln \left[\frac{(1 + 5 \cdot Sc)}{6} \right] \right\}}$$

Za vrijednost $Sc = 1$ dobiva se Reynoldsova analogija.

5.4. Chilton-Colburnova analogija

Chilton i Colburn modificiraju Reynolds-ovu analogiju, uzimajući u obzir debljine hidrodinamičkog i toplinskog graničnog sloja. Ova analogija daje egzaktna rješenja za laminarni granični sloj. Na jednostavan način se korigira Reynoldsova analogija množenjem lijeve strane s $Pr^{\frac{2}{3}}$, odnosno $Sc^{\frac{2}{3}}$. Vrlo se često koristi u inženjerskoj praksi. Uvodi tzv. *j-faktor* (j_H i j_D) koji predstavlja faktor prijenosa topline (tvari).

$$St \cdot Pr^{\frac{2}{3}} = j_H = \frac{f}{2}$$

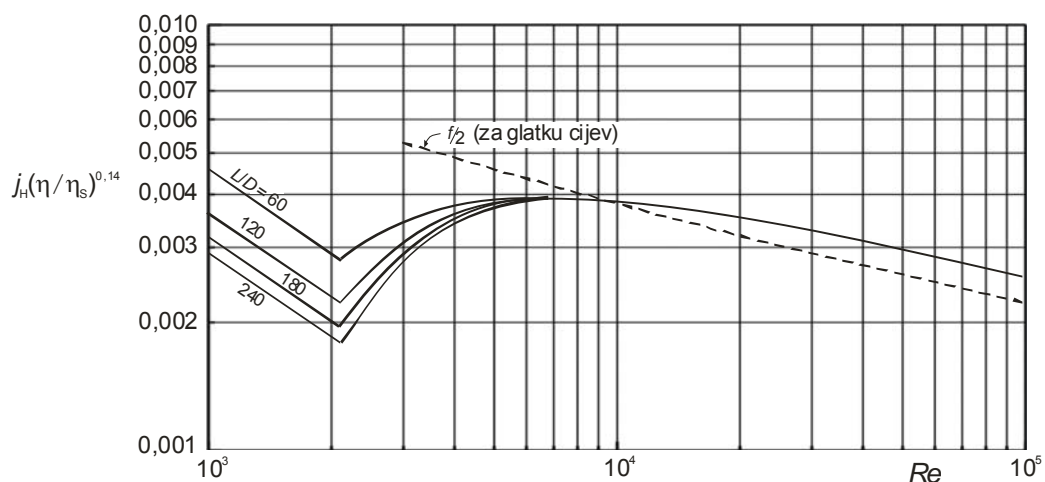
odnosno:

$$\frac{Nu}{Re \cdot Pr} \cdot Pr^{\frac{2}{3}} = j_H$$

Za primjer ravne cijevi eksperimentalno je dobiveno: $j_H = 0,023 \cdot Re^{-0,2}$.

Eksperimentalno je također utvrđeno da se utvrđena zakonitost podudara s ovisnosti faktora trenja o Re -značajci (Moodyjev dijagram) što se vidi na slici 7.1. Ovisnost j_H o Re potrebno je korigirati s

$\left(\frac{\eta_f}{\eta_s} \right)^{0,14}$ u slučajevima kada se radi o velikim razlikama u viskoznosti fluida uz stjenku i viskoznosti u masi fluida.



Slika 5.3. Ovisnost j_H o Re -značajci

Sada se može pisati:

$$St \cdot Pr^{\frac{2}{3}} = j_H = \frac{f}{2} = \frac{\xi}{8} = 0,023 \cdot Re^{-0,2}$$

$$\frac{Nu}{Re \cdot Pr} \cdot Pr^{\frac{2}{3}} = 0,023 \cdot Re^{-0,2}$$

$$Nu = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Pr^{\frac{1}{3}}$$

Jednadžba (___) poznata je pod nazivom *Dittus-Boelterova* jednadžba (izvedena je ranije dimenzijskom analizom u poglavlju 5.2. Konvekcija), za prijenos topline konvekcijom pri strujanju kroz ravnu glatku cijev, koja ima praktičnu primjenu. Jednadžba vrijedi u području $10^4 < Re < 2 \cdot 10^5$, te za odnos $\frac{\ell}{D} > 50$.

Analogija se može primijeniti i za prijenos tvari pa vrijedi sljedeća jednadžba:

$$St' \cdot Sc^{2/3} = \frac{f}{2}$$

Odnosno:

$$St' = \frac{Sh}{Re \cdot Sc^{\frac{1}{3}}} = j_D = \frac{f}{2} = \psi \cdot Re^{-n}$$

Za ravnu cijev je dobiveno:

$$St' = \frac{Sh}{Re \cdot Sc^{\frac{1}{3}}} = j_D = \frac{f}{2} = \frac{\xi}{8} = 0,023 \cdot Re^{-0,2}$$

te se konačno dobiva bezdimenzijska korelacijska jednadžba za prijenos tvari vrtložnim mehanizmom:

$$Sh = 0,023 \cdot Re^{0,8} \cdot Sc^{\frac{1}{3}}$$

Na temelju predočenog može se izvesti opći zaključak da ovakav jedinstveni pristup proučavanjima prijenosa količine gibanja, prijenosa toplinske energije i prijenosa tvari, omogućuje bolje razumijevanje, povezivanje i izvođenje zakonitosti u procesima kemijske procesne industrije.

SADRŽAJ

1. UVOD	1
1.1. OPĆI ZAKON OČUVANJA	2
1.2. MEHANIZMI PRIJENOSA	5
1.2.1. Molekularni mehanizam prijenosa	6
1.2.2. Vrtložni mehanizam prijenosa	7
2. PRIJENOS KOLIČINE GIBANJA	9
2.1. FIZIKALNE OSNOVE	9
2.2. FIZIKALNA SVOJSTVA FLUIDA	10
2.3. ZAKONI OČUVANJA PRI GIBANJU FLUIDA	14
2.3.1. Zakon očuvanja mase	14
2.3.2. Zakon očuvanja količine gibanja	16
2.3.3. Zakon očuvanja energije	17
2.4. PROTJECANJE	22
2.4.1. Vrste strujanja	22
2.4.2. Laminarno strujanje	23
2.4.2.1. Raspodjela brzina pri laminarnom stacionarnom strujanju između dvije paralelne ploče	23
2.4.2.2. Raspodjela brzina pri laminarnom stacionarnom strujanju u horizontalnoj cijevi kružnog presjeka	25
2.4.2.3. Gubitak energije pri laminarnom strujanju u horizontalnoj cijevi	28
2.4.3. Turbulentno strujanje	28
2.4.3.1. Teorija graničnog sloja	32
2.4.3.2. Univerzalna raspodjela brzina pri turbulentnom gibanju	35
2.4.3.3. Gubitak energije pri turbulentnom gibanju tekućine kroz cijev kružnog presjeka	37
PRINCIP SLIČNOSTI	37
DIMENZIJSKA ANALIZA	40
2.4.3.4. Gubitak energije pri turbulentnom gibanju tekućine kroz cijev koja nije kružnog presjeka	45
2.4.4. Protjecanje kroz cjevovod	46
2.5. OPTJECANJE	48
2.5.1. Ukupni otpor čvrstog tijela pri optjecanju	49
2.5.2. Brzina gibanja čestica (fluida)	56
2.6. STRUJANJE U MIJEŠALICI	57
2.7. STRUJANJE KROZ POROZNU SREDINU	61
2.7.1. Strujanje kroz uske pore	65
2.7.2. Strujanje kroz široke pore	65
3. PRIJENOS TOPLINSKE ENERGIJE	68

3.1.	KONDUKCIJA.....	70
3.1.1.	Diferencijalna jednadžba kondukcije.....	71
3.1.2.	Toplinska vodljivost.....	74
3.1.3.	Stacionarna kondukcija.....	76
3.1.3.1.	Stacionarna kondukcija kroz jednoslojni zid.....	77
3.1.3.2.	Stacionarna kondukcija kroz višeslojni zid.....	78
3.1.3.3.	Kondukcija kroz zakrivljene (cilindrične) površine.....	80
3.1.4.	Nestacionarna kondukcija.....	82
3.1.4.1.	Analitička rješenja pri nestacionarnoj kondukciji.....	83
3.1.4.2.	Raspodjela temperatura u tijelu.....	84
3.1.4.3.	Zagrijavanje (hlađenje) tijela beskonačnih dimenzija.....	85
3.1.4.4.	Zagrijavanje (hlađenje) polubeskonačnog tijela.....	91
3.2.	PRIJENOS TOPLINE KONVEKCIJOM.....	93
3.2.1.	Diferencijalna jednadžba konvekcije.....	94
3.2.2.	Hidrodinamički i toplinski granični sloj.....	96
3.2.3.	Primjena dimenzijske analize.....	98
3.2.3.1.	Koeficijent prijelaza topline.....	98
3.2.3.2.	Bezdimenzijske značajke.....	98
3.2.4.	Prijenos topline pri laminarnom toku u cijev.....	101
3.2.5.	Prijenos topline pri turbulentnom toku u cijev.....	104
3.2.6.	Prijenos topline u miješalicama.....	105
3.2.7.	Prijelaz topline pri optjecanju.....	110
3.2.8.	Prijelaz topline pri strujanju kroz poroznu sredinu.....	111
3.2.9.	Prolaz topline.....	112
3.3.	PRIJENOS TOPLINE ZRAČENJEM.....	116
3.3.1.	Izmjena topline između dvije ravne ploče.....	120
3.3.2.	Zračenje u zatvorenom prostoru.....	122
3.3.3.	Intenzifikacija i zaštita od toplinskog zračenja.....	123
3.3.4.	Toplinsko zračenje plinova.....	124
3.3.5.	Složeni prijenos topline zračenjem i konvekcijom.....	125
3.3.6.	Prijenos topline pri promjeni agregatnog stanja.....	127
3.3.6.1.	Vrenje kapljevina.....	127
3.3.6.2.	Kondenzacija pare.....	131
4.	PRIJENOS TVARI.....	133
4.1.	PRIJENOS TVARI DIFUZIJOM.....	134
4.1.1.	Diferencijalna jednadžba prijenosa tvari.....	139
4.1.2.	Prijenos tvari difuzijom u stacionarnim uvjetima.....	141
4.1.2.1.	Difuzija komponente A kroz nepokretnu komponentu B.....	142
4.1.2.2.	Ekvimolarna protustrujna difuzija.....	144
4.1.3.	Nestacionarna difuzija.....	146
4.2.	PRIJENOS TVARI KONVEKCIJOM.....	148
4.2.1.	Koeficijent prijenosa tvari.....	148

4.2.1.1.	<i>Procjena koeficijenta prijenosa tvari</i>	150
4.2.1.2.	<i>Prijenos tvari pri gibanju fluida (prisilna konvekcija)</i>	152
4.2.1.3.	<i>Prijenos tvari prirodnom konvekcijom</i>	154
4.2.2.	<i>Međufazni prijenos tvari</i>	155
5.	ANALOGIJA PRIJENOSA KOLIČINE GIBANJA, KOLIČINE TOPLINE I KOLIČINE TVARI	158
5.1.	REYNOLDSOVA ANALOGIJA	159
5.2.	PRANDTL-TAYLOROVA ANALOGIJA	160
5.3.	VON-KARMANOVA ANALOGIJA	161
5.4.	CHILTON-COLBURNOVA ANALOGIJA	162