

Fizika I

ROTACIJA KRUTOG TIJELA

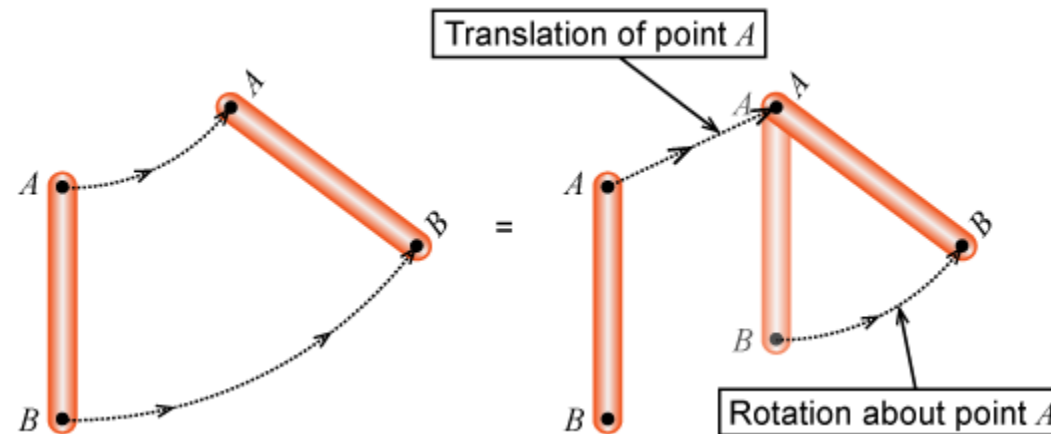
Doc. dr. sc. Iva Movre Šapić

ROTACIJA KRUTOG TIJELA

Vanjske sile mogu izazvati:

- Translaciju – sve točke tijela imaju jednake brzine i akceleracije
- Rotaciju – sve točke se jednoliko gibaju oko iste osi, istom kutnom brzinom

Općenito gibanje krutog tijela = translacija CM + rotacija oko osi kroz CM



https://www.compadre.org/Physlets/mechanics/illustration11_2.cfm

Translacija krutog tijela

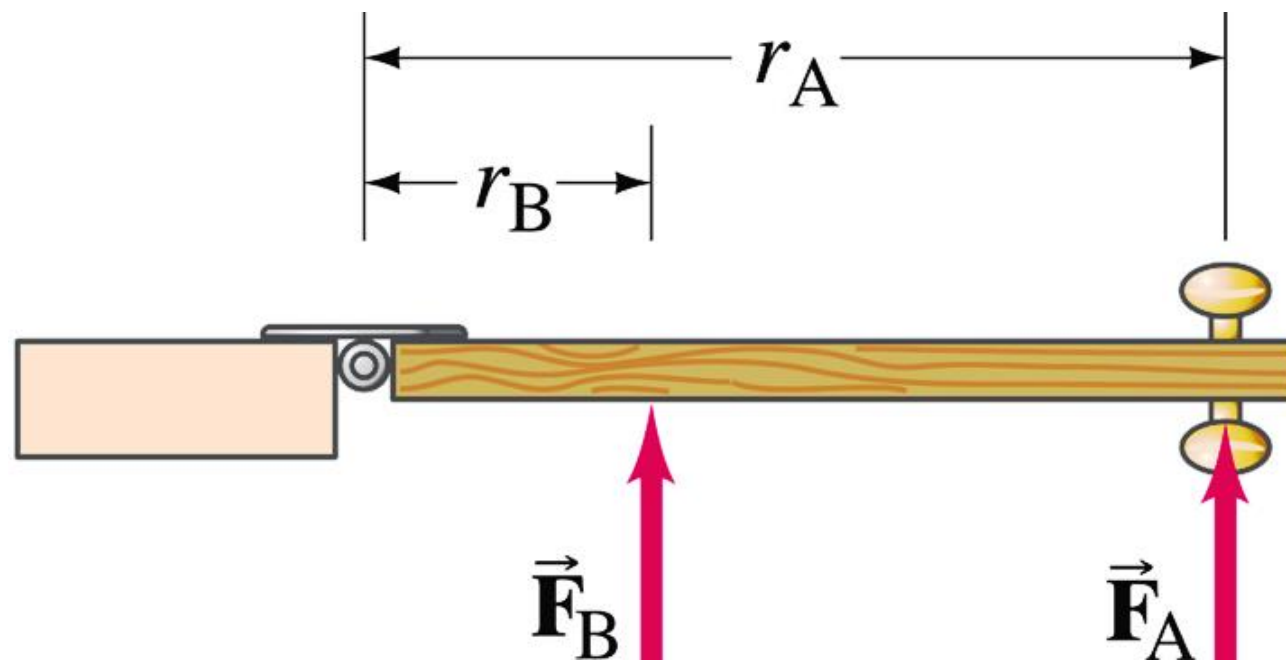
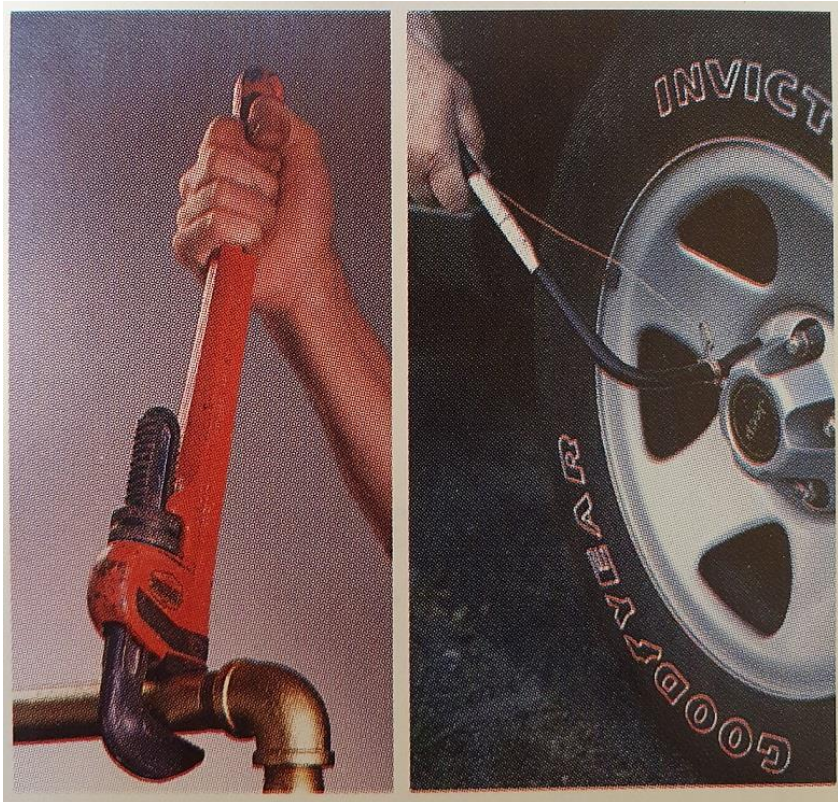
- Kruto tijelo = sustav od n materijalnih točaka
- Sve točke tijela imaju jednaku brzinu $\vec{v}$ i akceleraciju $\vec{a}$
- Jednadžbe gibanja tog sustava sveli smo na

$$\vec{F}_v = M\vec{a}_{CM} = \vec{R} = \vec{F}_R$$

- 2. Newtonov zakon za česticu mase M na koju djeluje sila $\vec{F}_v$!
- Dakle, sustav čestica ponaša se kao da je sva masa smještena u jednoj točki – centru masa!

Rotacija krutog tijela oko nepomične osi - primjeri

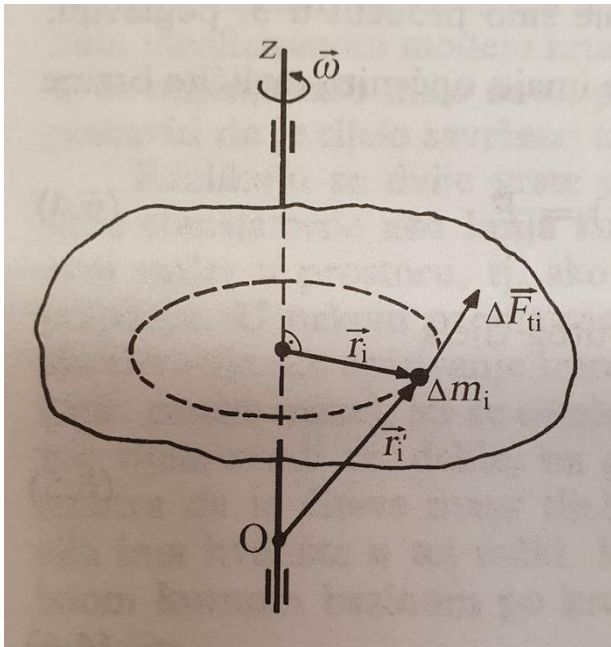
$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ s duljim krakom sile potrebna je manja sila za isti učinak



Rotacija krutog tijela oko nepomične osi

- Sve točke tijela izvode gibanje po kružnicama čija središta leže na osi rotacije.
- Na rotaciju oko nepomične osi utječe samo komponenta sile okomita na os rotacije – tj. koja leži u ravnini okomitoj na os rotacije – moment u smjeru osi $\rightarrow M_z$

Izvod jednadžbe gibanja:



Moment sile i -te čestice s obzirom na točku O je:

$$\Delta \vec{M}_i = \vec{r}_i' \times \Delta \vec{F}_i$$

$$\Delta M_{zi} = r_i \Delta F_{ti} = r_i \Delta m_i a_{ti} = \alpha \Delta m_i r_i^2$$

$$M_z = \sum_i \Delta M_{zi} = \alpha \sum_i \Delta m_i r_i^2 = I_z \alpha$$

$$I_z = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

Moment tromosti

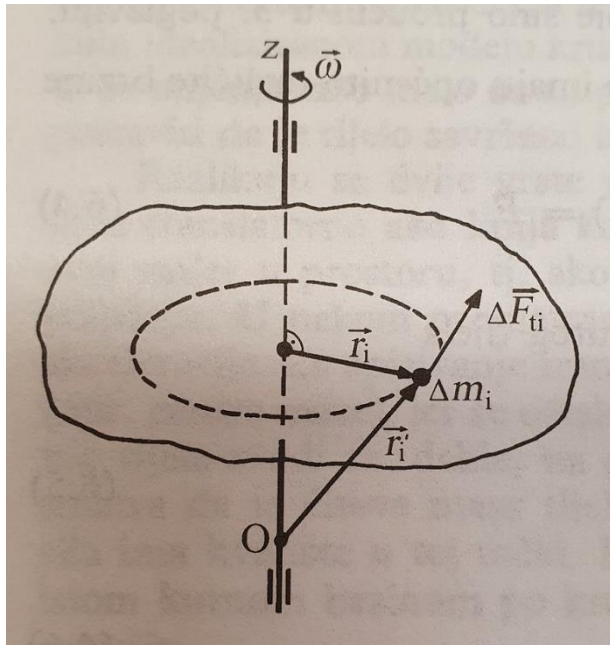
Rotacija krutog tijela oko nepomične osi

$$M_z = I_z \cdot \alpha$$

$$F = m \cdot a$$

Osnovna jednađžba (II. Newtonov zakon) za rotaciju krutog tijela oko nepomične osi

II. Newtonov zakon za materijalnu točku



- $\vec{M} = 0 \rightarrow \vec{\alpha} = 0$ – tijelo će ili mirovati ili se jednoliko vrtjeti.
- $M_z = konst.$ – tijelo će se vrtjeti oko nepomične os konstantnom kutnom akceleracijom ($\alpha = konst.$).

Moment tromosti (inercije), I

- karakteristična veličina za svako tijelo koje rotira
= mjera tromosti tijela pri rotaciji
- utječe na rotaciju slično kao što masa utječe na translaciju tijela
→ tijela s većim I teže je zarotirati nego ona s manjim

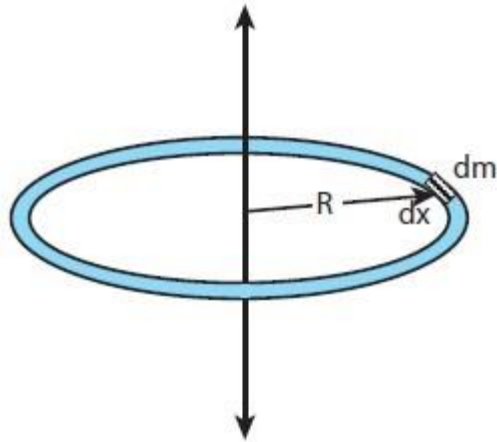
$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 = \int r^2 dm$$

- $dm = \rho dV$
 - Homogena tijela: $\rho = konst.$
- }

$I = \rho \int_V r^2 dV$

Mjerna jedinica $\text{kg} \cdot \text{m}^2$

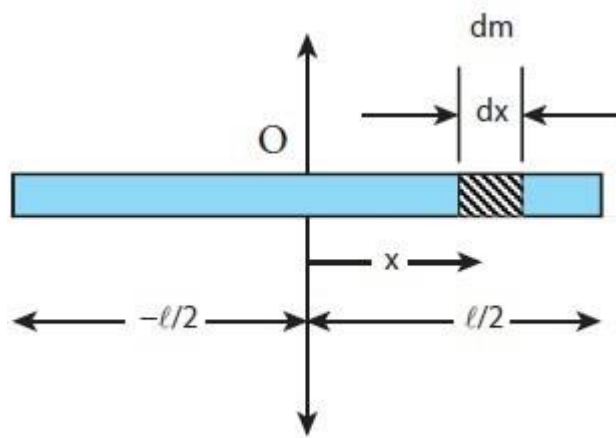
Moment tromosti prstena



- tanki kružni prsten polumjera R i mase m
- *Moment tromosti* s obzirom na os okomitu na ravninu prstena, koja prolazi kroz središte prstena?
- Svaki djelić mase, dm , ima jednaku udaljenost od osi rotacije pa je $r = konst.$:

$$I = \int r^2 dm = R^2 \int dm = mR^2$$

Moment tromosti štapa

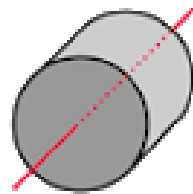


- Homogeni štap duljine l i mase m
- *Moment tromosti* s obzirom na os okomitu na štap, koja prolazi kroz sredinu štapa?
- Homogeni štap: $\rho = konst.$
- Masa štapa $m = \rho V = \rho S l$

$$I = \rho \int_V r^2 dV = \rho \int_{-l/2}^{l/2} x^2 S dx = \rho S \frac{1}{3} \frac{l^3}{4} = \frac{m l^2}{12}$$

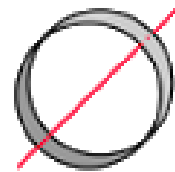
Momenti tromosti nekih tijela

Solid cylinder or disc, symmetry axis



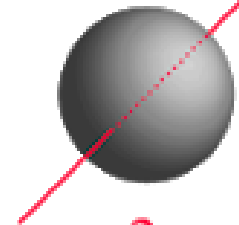
$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

Hoop about symmetry axis



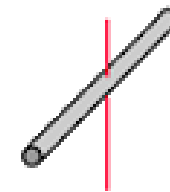
$$I = MR^2$$

Solid sphere



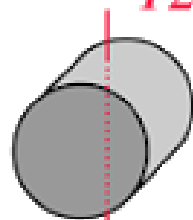
$$I = \frac{2}{5}MR^2$$

Rod about center



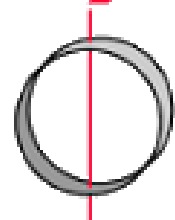
$$I = \frac{1}{12}ML^2$$

$$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$$



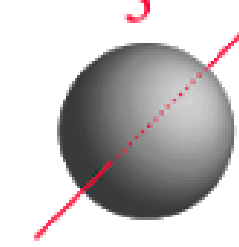
Solid cylinder, central diameter

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



Hoop about diameter

$$I = \frac{2}{3}MR^2$$



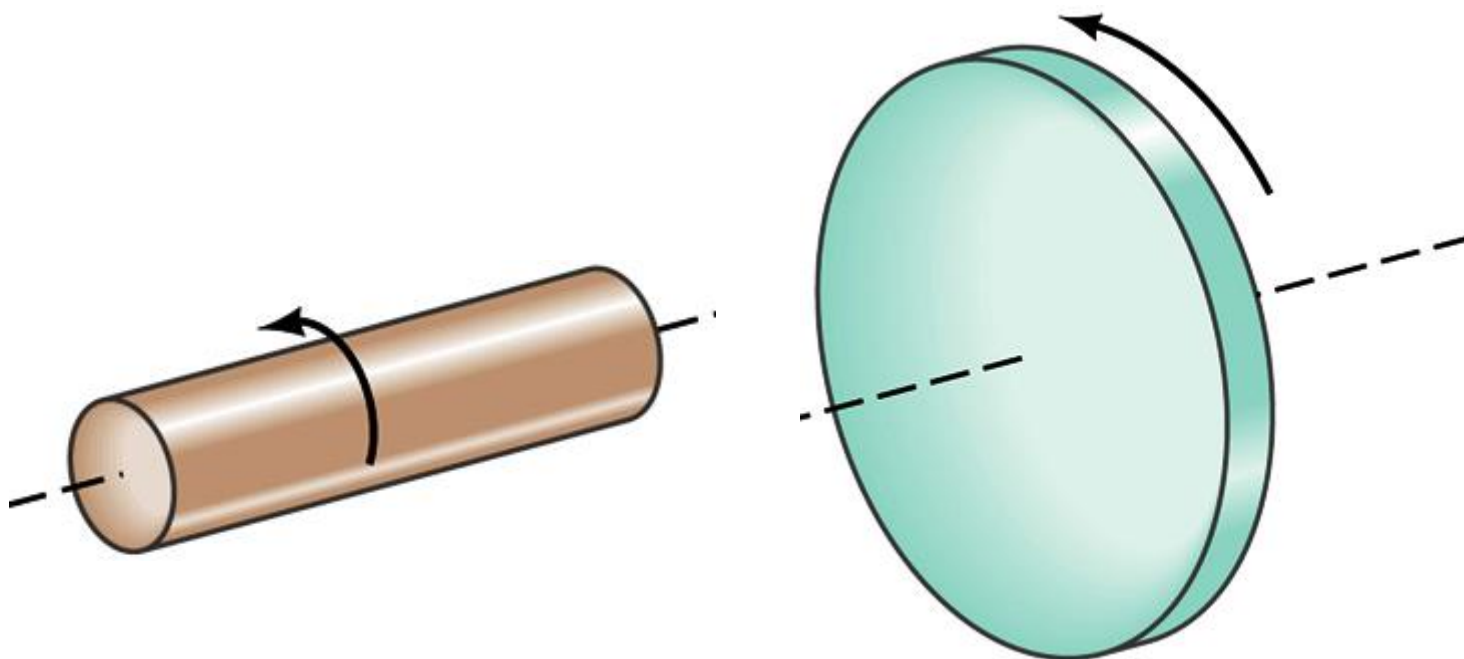
Thin spherical shell

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$



Rod about end

Moment tromosti



- Kod **rotacije** je važna **raspodjela mase u tijelu!**
- Ne možemo postaviti da je sva masa u CM.

$$m_{\text{ŠTAP}} = m_{\text{DISK}}$$

ALI

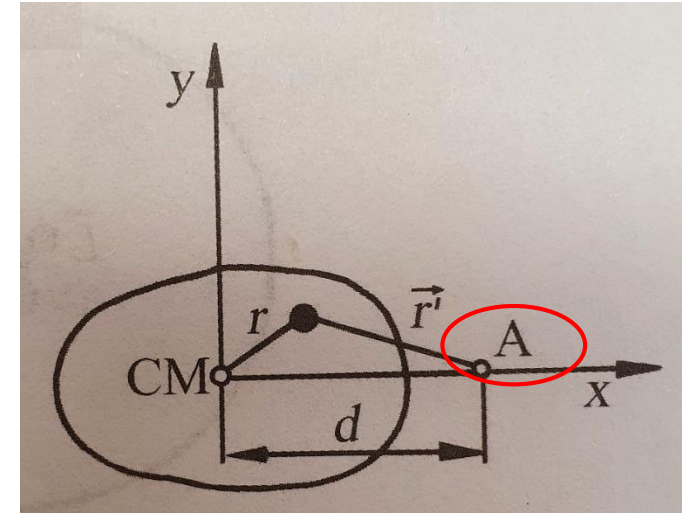
$$I_{\text{ŠTAP}} < I_{\text{DISK}}$$

Iako su mase jednake!

Moment tromosti – Steinerov poučak

- Tijelo rotira oko osi koja prolazi kroz centar mase tijela okomito na ravninu slike. Moment tromosti oko te osi je:

$$I_{CM} = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$



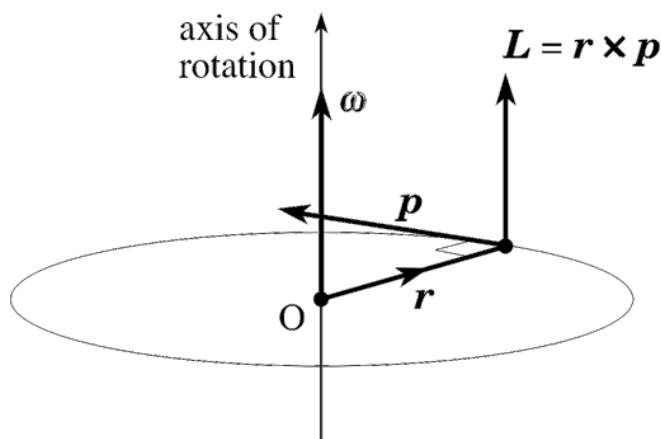
- Moment tromosti za os koja prolazi kroz točku A, paralelna je osi kroz CM i od nje udaljena za d :

$$I = \int r'^2 dm = \int [(d - x)^2 + y^2] dm = \underbrace{\int (x^2 + y^2) dm}_{I_{CM}} - \underbrace{\int 2dx dm}_{\int 2dx dm = 2d \int x dm = 2dx_{CM}m = 0} + \underbrace{\int d^2 dm}_{md^2}$$

$$\int 2dx dm = 2d \int x dm = 2dx_{CM}m = 0$$

$$I = I_{CM} + md^2$$

Moment količine gibanja (kutna količina gibanja)



Materijalna točka mase m i količine gibanja

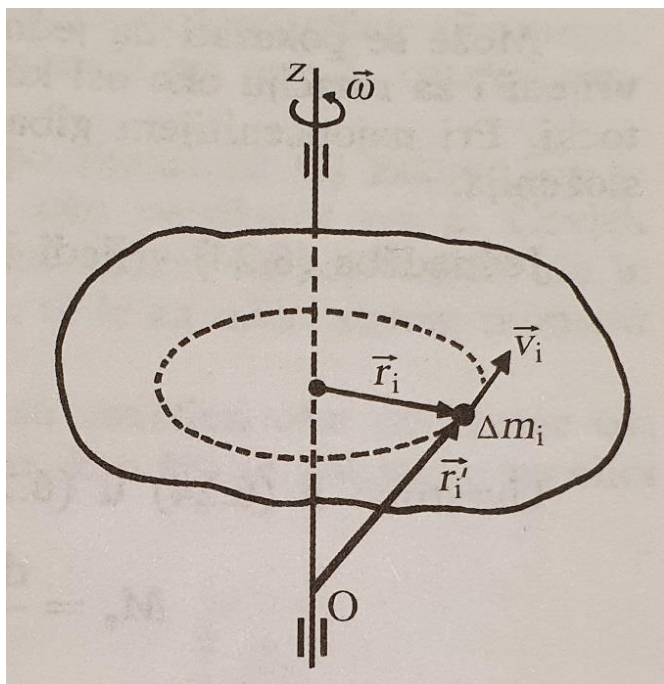
$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- Moment količine gibanja $\vec{L}$ s obzirom na točku O:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

- Mjerna jedinica: kgm^2/s
- Smjer: pravilo desne ruke

Moment količine gibanja (kutna količina gibanja)



- **Kruto tijelo** koje rotira oko nepomične osi.
- Moment količine gibanja materijalne točke mase Δm_i s obzirom na točku O:

$$\Delta \vec{L}_i = \vec{r}_i' \times \Delta m_i \vec{v}_i$$

- Projekcija vektora $\Delta \vec{L}_i$ na os rotacije:

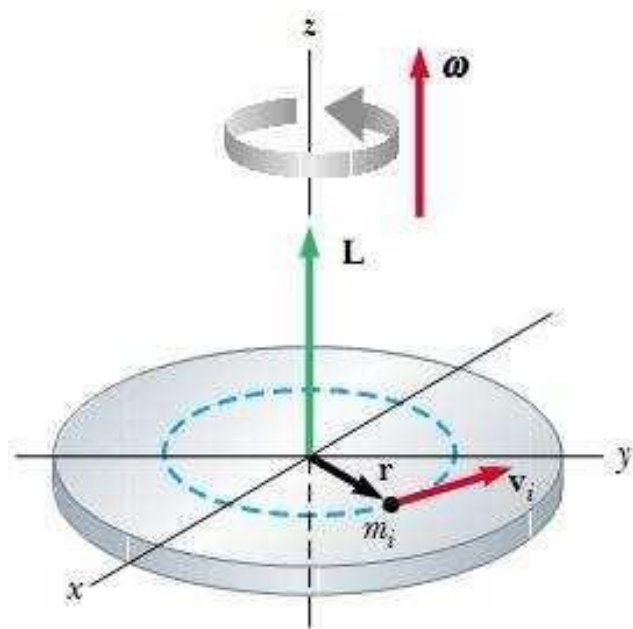
$$\Delta L_{zi} = \Delta m_i r_i v_i = \Delta m_i r_i^2 \omega \quad (v_i = r_i \omega)$$

- Projekcija ukupnog momenta količine gibanja krutog tijela na os z :

$$L_z = \sum_i \Delta L_{zi} = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \omega$$

$$L_z = I_z \omega$$

Moment količine gibanja (kutna količina gibanja)



- Ako homogeno tijelo rotira oko svoje osi simetrije, ukupni moment količine gibanja $\vec{L}$ ima smjer kutne brzine $\vec{\omega}$ pa vrijedi i:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$\vec{L}$ i $\vec{\omega}$ imaju isti smjer i leže na osi rotacije.

- Općenito, za nesimetrično tijelo, smjer $\vec{L}$ i $\vec{\omega}$ ne mora biti jednak

$L_z = I_z \omega$ – vrijedi i za simetrična i za nesimetrična tijela.

Jednadžba gibanja za rotaciju krutog tijela

- Moment količine gibanja jedne od materijalnih točaka tijela s obzirom na neku čvrstu točku O koja leži na osi rotacije:

$$\Delta \vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

Deriviramo: $\frac{d\vec{L}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{p}_i + \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{M}_i$

Vrijedi: $\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i = 0$ $\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i$

Zbrajamo po svim točkama: $\frac{d}{dt} (\sum_i \vec{L}_i) = \sum_i \vec{M}_i$ $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

- Jednadžba vrijedi i za projekciju vektora $\vec{M}$ i $\vec{L}$ na os rotacije z:

$$M_z = \frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt} (I_z \omega) = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha$$

$$M_z = I_z \alpha$$

Zakon očuvanja momenta količine gibanja

- Jednadžba gibanja za rotaciju krutog tijela: $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
- Zatvoreni sustav: $\sum_i \vec{F}_i = 0$ ili $\sum_i \vec{M}_i = 0$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = konst.$$

U zatvorenom sustavu moment količine gibanja je očuvan.

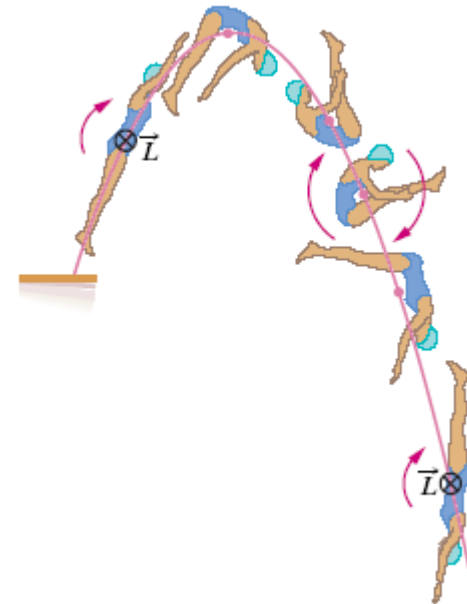
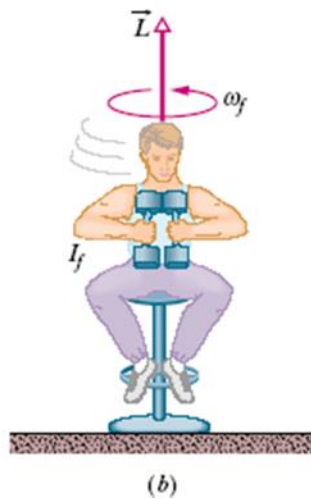
- Poseban slučaj, ako se mehanički sustav vrti oko nepomične osi z:

$$L_z = I_z \omega = konst.$$

$$I_{z1} \omega_1 = I_{z2} \omega_2 = konst.$$

- <https://youtu.be/FmnkQ2ytIO8>

Zakon očuvanja momenta količine gibanja - primjeri



Gibanje zvrka

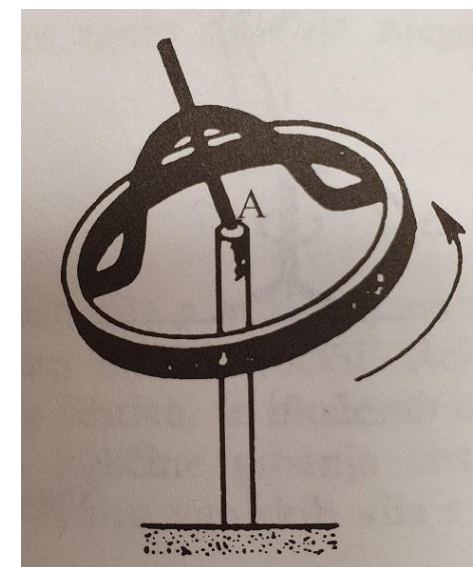
- Zvrk je rotacijsko simetrično tijelo koje se vrlo brzo vrti oko svoje osi simetrije, pri čemu je stalno učvršćeno **u jednoj točki** koja leži na toj osi.
- Nije više rotacija oko nepomične osi!

Gledamo dva primjera:

a) **Slobodni zvrk** – zvrk poduprt u svom težištu ($\vec{M}_A = 0$)

$$\vec{M}_A = \frac{d\vec{L}_A}{dt} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{L}_A = \textit{konst.}$$

- Smjer i iznos momenta količine gibanja su konstantni jer nema vanjskog momenta sile.



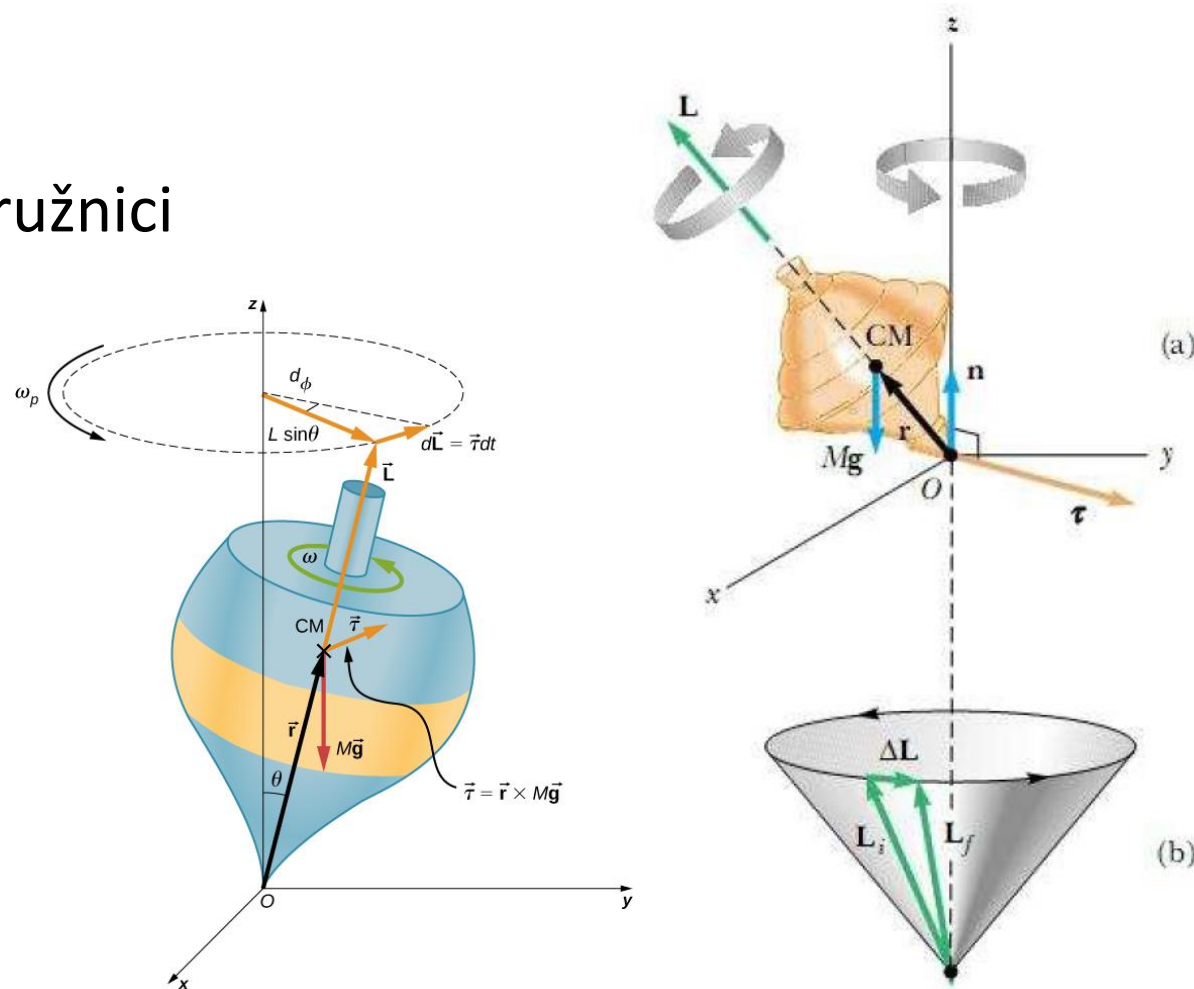
Gibanje zvrka

b) **Precesija zvrka** – zvrk nije poduprt u svom težištu, nego u točki A (O) ($\vec{M}_A \neq 0$)

- težina stvara moment oko O: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{G}$
- **os zvrka se zakreće**, a težište se giba po kružnici
- M je okomit na L
- L mijenja smjer, iznos je konstantan
- vrh vektora L opisuje kružnicu

= **precesija** kutnom brzinom Ω (ω_p)

$$\left. \begin{aligned} \vec{M} &= \vec{\Omega} \times \vec{L} \\ L_z &= I_z \omega \end{aligned} \right\} \quad \Omega = \frac{M}{I_z \omega} = \frac{mgr}{L}$$



Kinetička energija, rad i snaga pri rotaciji

- Kinetička energija materijalne točke m_i :

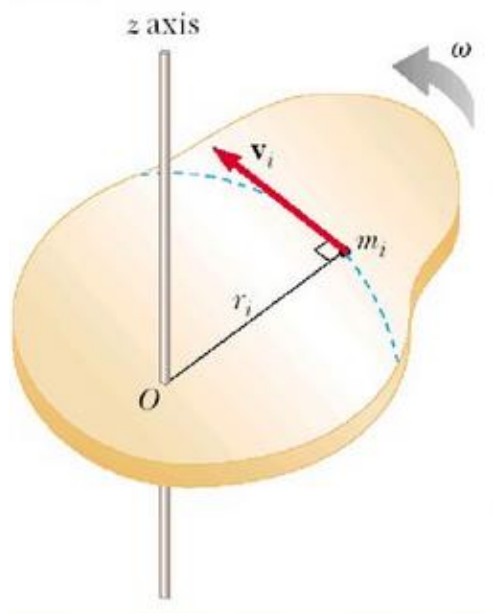
$$E_{Ki} = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

- Kinetička energija krutog tijela koje rotira oko osi z:

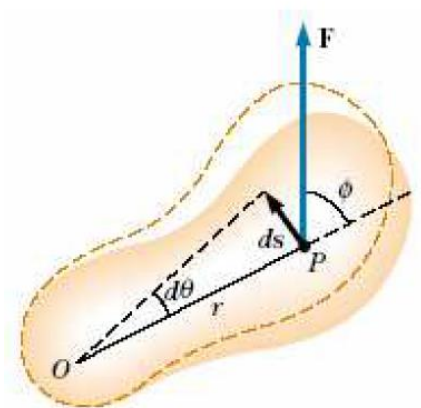
$$E_K = \sum_i E_{Ki} = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2$$

$$I_z = \sum_i m_i r_i^2$$

$$E_K = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$



Kinetička energija, rad i snaga pri rotaciji



- Rad vanjske sile na tijelo koje rotira:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = (F \sin \phi) r d\theta$$

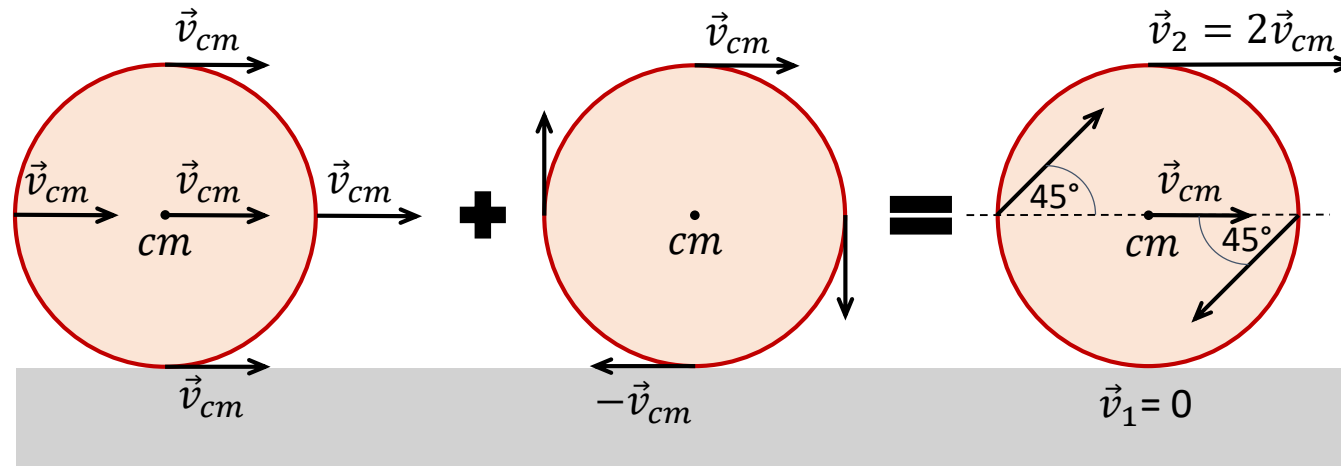
$$dW = M d\theta$$

- Snaga pri rotaciji:

$$P = \frac{dW}{dt} = M_z \frac{d\theta}{dt} = M_z \omega$$

$$P = M_z \omega$$

Kotrljanje krutog tijela



$$E_K = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

Princip virtualnog rada

- Principom virtualnog rada izražavaju se uvjeti ravnoteže na indirektan način.
- Podrazumijeva davanje infinitezimalno malih, zamišljenih pomaka krutom tijelu.

Virtualni pomaci označavaju se s δ :

- $\delta \vec{r}$ – linearni pomak materijalne točke tijela
- $\delta \vec{\varphi}$ – kutni pomak materijalne točke tijela – vektor u smjeru kutne brzine rotacije tijela
- Vanjska sila koja djeluje na tijelo ili sustav tijela, može proizvesti translaciju i rotaciju tijela te izvršiti određeni rad nad tijelom
- Da bi tijelo bilo u ravnoteži, ukupni rad vanjskih sila pri bilo kakvoj zamišljenoj (virtualnoj) maloj promjeni položaja mora biti = 0.
- Uvjet ravnoteže: $\delta W = 0 \quad \Sigma \vec{F} \cdot \delta \vec{r} + \Sigma \vec{M} \cdot \delta \vec{\varphi} = 0$

Jednadžbe rotacije i translacije

Rotational Motion About a Fixed Axis	Linear Motion
Angular speed $\omega = d\theta/dt$	Linear speed $v = dx/dt$
Angular acceleration $\alpha = d\omega/dt$	Linear acceleration $a = dv/dt$
Net torque $\Sigma\tau = I\alpha$	Net force $\Sigma F = ma$
If $\alpha = \text{constant}$ $\begin{cases} \omega_f = \omega_i + \alpha t \\ \theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{cases}$	If $a = \text{constant}$ $\begin{cases} v_f = v_i + at \\ x_f = x_i + v_i t + \frac{1}{2}at^2 \\ v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i) \end{cases}$
Work $W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta$	Work $W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$
Rotational kinetic energy $K_R = \frac{1}{2}I\omega^2$	Kinetic energy $K = \frac{1}{2}mv^2$
Power $\mathcal{P} = \tau\omega$	Power $\mathcal{P} = Fv$
Angular momentum $L = I\omega$	Linear momentum $p = mv$
Net torque $\Sigma\tau = dL/dt$	Net force $\Sigma F = dp/dt$

- Malo igranja s ravnotežom...

https://phet.colorado.edu/sims/html/balancing-act/latest/balancing-act_en.html