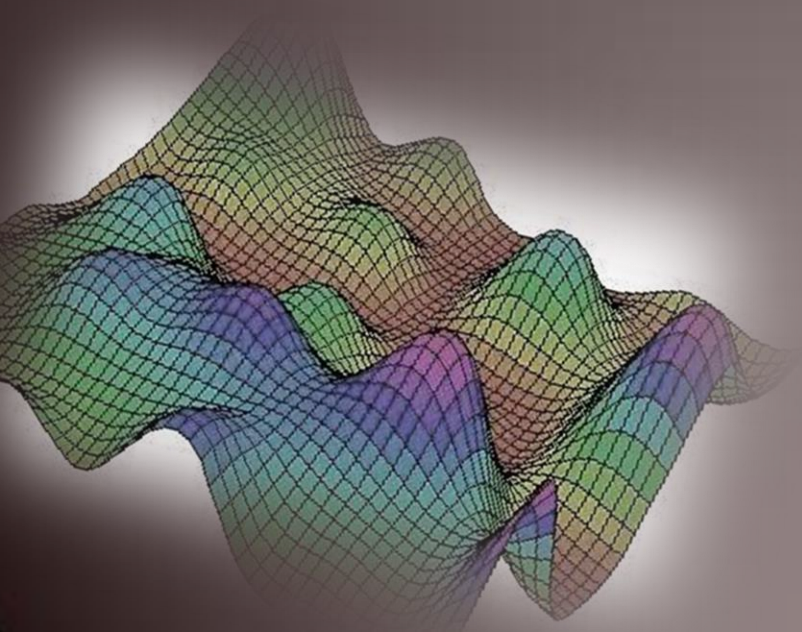


function y =
load kamen.mat options = optimset;
close all fminunc
theta(i+1,M+1) = (2*dx*K3*Tz + 4*theta(i,M)
hold
linspac
clc
format compact
fminsearch

Osnove rada u MATLAB Optimization Toolbox-u



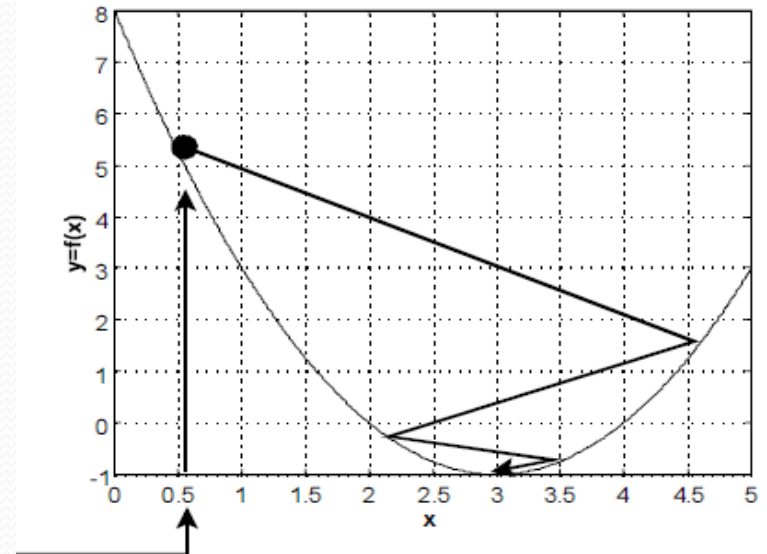
OPTIMIRANJE - određivanje **minimuma ili maksimuma funkcije** jedne ili više varijabli.

Uglavnom se svodi na određivanje vrijednosti nezavisnih varijabli x kada **funkcija cilja $f(x)$** ima najnižu vrijednost.

Funkcija cilja - matematički opis postavljenog cilja (kriterij optimalnosti).

$$\min_x f(x)$$

Minimizacijom se traži
lokalni minimum
funkcije cilja $f(x)$
u blizini početne
vrijednosti x_0



Početna točka se uglavnom zadaje

DEFINIRANJE FUNKCIJE CILJA I OGRANIČENJA

U području kemijskog inženjerstva, metode optimiranja se najčešće koriste za **procjenu parametara** u fizikalno-kemijskim i matematičkim modelima.

Funkcija cilja je tada obično neka pogreška ili odstupanje modela od eksperimentalnih podataka čiji se minimum traže.

U Matlabu se **maksimizacija** funkcije mora svesti na minimizaciju funkcije:

$$\max_x f(x),$$

Prvo se definira $g(x) = -f(x)$, i onda se minimizira g .

- optimiranje **s ograničenjima** (engl. *constraints* ili *bounds*)
- optimiranje **bez ograničenja**

DEFINIRANJE FUNKCIJE CILJA I OGRANIČENJA

U industrijskim postrojenjima i općenito tvrtkama potrebno je ostvariti brojne **ciljeve** na čije ostvarivanje utječu brojna **ograničenja**.

Ciljevi koji se najčešće postavljaju su:

- maksimiziranje zarade, količine proizvoda i iskorištenja kapaciteta, poboljšanje kvalitete proizvoda te
- minimalizacija troškova, trošenja resursa, vremena proizvodnje i transporta, minimalizacija pogrešaka i sl.

Funkcije cilja ovise o raznim varijablama za koje je karakteristično da zahtijevaju određenu količinu resursa.

Količina resursa kojim tvrtke ili pojedinci raspolažu predstavljaju **ograničenja**. Ograničenja mogu biti: novčana sredstva, vrijeme (rokovi), potražnja za proizvodima, nosivost i broj transportnih sredstava, ograničenja prostora, broj radnika i opreme, količina repromaterijala i proizvoda na skladištu, dostupnost sirovina, vode i energije,...

Da bi se ostvarilo uspješno vođenje poslovnih i proizvodnih procesa potrebno je upotrijebiti minimalnu količinu resursa za postizanje željenih ciljeva.

Za izračunavanje optimalnog iznosa varijabli potrebnih za postizanje cilja nužan je matematički opis ovisnosti funkcije cilja (i funkcija ograničenja) o varijablama.

METODE OPTIMIRANJA

- Kada su funkcija cilja i ograničenja **linearne funkcije** varijabli primjenjuju se metode **linearnog programiranja** (*Linear Programming* (LP)). Dosta se koriste u ekonomiji (maksimizacija profita, minimizacija troškova,...) , prehrambenoj, poljoprivrednoj i ostaloj proizvodnji te se mogu riješavati grafički, analitički i simpleks metodom.
- Kada je funkcija cilja kvadratna funkcija s linearnim ograničenjima primjenjuje se **kvadratno optimiranje** (*Quadratic Programming* (QP)).
- Postoje brojni slučajevi u kojima veze među parametrima u funkciji cilja i/ili funkcijama ograničenja nisu linearne tako da ih je nemoguće riješiti primjenom klasične simpleks metode stoga se razvila posebna grana optimiranja koje se naziva **nelinearno programiranje** (*Nonlinear Programming*), (NP). Mogu se javiti tri slučaja:
 - **Linearna funkcija cilja** sa nelinearnim ograničenjima
 - **Nelinearna funkcija cilja** sa linearnim ograničenjima
 - **Nelinearna funkcija cilja** sa nelinearnim ograničenjima

Solveri za optimiranje u Matlab Optimization Toolboxu

Linearni i kvadratni problemi minimizacije.

linprog - Linearno programiranje

quadprog - Kvadratno programiranje.

Nelinearno rješavanje jednadžbi

fzero - Skalarno nelinearno *zero finding*.

fsolve - Nelinearni sustav jednadžbi.

Linearna metoda najmanjih kvadrata.

lsqlin - sa linearnim ograničenjima.

lsqnonneg - sa nenegativnim ograničenjima.

Nelinearna minimizacija funkcija

fminbnd - skalarna s granicama (*bounds*).

fmincon - Viševerižinska s ograničenjima

fminsearch - Viševerižinska bez ograničenja, *Nelder-Mead metoda*.

fminunc - Viševerižinska bez ograničenja.

fseminf - Viševerižinska sa (*semi-infinite*) ograničenjima.

Nelinearna metoda najmanjih kvadrata

lsqcurvefit - nelinearni *curvefitting* preko najmanjih kvadrata (sa granicama).

lsqnonlin - nelinearna metoda najmanjih kvadrata sa granicama.

Nelinearna minimizacija višekriterijalnih (*multi-objective*) funkcija

fgoalattain - Viševerižinsko *goal attainment* optimiranje

fminimax - Viševerižinsko *minimax* optimiranje.

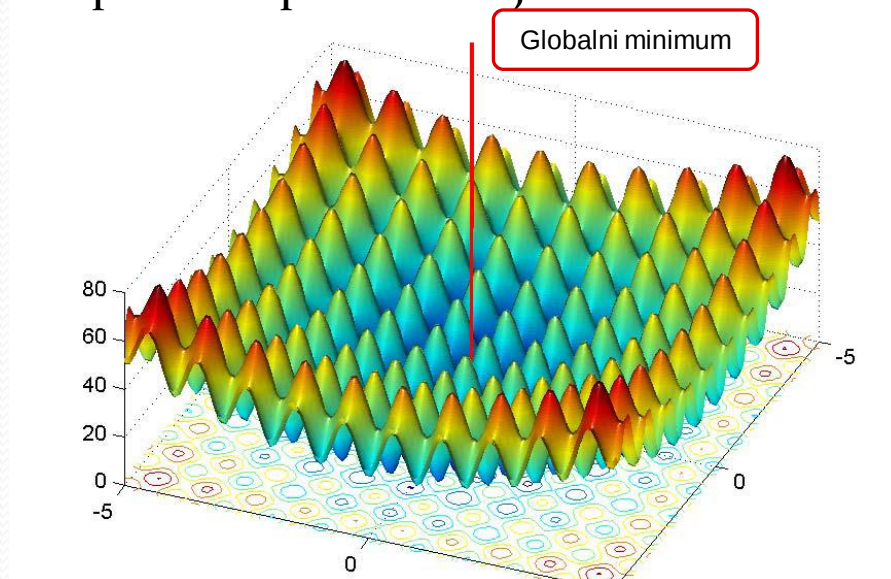
Ovisno o **tipu funkcije cilja** i **tipu ograničenja** iz sljedeće tablice mogu se odabrati prikladni **solveri** :

Constraint Type	Objective Type				
	Linear	Quadratic	Least Squares	Smooth nonlinear	Nonsmooth
None	n/a ($f = \text{const}$, or $\min = -\infty$)	quadprog, Information	\, lsqcurvefit, lsqnonlin, Information	fminsearch, fminunc, Information	fminsearch, *
Bound	linprog, Information	quadprog, Information	lsqcurvefit, lsqlin, lsqnonlin, lsqnonneg, Information	fminbnd, fmincon, fseminf, Information	fminbnd, *
Linear	linprog, Information	quadprog, Information	lsqlin, Information	fmincon, fseminf, Information	*
General smooth	fmincon, Information	fmincon, Information	fmincon, Information	fmincon, fseminf, Information	*
Discrete	intlinprog, Information	*	*	*	*

* relevantni solveri se nalaze u funkcijama Global Optimization Toolboxa.

Pronalaženje globalnog optimuma

Globalni optimum je točka gdje funkcija ima najmanju (ako se traži minimum) ili najveću (ako se traži maksimum) vrijednost. **Lokalni optimum** je točka gdje je vrijednost funkcije manja ili veća nego u okolnim točkama, ali nije najmanja ili najveća u cijelom prostoru pretraživanja.



3D prikaz funkcije Rastrigin

Globalno optimiranje u MATLABu:

- *Genetic Algorithm & Multiobjective Genetic Algorithm (GA)*
- *Simulirano kaljenje (Simulated Annealing (SA))*
- *Pretraživanje uzorkom (Pattern search (Direct search))*

Ograničenja (engl. *Constraints*)

Granice (engl. *Bounds*)

Rješenje x se nalazi u okviru donje i gornje granice ($x \geq l$ i $x \leq u$).

Ako su granice rješenja poznate može se brže i pouzdanije doći do optimalnog rješenja.

- Granice se zadaju kao vektor duljine x , ili kao matrica sa istim brojem elemenata kao kod vektora x .
- Ako određena komponenta nema donju ili gornju granicu, napišite $-\text{Inf}$ za tu granicu.

Ograničenja linearne nejednadžbe (engl. *linear inequality constraints*)

Oblik : $A \cdot x \leq b$

Kada je A matrica $m \times n$, postoji m ograničenja na varijabli x sa n komponenti.
 b je m -komponentni vektor.

Na primjer:

$$x_1 + x_3 \leq 4,$$

$$2x_2 - x_3 \geq -2,$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \geq 9.$$

$$m = 3, n = 4.$$

Optimization toolbox zahtjeva da su ograničenja nejednadžbe u obliku $c_i(x) \leq 0$ ili $A \cdot x \leq b$.

Ograničenje *veće od* izražava se kao ograničenje *manje od* množeći ga sa -1 .

Ograničenje u obliku $c_i(x) \geq 0$ ekvivalentno je ograničenju $-c_i(x) \leq 0$.

Ograničenje u obliku $A \cdot x \geq b$ ekvivalentno je ograničenju $-A \cdot x \leq -b$.

Ograničenja linearne jednadžbe (engl. *Linear Equality Constraints*)

Oblik: **$Aeq \cdot x = beq$** ,

predstavljaju m jednadžbi sa n komponentnim vektorom x .

Aeq je $m \times n$ matrica i beq je m -komponentni vektor.

Za linearna ograničenja ne treba zadavati gradijente, automatski se računaju. Za linearna ograničenja ne treba Hessian.

Nelinearna ograničenja (engl. *Nonlinear Constraints*)

Nelinearna ograničenja nejednadžbe imaju oblik **$c(x) \leq 0$** , gdje je c vektor ograničenja, jedna komponenta za svako ograničenje.

Nelinearna ograničenja jednakosti su u obliku **$ceq(x) = 0$** .

Kod funkcija s nelinearnim ograničenjima moraju se zadati funkcije c i ceq , ako ne postoje ostavite prazno polje `[]`.

Algoritmi solvera u Optimization toolbox-u

fmincon algoritmi

'interior-point'
'trust-region-reflective'
'sqp'
'active-set'

Za postavke algoritma u naredbenoj
liniji koristite `optimoptions (optimset)`.

fsolve algoritmi

'trust-region-dogleg'
'trust-region-reflective'
'levenberg-marquardt'

fminunc algoritmi

'trust-region' (formerly LargeScale = 'on')
'quasi-newton' (formerly LargeScale = 'off')

Algoritmi najmanjih kvadrata

lsqlin ima tri algoritma:

'trust-region-reflective' (formerly LargeScale = 'on')

'active-set' (formerly LargeScale = 'off')

'interior-point'

lsqcurvefit i **lsqnonlin** imaju dva algoritma:

'trust-region-reflective'

'levenberg-marquardt'

LP algoritmi (**linprog**)

'interior-point'

'dual-simplex'

'simplex'

'active-set'

QP algoritmi (**quadprog**)

'interior-point-convex'

'trust-region-reflective'

'active-set'

VRSTE OPTIMIRANJA UZ PRIMJENU RAZLIČITIH SOLVERA

Type	Formulation	Solver
Scalar minimization	$\min_x f(x)$ such that $lb < x < ub$ (x is scalar)	fminbnd
Unconstrained minimization	$\min_x f(x)$	fminunc, fminsearch
Linear programming	$\min_x f^T x$ such that $A \cdot x \leq b, Aeq \cdot x = beq, lb \leq x \leq ub$	linprog
Mixed-integer linear programming	$\min_x f^T x$ such that $A \cdot x \leq b, Aeq \cdot x = beq, lb \leq x \leq ub$, $x(intcon)$ is integer-valued.	intlinprog
Quadratic programming	$\min_x \frac{1}{2} x^T H x + c^T x$ such that $A \cdot x \leq b, Aeq \cdot x = beq, lb \leq x \leq ub$	quadprog
Constrained minimization	$\min_x f(x)$ such that $c(x) \leq 0, ceq(x) = 0, A \cdot x \leq b, Aeq \cdot x = beq$, $lb \leq x \leq ub$	fmincon
Semi-infinite minimization	$\min_x f(x)$ such that $K(x, w) \leq 0$ for all w , $c(x) \leq 0, ceq(x) = 0$, $A \cdot x \leq b, Aeq \cdot x = beq, lb \leq x \leq ub$	fseminf

Objective Type	Solvers
Scalar	fmincon fminunc fminbnd fminsearch fseminf fzero
Nonlinear least squares	lsqcurvefit lsqnonlin
Multivariable equation solving	fsolve
Multiobjective	fgoalattain fminimax
Linear programming	linprog
Mixed-integer linear programming	intlinprog
Linear least squares	lsqlin lsqnonneg
Quadratic programming	quadprog

Uvođenje derivacija

Za `fmincon` i `fminunc`, u funkciju cilja mogu se uključiti gradijenti kao i Hessiani ($H_{i,j}(x) = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$).

Solver	Algorithm	Gradient	Hessian
fmincon	active-set	Optional	No
	interior-point	Optional	Optional separate function (see "Hessian" on page 14-33)
	sqp	Optional	No
	trust-region-reflective	Required	Optional
fminunc	trust-region	Required	Optional
	quasi-newton	Optional	No

Ako se gradijenti ne računaju, solveri procjenjuju gradijente preko konačnih razlika. Ako uključite gradijente, solver može uštedjeti vrijeme i biti točniji te dovesti do rješenja u par iteracija.

Kod problema s ograničenjima, potrebno je uključiti gradijent nelinearne funkcije s ograničenjima, i postaviti `GradConstr` option na 'on'.

U MATLABU se optimiranje može provesti u:

- Naredbenom prozoru (Command Window) te u
 - Optimization toolbox app (GUI) - upisom `optimtool` u komandnoj liniji
-
- **Funkcija cilja** se definira kao *funkcijska datoteka* ili kao *anonymous* funkcija.
 - **Ograničenja** se definiraju u *posebnim datotekama* ili kao *anonymous* funkcije.

fminsearch , fminunc

Nelinearne minimizacije funkcije cilja od više argumenata bez ograničenja

Sintaksa:

```
x = fminsearch(fun,x0)
x = fminsearch(fun,x0,options)
[x,fval,exit_flag] = fminsearch(fun,x0,options)
```

```
x = fminunc(fun,x0)
x = fminunc(fun,x0,options)
[x,fval,exit_flag] = fminunc(fun,x0,options)
```

x0 - početna vrijednost parametara

fun - funkcija cilja

x - optimirani vektor

fval - vrijednost funkcije cilja nakon optimiranja

exit_flag - vrijednost koja opisuje kako je optimiranje završeno:

- 0 - dostignut maksimalni broj iteracija, ali ne i tolerancija na promjenu funkcije cilja ili varijable x
- >0 - uspješno završeno optimiranje
- <0 - funkcija ne konvergira

Trenutne opcije dobiju se naredbom:

```
oldopt = optimset
```

Postavljanje novih opcija:

```
opt = optimset(oldopt,'parameter',vrijednost,'parameter', vrijednost, ...)
```

fminbnd

Određuje minimum funkcije $f(x)$ jedne varijable x na intervalu $x_L < x < x_U$

- x_L - donja granica varijable x
- x_U - gornja granica varijable x
- $f(x)$ - je funkcija skalarnog argumenta.

Sintaksa

```
x = fminbnd(fun,x1,x2)
x = fminbnd(fun,x1,x2,options)
x = fminbnd(fun,x1,x2,options,P1,P2,...)
[x,fval] = fminbnd(...)
[x,fval,exitflag] = fminbnd(...)
```

- `fun` - funkcija cilja
- `x1, x2` - granice
- `options` - opcije koje određuju optimiranje
- `x` - optimalna vrijednost
- `fval` - optimalna vrijednost funkcije cilja
- `exitflag` - određuje način završetka optimiranja