

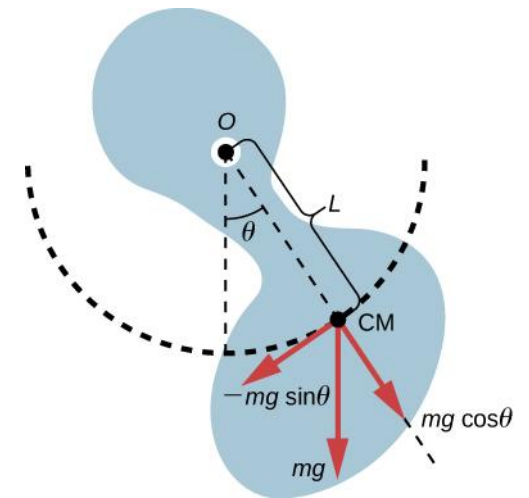
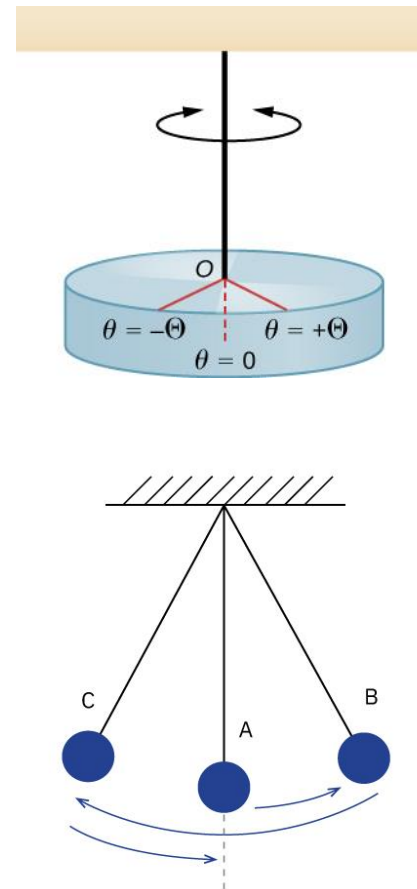
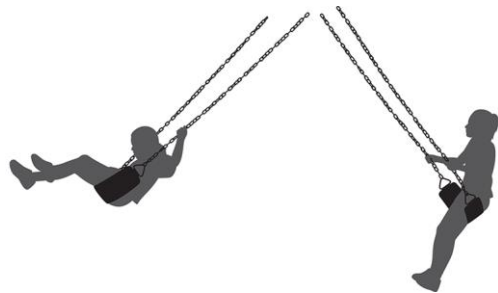
Fizika I

TITRANJE

Doc. dr. sc. Iva Movre Šapić

TITRANJE

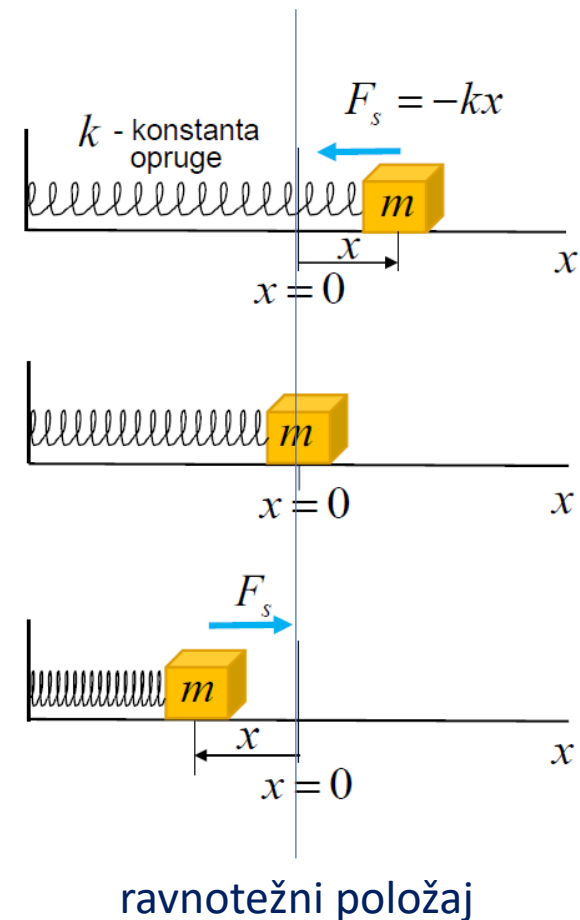
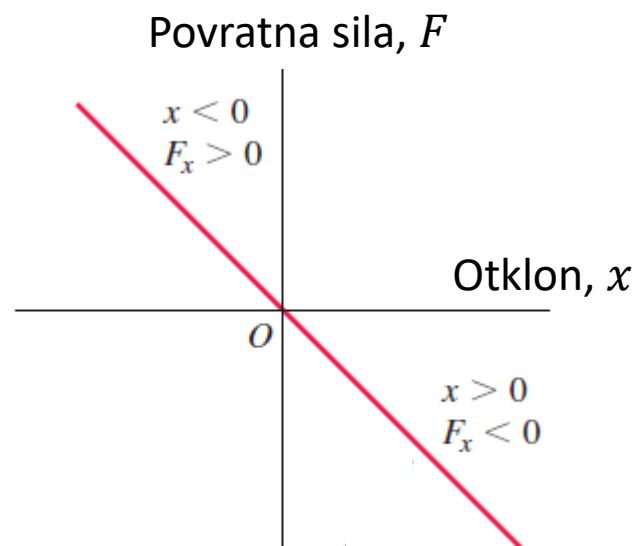
- Titranje (**oscilatorno gibanje**) – gibanje pri kojem materialna čestica prevaľuje odreĊeni put izmeĊu dvaju krajnjih poloŹaja, vraća se istim putem nakon čega se to gibanje periodički ponavlja
- Čestica koja titra – **oscilator**



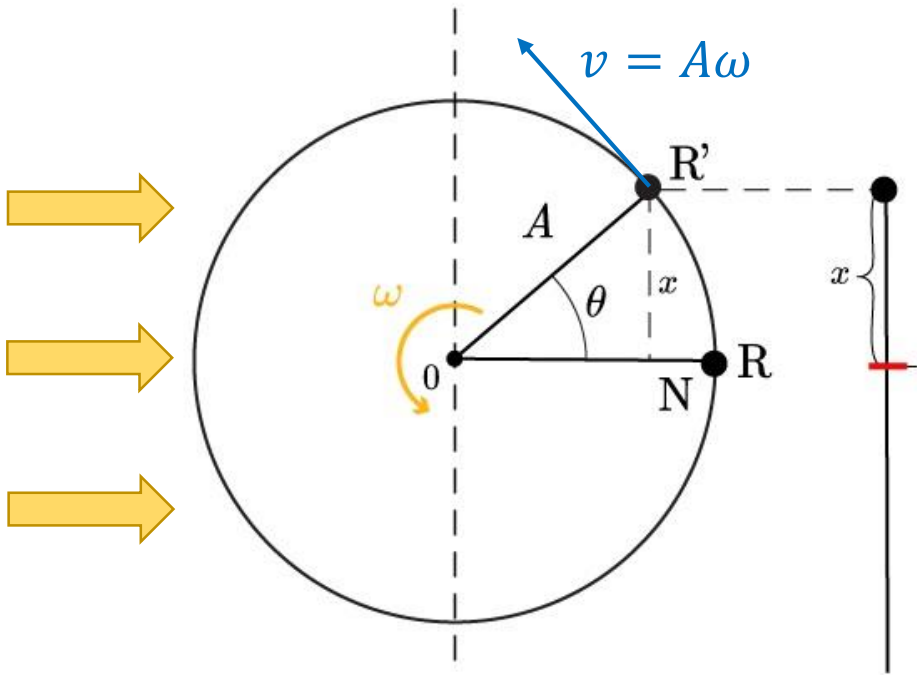
Harmoniĉko titranje

- Posebno pravilan naĉin titranja
- Ćestica koja harmoniĉki titra – **harmonički oscilator**
- Uzrok gibanju je elastiĉna (harmonička) sila
- Elastiĉna sila je **povratna** sila – uvijek suprotna od pomaka ĉestice iz ravnoteŹnog poloŹaja
- Povratna sila je direktno proporcionalna odklonu iz ravnoteŹe x (s): (Hookeov zakon)

$$F = -kx$$



Harmoniĉko titranje kao projekcija jednolikog gibanja po kruŹnici



- Ćestica mase m giba se jednoliko kutnom brzinom $\omega = \theta/t$ u vertikalnoj ravnini po kruŹnici polumjera A
- Projekcija ĉestice (**oscillator**) titra gore – dolje

$$x = A \sin \omega t$$

$$v = A \omega \cos \omega t$$

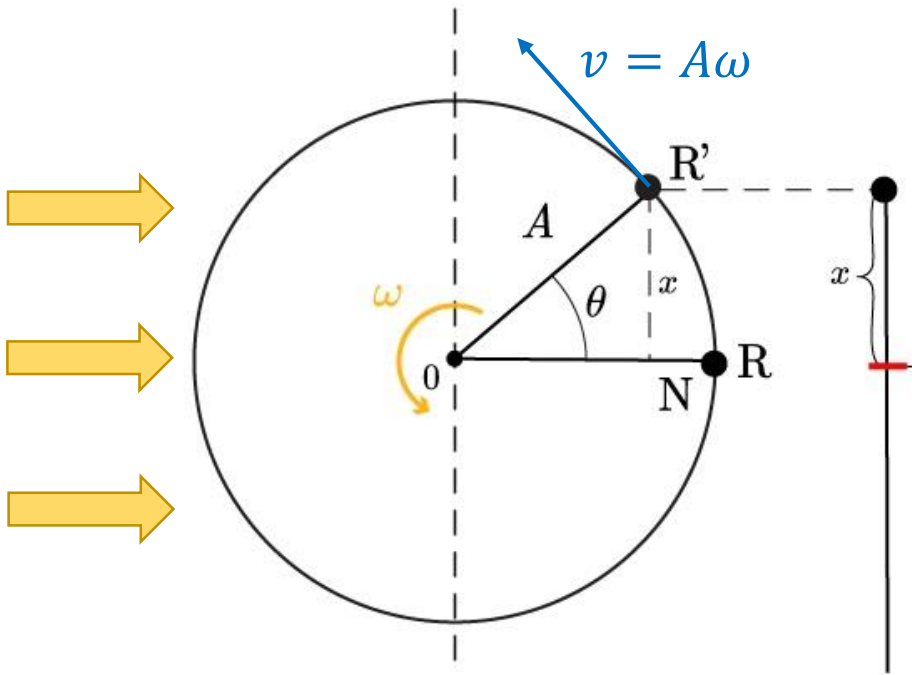
$$a = -\frac{v^2}{A} \sin \omega t$$

$$F = -m \frac{v^2}{A} \sin \omega t = -m \omega^2 x$$

- Povratna harmoniĉka sila: $F = -kx$

Harmoniĉko titranje kao projekcija jednolikog gibanja po kruŹnici

$$k = m\omega^2$$



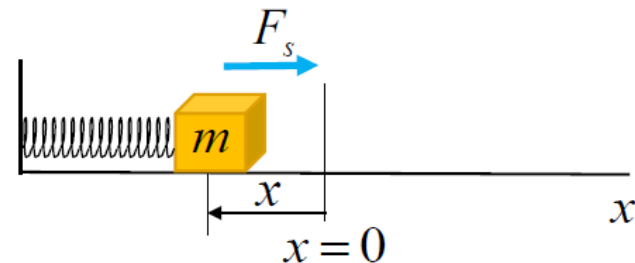
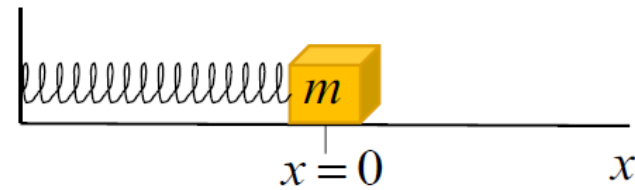
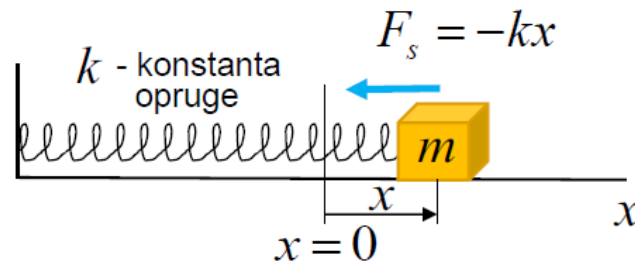
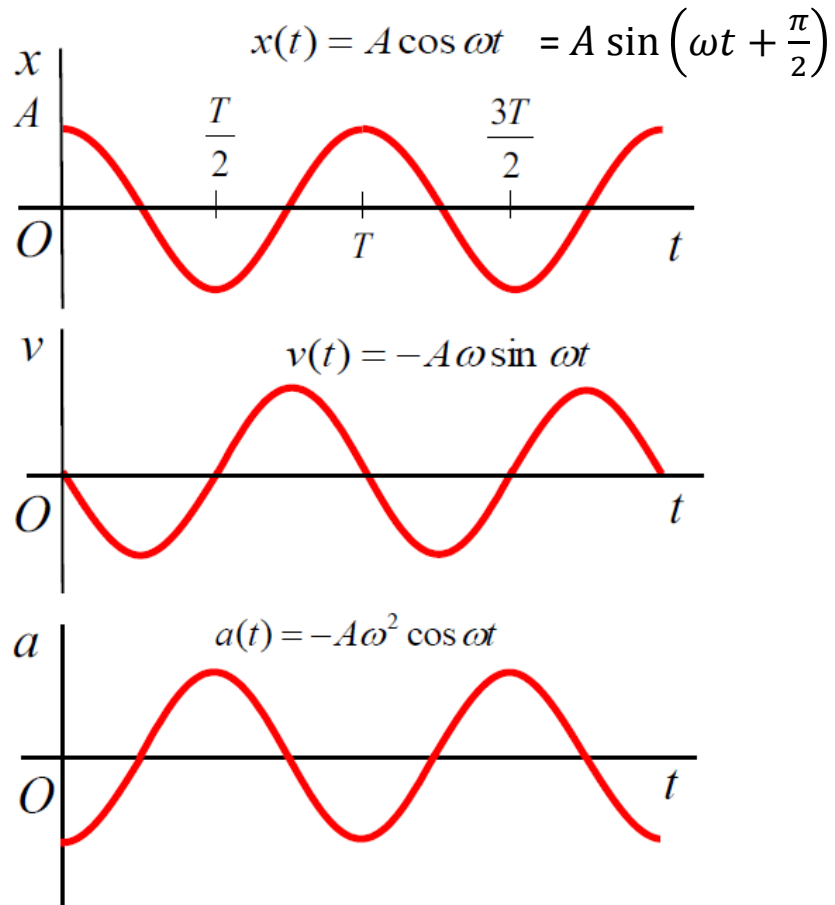
- KruŹna frekvencija: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f$
- Period: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$
- Frekvencija: $\nu = f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$x = s = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

elongacija početna faza
amplituda

Jednadžba gibanja harmoničkog oscilatora

- <https://www.geogebra.org/m/qMkzUMSh>



Hookeov zakon:

$$F = -ks$$

Drugi Newtonov zakon:

$$ma = -ks$$

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -ks$$

Diferencijalna jednadžba:

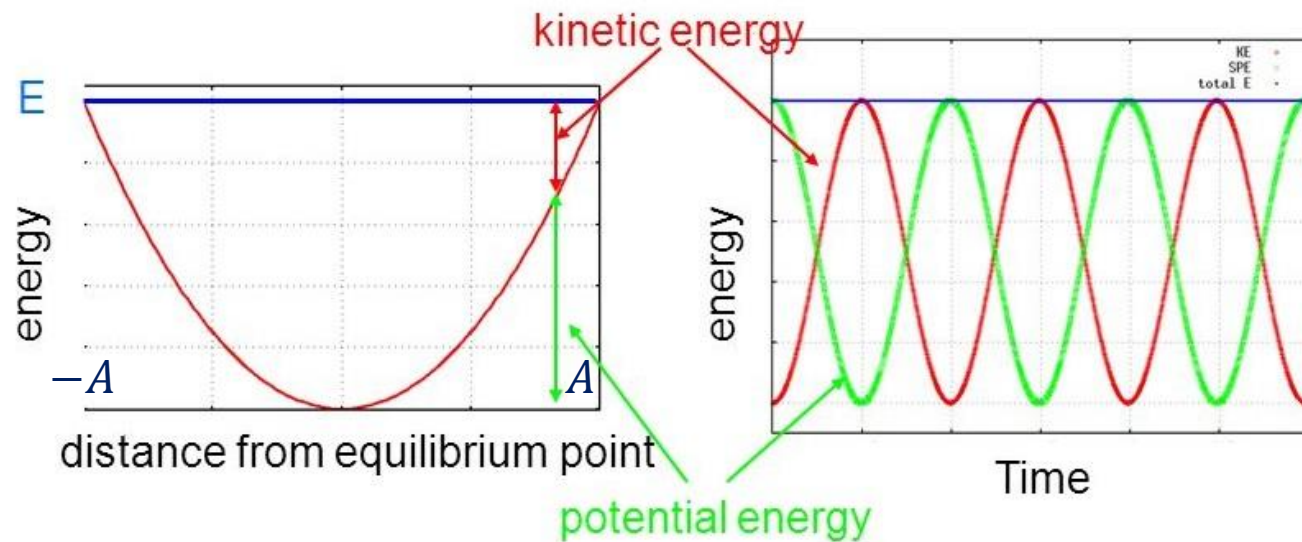
$$\frac{d^2 s}{dt^2} + \underbrace{\left(\frac{k}{m} \right)}_{\omega^2} s = 0$$

Rješenje:

$$s = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Energija harmoničkog oscilatora

- <https://www.geogebra.org/m/qMkzUMSh>



Potencijalna energija:

$$E_p = \frac{1}{2} k x^2$$

Kinetička energija:

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

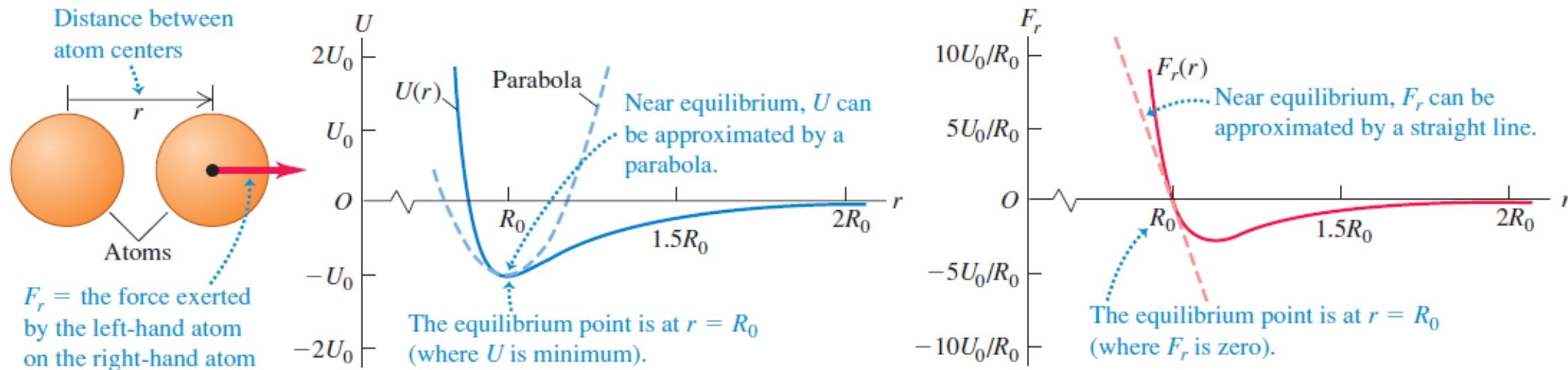
Ukupna energija

$$E = E_k + E_p$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

Vibracije dvoatomne molekule - primjer

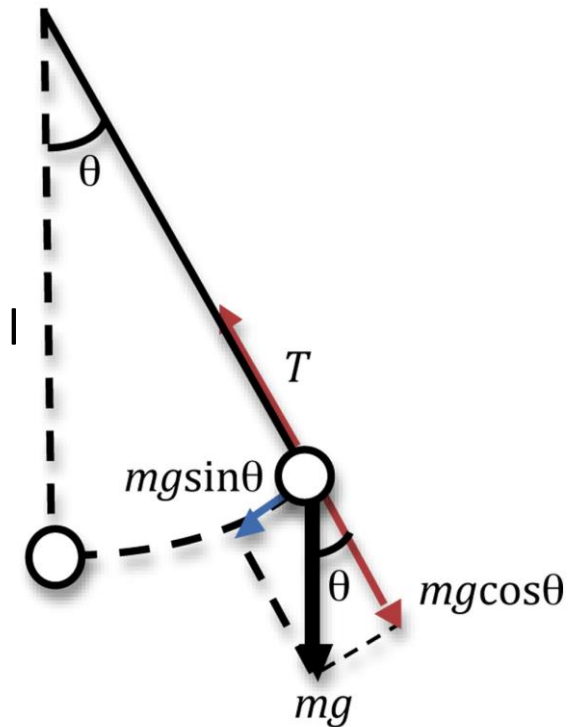
- U stvarnosti su mnoga gibanja samo približno harmonička
- Dvoatomna molekula – anharmonička sila



$$U = U_0 \left[\left(\frac{R_0}{r} \right)^{12} - 2 \left(\frac{R_0}{r} \right)^6 \right]$$

van der Waalsova interakcija

Matematičko njihalo



- Idealan sustav: materijalna točka mase m obješena o nerastezljivu nit zanemarive mase i duljine l
- Dobra aproksimacija: kuglica obješena na kraj duge, tanke nerastezljive niti
- Kuglica se zbog napete niti giba po kružnici polumjera l

Newtonov zakon:

$$M = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$I = ml^2$$

$$F_t = mg \sin \theta$$

$$M = -mgl \sin \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Mali kut u radijanima:

$$\theta \ll 1 \rightarrow \sin \theta \cong \theta$$

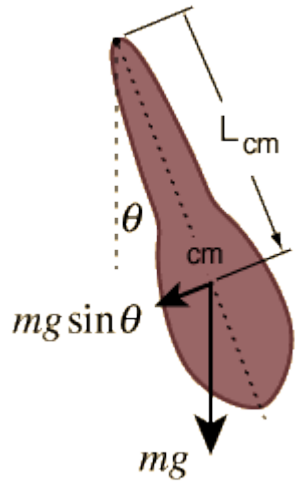
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \left(\frac{g}{l}\right)\theta = 0$$

ω^2

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Fizičko njihalo



- Kruto tijelo obješeno oko čvrste osi koja ne prolazi njegovim težištem
- Spojnica između objesišta i težišta (duljine L) zatvara s težinom $\vec{G}$ kut θ

Newtonov zakon:

$$M = I\alpha = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$M = -Lmg \sin \theta$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Lmg}{I} \sin \theta = 0$$

$$\theta \ll \rightarrow \sin \theta \cong \theta$$
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{Lmg}{I} \theta = 0$$

ω^2

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Lmg}}$$

$$\theta = \theta_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Prigušeno titranje

U stvarnim sustavima imamo otpor sredstva u kojem tijelo titra

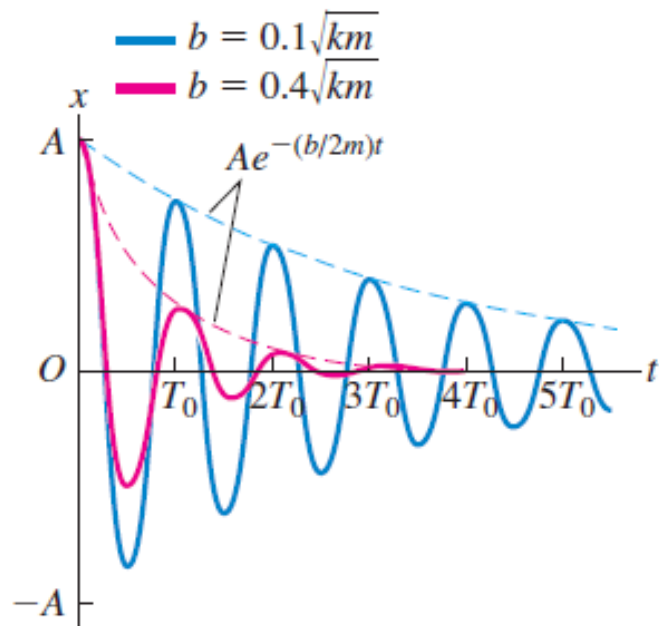
- Oscilator titra sve manjom amplitudom sve dok titranje potpuno ne utrne
- Energija se gubi u okolinu
- Najjednostavnije, otpor ovisi o brzini: $F_0 = -bv$ ($v = ds/dt$)
- Jednadžba gibanja: $m \frac{d^2s}{dt^2} + b \frac{ds}{dt} + ks = 0$
 - $2\gamma = \frac{b}{m}$ (jakost sile otpora sredstva)
 - $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (vlastita kružna frekvencija)

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\gamma \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

Prigušeno titranje

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\gamma \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

rej.: $s = A_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega t + \varphi_0)$



- $A = A_0 e^{-\gamma t}$ amplituda se eksponencijalno smanjuje s vremenom
- $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ frekvencija nešto manja od vlastite, $\omega_0 \rightarrow$ period T veći od T_0

Prisilne oscilacije

- Izgubljena energija prigušenog titranja može se nadoknaditi vanjskom periodičkom silom

$$F = F_0 \cos \omega_f t$$

- Jednadžba gibanja: $m \frac{d^2 s}{dt^2} + b \frac{ds}{dt} + ks = F_0 \cos \omega_f t$
- Sustav titra nametnutom frekvencijom: $s = A \sin(\omega_f t + \varphi_f)$
- Amplituda je stalna – neprigušeno titranje, ali ovisi o frekvenciji vanjske sile:

$$A = A(\omega_f) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_f^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_f^2}}$$

Prisilne oscilacije

- **Rezonancija** – izrazito povečanje amplitude na određenoj frekvenciji

