Sveučilište u Zagrebu
Fakultet kemijskog
inženjerstva i tehnologije

Miroslav Jerković
Ivica Gusić

Matematika 2

Nastavni materijal

Zagreb 2022.

SADRŽAJ

1 NEODREĐENI INTEGRAL I METODE RAČUNANJA

U lekciji se razmatra neodređeni integral funkcije - pojam koji je inverzan pojmu derivacije funkcije. Naziv dolazi od toga što neodređeni integral funkcije nije jedna funkcija (dakle, nije jednoznačno određen), već skup funkcija - međusobno povezanih.
Također, navodi se tablica integrala nekih važnih elementarnih funkcija i objašnjavaju osnovne metode određivanja integrala.

1.1 PRIPADNI PROBLEM

U matematici samoj, napose pri matematičkoj obradi inženjerskih problema, jedan od najvažnijih pojmova jest pojam inverzne operacije: oduzimanje je inverzno zbrajanju i zasniva se na pojmu suprotnih brojeva, napose negativnih koji su suprotni pozitivnima. Slično je s množenjem i dijeljenjem, s pojmom funkcije i njoj inverzne funkcije. Ako matricu shvatimo kao preslikavanje prostora, onda se inverzno preslikavanje ostvaruje preko inverzne matrice itd.
Pojam neodređenog integrala (ili, jednostavno, integrala) inverzan je, na neki način, pojmu derivacije. Deriviranje se može shvatiti kao operacija koja svakoj funkciji pridružuje njenu derivaciju. Integriranje se po mnogo čemu ponaša kao inverzna operacija te operacije.

1.2 POTREBNO PREDZNANJE

Potrebno je poznavati:

1. Pojam derivacije funkcije i osnovna svojstva derivacije (kao operacije).
2. Osnovne elementarne funkcije: potencije i korijene, eksponencijalne i logaritamske, trigonometrijske i arkus funkcije, a naročito tablicu derivacija tih funkcija.
3. Oznaku $\frac{df(x)}{dx}$ za derivaciju funkcije f. Dakle:

   $$f'(x) = \frac{df(x)}{dx},$$

   što je *diferencijalni zapis* derivacije funkcije, kao omjer diferencijala funkcije $df(x)$ - tradicionalno, beskonačno malog prirasta funkcije, i diferencijala argumenta dx - beskonačno malog prirasta argumenta, koje se zasniva na relaciji

$$f'(x) \approx \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}.$$

Derivacija kao omjer diferencijala često se piše kao

$$df(x) = f'(x)dx$$

i ta jednakost ima precizno matematičko značenje koje tu ne tumačimo.

1.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

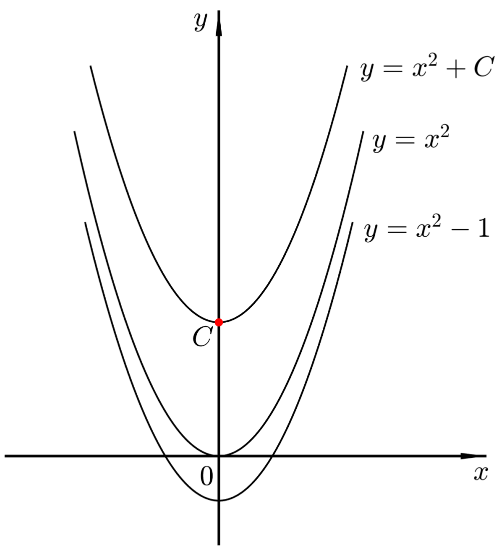
1.3.1 Definicija neodređenog integrala funkcije

Razmotrimo sljedeći problem:
Treba odrediti funkciju F *tako da bude* $F'(x) = 2x$.

Problem ćemo riješiti *pogađanjem* koje se temelji na znanju derivacija potencija, odnosno na činjenici da je $(x^2)' = 2x$ i na činjenici da se dodavanjem konstante derivacija ne mijenja:

$$(x^2)' = (x^2+1)' = (x^2-3)' = \cdots = 2x.$$

Općenito, $(x^2 + C)' = 2x$ za svaku konstantu C, Slika 1.1.



Slika 1.1: Skup primitivnih funkcija funkcije $f(x) = 2x$.
Krivulje $y = x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$

Matematički se ovaj problem i njegovo rješenje zapisuje kao

$$\int 2x dx = x^2 + C.$$

Kažemo da je *skup funkcija* $x^2 + C$ **neodređeni integral funkcije** $2x$.

Neka su f i F funkcije definirane na nekom otvorenom intervalu. Intuitivno je jasno, a može se i strogo matematički dokazati da, ako vrijedi $F' = f$, onda je svaka funkcija kojoj je derivacija jednaka f oblika $F(x) + C$ za neku realnu konstantu C.
Općenito, činjenicu $F'(x) = f(x)$ zapisujemo kao

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

i čitamo: "*integral ef od iks de iks je veliko ef od iks*". Oznaka dx ima i strogo matematičko značenje, ulogu te oznake upoznat ćemo poslije. Izraz $F(x) + C$ znači skup funkcija $\{F(x) + C\}$, međutim, zbog jednostavnosti, vitičaste zagrade izostavljamo. Kažemo da je *skup funkcija* $F(x) + C$ neodređeni integral funkcije f. Također, kažemo da je svaka od gornjih funkcija $F(x) + C$ **primitivna funkcija** funkcije f.

Uočimo da deriviranje i integriranje nisu *doslovce* inverzne operacije, već da se mogu shvatiti kao takve. Naime, ako pođemo od funkcije f pa integriramo, dobit ćemo skup funkcija $\{F(x) + C\} = \int f(x)dx$. Ako bilo koju od tih funkcija deriviramo, vratit ćemo se u f jer je $(F(x) + C)' = f(x)$. Kraće:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Ako pođemo od funkcije F pa je najprije deriviramo, potom rezultat integriramo, dobit ćemo skup funkcija $\{F(x) + C\}$ među kojima je i funkcija F, koju dobijemo za $C = 0$:

$$\int F'(x)dx = \{F(x) + C\}.$$

Primjer 1.1. [Neodređeni integral]
Kako je $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, vidimo da je

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$$

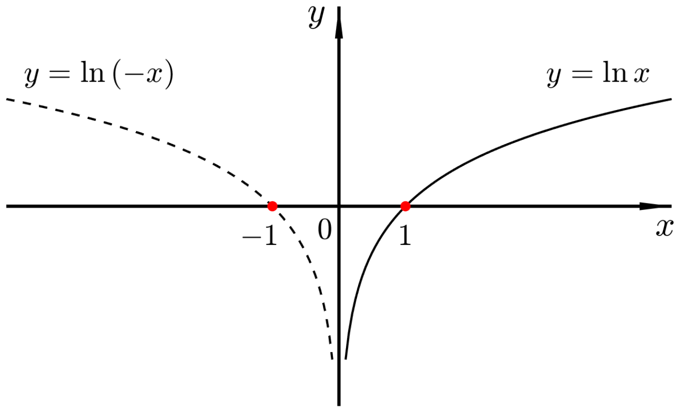
i to vrijedi za $x > 0$. Također, kako je $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$, vidimo da je

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln(-x) + C$$

i to vrijedi za $x < 0$. Ove dvije derivacije mogu se zapisati kao $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$, Slika 1.2. Ova dva integrala obično se zapisuju kao jedan:

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C.$$

Pri tom za $x > 0$ umjesto C može se uzeti bilo koja konstanta C_1, a za $x < 0$ bilo koja konstanta C_2. To je zato što funkcija $\frac{1}{x}$ nije definirana na otvorenom intervalu već na uniji dvaju otvorenih intervala.



Slika 1.2: Graf funkcije $f(x) = \ln|x|$

$\square$

1.3.2 Tablica značajnih integrala

Tablica integrala zasniva se na tablici derivacija **??** i na definiciji neodređenog integrala, uz napomenu da $\int f(x)dx = F(x) + C$ znači da je $F' = f$.

Ovu tablicu treba znati napamet:

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ jer je $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$.
   Ovo vrijedi za sve realne eksponente (a ne samo za prirodne), osim $n = -1$.
   $\int x^{-1} dx = \ln|x| + C$, tj. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$ jer je $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

2. $\int \cos x dx = \sin x + C$ jer je $(\sin x)' = \cos x$
   $\int \sin x dx = -\cos x + C$ jer je $(\cos x)' = -\sin x$
   $\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \operatorname{tg} x + C$ jer je $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
   $\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\operatorname{ctg} x + C$ jer je $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

3. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \operatorname{Arcsin} x + C$ jer je $(\operatorname{Arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
   $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{Arctg} x + C$ jer je $(\operatorname{Arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$

4. $\int e^x dx = e^x + C$ jer je $(e^x)' = e^x$
   $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ jer je $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$
   jer je $(\ln(x + \sqrt{x^2+1}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
   $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C$ za $x > 1$
   jer je $(\ln(x + \sqrt{x^2-1}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
   $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln(-x - \sqrt{x^2-1}) + C$ za $x < -1$
   jer je $(\ln(-x - \sqrt{x^2-1}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

Napomene o oznakama:

1. Umjesto $\int 1 \cdot dx$ obično se piše $\int dx$. Dakle:

$$\int dx = x + C \quad \text{jer je} \quad x' = 1.$$

2. Katkad se, radi jednostavnosti, oznaka dx stavlja u brojnik. Na primjer:

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx \text{ piše se kao } \int \frac{dx}{1+x^2},$$
$$\int \frac{1}{x}dx \text{ piše se kao } \int \frac{dx}{x} \text{ itd.}$$

1.3.3 Svojstva neodređenog integrala

Opća je činjenica da su svojstva operacije analogna svojstvima njima inverznih operacija i da se jedna izvode iz drugih. Tako je i s derivacijom i integralom (bar djelomično, jer oni nisu doslovce inverzni). Neka od svojstava smo prešutno iskoristili kod izrade tablice integrala.

1. (i) Integral zbroja je zbroj integrala:

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

jer je $(f+g)' = f' + g'$

(ii) Integral razlike je razlika integrala:

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

jer je $(f-g)' = f' - g'$

2. Konstanta koja množi može se izvući ispred integrala:

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx$$

jer je $(\lambda f)' = \lambda f'$.

Postoje i svojstva integrala analogna formulama za derivaciju umnoška funkcija i formuli za derivaciju složene funkcije, ali to ćemo obraditi kao metode računanja integrala.

Primjer 1.2. [Primjena svojstava integrala 1. i 2.]

$$\int \left(3\cos x + \frac{2}{x} - 5x^3 + 4\right) dx = 3\int \cos x dx + 2\int \frac{dx}{x} - 5\int x^3 dx + 4\int dx$$
$$= 3\sin x + 2\ln|x| - 5\frac{x^4}{4} + 4x + C.$$

Tu smo, za sve integrale, na kraju dodali jednu konstantu C. □

1.3.4 Nastavak svojstava neodređenog integrala: metoda parcijalne integracije

Iz formule za derivaciju umnoška funkcija

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

malim razmještanjem i integriranjem dobijemo

$$\begin{aligned}\int f(x)g'(x)dx &= \int [f(x)g(x)]'dx - \int g(x)f'(x)dx \\ &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.\end{aligned}$$

Ako uvrstimo: $dg(x) = g'(x)dx$, odnosno $df(x) = f'(x)dx$ i ako, poštujući tradiciju, pišemo v umjesto g i u umjesto f i ako ne stavljamo argument x, onda se to može kraće (i malo nekorektno - ali lakše se pamti) zapisati kao

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Ta se formula zove **formula za parcijalno integriranje**.

Primjer 1.3. [Primjena formule parcijalne integracije]
Treba izračunati $\int x \cos x dx$. Tu možemo staviti:

$u = x$, $du = dx$

$dv = \cos x dx$, $v = \sin x$

pa je, prema formuli parcijalne integracije:

$$\begin{aligned}\int x \cos x dx &= x \cdot \sin x - \int \sin x dx \\ &= x \sin x - (-\cos x) + C \\ &= x \sin x + \cos x + C.\end{aligned}$$

Provjera:
$(x \sin x + \cos x + C)' = 1 \cdot \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x.$ □

1.3.5 Nastavak svojstava neodređenog integrala - zamjena (supstitucija) varijable u neodređeni integral

Postoje dvije vrste zamjena u neodređeni integral $\int f(x)dx$. Prva se zasniva na zamjeni $h(x) = t$, a druga na $x = g(t)$, za pogodno odabrane funkcije h i g. Ova druga često se naziva **prava supstitucija** jer se u njoj varijabla x izravno zamjenjuje funkcijom $g(t)$ gdje je t nova varijabla.

Prva vrsta zamjene. Tu se u $\int f(x)dx$ stavi $h(x) = t$ za neku pogodno odabranu funkciju h. Diferenciranjem relacije $h(x) = t$ dobije se $h'(x)dx = dt$. Nakon uvrštavanja dobije se integral u varijabli t. Ako taj integral uspijemo riješiti, onda u to rješenje umjesto t stavimo $h(x)$, čime se dobije rješenje početnog integrala. Sažeti zapis ove zamjene:

$$[h(x) = t,\ h'(x)dx = dt].$$

Primjer 1.4. [Prva vrsta zamjene]
Izračunajmo:

(i) $\int \cos(2x)dx$

(ii) $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{x^2+1}}$.

(i) Stavimo $2x = t$, $2dx = dt$ pa je

$$\int \cos(2x)dx = \int \cos t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int \cos t\,dt$$
$$= \frac{\sin t}{2} + C = \frac{\sin(2x)}{2} + C.$$

Dakle, ovdje smo izabrali da bude $h(x) = 2x$ itd.
Provjera:

$$\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)' = \frac{2\cos(2x)}{2} = \cos(2x).$$

(ii)

$$\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = [x^2 + 1 = t,\ 2xdx = dt]$$
$$= \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{-\frac{1}{2}}dt$$
$$= \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{x^2+1} + C,$$

što se lako provjeri. Napomenimo da smo ovdje izabrali $h(x) = x^2 + 1$.
U nastavku pokažimo da smo gornji integral mogli i lakše riješiti da smo izabrali $h(x) = \sqrt{x^2+1}$. Naime, tada bi bilo $\sqrt{x^2+1} = t$. Umjesto da ovu relaciju odmah diferenciramo, najprije je kvadrirajmo. Time ćemo izbjeći derivaciju drugog korijena. Dobijemo $x^2 + 1 = t^2$ pa odatle diferenciranjem $2xdx = 2tdt$. Sad je

$$\int \frac{2xdx}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{2tdt}{t} = \int 2dt = 2t + C = 2\sqrt{x^2+1} + C,$$

kao i prije. □

Primjer 1.5. [Računanje integrala ako je brojnik derivacija nazivnika]

$$\int \frac{h'(x)}{h(x)}dx = [h(x) = t,\ h'(x)dx = dt] = \int \frac{dt}{t}$$
$$= \ln|t| + C = \ln|h(x)| + C,$$

što se lako provjeri i izravnim deriviranjem. Na primjer:

(i)
$$\int \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln(x^2+1) + C$$
jer je brojnik derivacija nazivnika (naime, $(x^2+1)' = 2x$) i $x^2 + 1 > 0$ za sve x pa ne treba apsolutna vrijednost.

(ii)
$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \ln|\sin x| + C.$$

□

Primjer 1.6. [Kombinacija parcijalne integracije i supstutucije]

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{Arcsin} x dx &= [u = \operatorname{Arcsin} x,\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\ dv = dx,\ v = x] \\
&= \operatorname{Arcsin} x \cdot x - \int x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [1 - x^2 = t,\ -2xdx = dt] \\
&= x \operatorname{Arcsin} x - \int \frac{\frac{dt}{-2}}{\sqrt{t}} \\
&= x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{t} + C \\
&= x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2} + C.
\end{aligned}$$

□

Druga vrsta zamjene - prava supstitucija. Iz formule za derivaciju složene funkcije
$$[F(g(t))]' = F'[g(t)]g'(t)$$
uvrštavanjem $f := F'$, $g(t) = x$ i integriranjem, dobijemo
$$\int f[g(t)]g'(t)dt = \int [F(g(t))]'dt = F(g(t)) + C = F(x) + C = \int f(x)dx,$$
tj.
$$\int f(x)dx = \int f[g(t)]g'(t)dt.$$
Najprije se riješi $\int f[g(t)]g'(t)dt$. Iz tog rješenja dobije se rješenje početnog integrala uvrštavanjem $t = g^{-1}(x)$, gdje je g^{-1} inverzna funkcija funkcije g. Dakle, za razliku od zamjene prvog tipa, gdje h nije trebala imati inverznu funkciju, ovdje je funkcija g mora imati. Ukratko, $\int f(x)dx$ računa se zamjenama
$$x = g(t),\quad dx = g'(t)dt,\quad t = g^{-1}(x).$$

Primjer 1.7. [Druga vrsta zamjene - prava supstitucija]
Izračunajmo $\int \sqrt{1-x^2}dx$.
Koristimo zamjenu: $x = \sin t$, $dx = \cos t dt$ za $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$; $t = \operatorname{Arcsin} x$. Dobijemo:

$$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int \sqrt{\cos^2 t}\cos t dt = \int \cos^2 t dt$$

jer je u ovim uvjetima $\cos t \geqslant 0$. Sad iskoristimo relacije

$$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2} \quad \text{i} \quad \sin 2t = 2\sin t \cos t$$

pa dobijemo

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt &= \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}dt + C \\
&= \frac{\operatorname{Arcsin} x}{2} + \frac{2\sin(\operatorname{Arcsin} x)\cos(\operatorname{Arcsin} x)}{4} + C \\
&= \frac{\operatorname{Arcsin} x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C.
\end{aligned}$$

Naime, $\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$ i $\cos(\operatorname{Arcsin} x) = \sqrt{1-\sin^2(\operatorname{Arcsin} x)} = \sqrt{1-x^2}$.
Dakle:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\operatorname{Arcsin} x}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C,$$

što je lako provjeriti. □

1.4 PRIMJENA MATLAB-A

1.4.1 Računanje neodređenog integrala. Naredba `int`

Za računanje neodređenog integrala koristimo naredbu `int`:

```
syms x
int(sin(x))                                    % -cos(x)
```

Kod integrala gdje nije jasno po kojoj varijabli integriramo, dobit ćemo upozorenje:

```
syms x
int(1)
```

```
Check for incorrect argument data type or missing argument
in call to function 'int'.
```

U tom slučaju potrebno je pod naredbom `int`, osim funkcije, navesti i varijablu integracije:

```
syms x
int(1, x)                                              % x
```

Izračunajmo neke od integrala koje smo u Lekciji rješavali metodama parcijalne integracije i zamjene varijable:

```
syms x
int(x*cos(x))                          % cos(x) + x*sin(x)
int(2*x/sqrt(x^2 + 1))                 % 2*(x^2 + 1)^(1/2)
int(sqrt(1 - x^2))      % asin(x)/2 + (x*(- x^2 + 1)^(1/2))/2
```

Vidimo da i te integrale u MATLAB-u možemo riješiti izravnim korištenjem naredbe `int`. Ipak, ukoliko bismo u prvom integralu htjeli rekonstruirati postupak parcijalne integracije, možemo koristiti naredbu `integrateByParts`, o čemu možete više pročitati u MATLAB dokumentaciji. Za preostala dva integrala pokazat ćemo u 1.4.4 kako se može uvesti zamjena varijable.

Pogledajmo rezultate naredbe `int` za integrale iz Tablice u 1.3.2:

naredba	rezultat
`int(x^n, 'IgnoreSpecialCases', true)`	`x^(n + 1)/(n + 1)`
`int(x^(-1))`	`log(x)`
`int(cos(x))`	`sin(x)`
`int(sin(x))`	`-cos(x)`
`int(1/cos(x)^2)`	`tan(x)`
`int(1/sin(x)^2)`	`-cot(x)`
`int(1/sqrt(1 - x^2))`	`asin(x)`
`int(1/(1 + x^2))`	`atan(x)`
`int(exp(x))`	`exp(x)`
`int(a^x)`	`a^x/log(a)`
`int(1/sqrt(x^2 + 1))`	`asinh(x)`
`int(1/sqrt(x^2 - 1))`	`log(x + (x^2 - 1)^(1/2))`

Tablica 1.1: Rezultati naredbe `int` za integrale iz Tablice u 1.3.2

Primijetimo:

- u naredbi za integriranje funkcije $f(x) = x^n$ dodali smo argument `'IgnoreSpecialCases'` s argumentom `true` kako bismo izostavili slučaj $f(x) = \frac{1}{x}$ koji se integrira drukčije
- kao rezultat `int(x^(-1))` dobivamo kao rezultat `log(x)`, što je točan rezultat samo za $x > 0$ (za $x < 0$ rezultat bi trebao biti `log(-x)`, što MATLAB izostavlja)
- kao rezultat `int(1/sqrt(x^2 + 1)` dobivamo `asinh(x)`, što je inverzna funkcija funkcije sinus hiperbolni. To se na prvi pogled razlikuje od $\ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ kako je navedeno u Tablici u 1.3.2. Međutim, pomoću `isAlways` može se pokazati da vrijedi $\operatorname{arcsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
- kao rezultat `int(1/sqrt(x^2 - 1))` dobivamo rezultat samo za $x > 1$, dok je rezultat za $x < -1$ izostavljen.

1.4.2 Integrali koji se ne mogu zapisati pomoću elementarnih funkcija. Naredbe `ei`, `erfi`, `fresnels`, `sinint` i `cosint`

Za funkcije kojima se integral ne može zapisati pomoću elementarnih funkcija, naredba `int` rezultat daje pomoću tzv. specijalnih funkcija:

```
syms x
```

```
int(sin(x^2))
      % (2^(1/2)*pi^(1/2)*fresnels((2^(1/2)*x)/pi^(1/2)))/2
int(sin(1/x))                        % x*sin(1/x) - cosint(1/x)
int(sin(x)/x)                                    % sinint(x)
int(exp(x^2))                          % (pi^(1/2)*erfi(x))/2
int(exp(x)/x)                                        % ei(x)
int(exp(x)*log(x))                     % exp(x)*log(x) - ei(x)
```

O specijalnim funkcijama `ei`, `erfi`, `fresnels`, `sinint` i `cosint`, koje se pojavljuju u gornjim rezultatima, može se više pronaći u MATLAB dokumentaciji.

1.4.3 Integriranje funkcija s parametrima

Naredba `int` može integrirati i funkcije s parametrima, ali pritom moramo biti oprezni:

```
syms a b x
int(sin(a*x), x)                                  % -cos(a*x)/a
int(1/(a^2 + x^2), x)                             % atan(x/a)/a
int(1/(a^2 + b^2*x^2), x)                 % atan((b*x)/a)/(a*b)
int(1/(x + a), x)                                  % log(x + a)
int(1/(x - a), x)                                % log(- x + a)
int(1/sqrt(a^2 - x^2))                % atan(x/(a^2 - x^2)^(1/2))
int(1/sqrt(a^2 + x^2))               % log(x + (x^2 + a^2)^(1/2))
int(1/sqrt(-a^2 + x^2))              % log(x + (x^2 - a^2)^(1/2))
int(1/sqrt(-a^2 - x^2))             % atan(x/(- a^2 - x^2)^(1/2))
```

Primijetimo:

- za `int(1/(x + a))` ponuđen je rezultat za $x + a > 0$, dok je za `int(1/(x - a))` rezultat dan za $x - a < 0$
- za `int(1/sqrt(a^2 - x^2))` rezultat se naizgled razlikuje od uobičajenog $\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$. U jednakost se možemo uvjeriti pomoću `isAlways`. Uz to, prešutno se pretpostavlja da je $a > 0$, a tako je i kod ostalih integrala.
- integral `int(1/sqrt(-a^2 - x^2))` nema smisla jer je pod korijenom izraz kojemu su vrijednosti negativne, ali je MATLAB ipak ponudio rezultat (koji ima smisla u kompleksnom području).

1.4.4 Zamjena varijable u neodređeni integral. Naredba `changeIntegrationVariable`

Pokažimo prvu vrstu zamjenu varijable u neodređenom integralu na integralu iz Primjera 1.5 (ii). Kako bismo mogli izvršiti zamjenu, potrebno je najprije zaustaviti izvršavanje naredbe `int`, što činimo tako da joj dodamo argument `'Hold'` s vrijednošću `true`. Potom naredbom `changeIntegrationVariable` uvodimo odgovarajuću zamjenu:

```
syms x t
F = int(2*x/sqrt(x^2 + 1), 'Hold', true)
zamjena = changeIntegrationVariable(F, x^2 + 1, t)
```

```
zamjena = int(1/t^(1/2), t, 'Hold', true)
```

Dobili smo integral $\int \frac{dt}{\sqrt{t}}$ koji se može dalje rješavati korištenjem naredbe `release` za nastavak izvršavanja integracije. O naredbi `release` može se pročitati u MATLAB dokumentaciji.

Slično postupamo i kod druge vrste zamjene. Uvedimo zamjenu varijable u integral iz Primjera 1.7:

```
syms x t
F = int(sqrt(1 - x^2), 'Hold', true)
zamjena = changeIntegrationVariable(F, x, sin(t))
```

```
zamjena = int(cos(t)*(cos(t)^2)^(1/2), t, 'Hold', true)
```

Ako pokušamo izračunati novi integral, dobit ćemo:

```
release(zamjena)          % int(cos(t)*(cos(t)^2)^(1/2), t)
```

Vidimo da MATLAB nije uspio izračunati ovaj integral jer se pojavljuje drugi korijen iz $\cos^2(t)$ pa nije jasno hoće li se korjenovanjem dobiti $\cos t$ ili $-\cos t$. U tome bismo uspjeli da smo u naredbi `int` dodali argument `'IgnoreAnalyticConstraints'` s vrijednošću `'true'`.

1.5 PITANJA I ZADATCI

1. Izračunajte:
   (i) $\int xe^{-x}\,dx$
   (ii) $\int xe^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$
   (iii) $\int x^2e^x\,dx$
   (iv) $\int x\sin x\,dx$
   (v) $\int \ln x\,dx$
   (vi) $\int \mathrm{Arctg}\, x\,dx$

   Uputa: parcijalna integracija, jednom ili više puta.

2. Neka je $a > 0$. Izračunajte:
   (i) $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$
   (ii) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$
   (iii) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$

(iv) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

Posebno, izračunajte za $a = \sqrt{2}$.
Uputa: zamjena varijable $x = at$ i tablica integrala.

3. Izračunajte:
   (i) $\int \frac{2x-1}{x^2+1}\,dx$
   (ii) $\int \operatorname{tg} x\,dx$
   (iii) $\int \frac{1}{x \ln x}\,dx$

   Uputa: brojnik kao derivacija nazivnika ili rastavljanje razlomka.

4. Izračunajte $\int x\sqrt[3]{x^2 - 1}\,dx$.
   Uputa: koristite zamjenu $\sqrt[3]{x^2 - 1} = t$.

5. (i) Izračunajte $\int \sin x \cos x\,dx$.
   Uputa: zamjena $\sin x = t$. Poslije koristite zamjenu $\cos x = t$ pa usporedite rezultate.
   (ii) Riješite integral iz (i) koristeći se formulom $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$. Usporedite rezultate.

6. Izračunajte $\int \sqrt{a^2 - b^2x^2}\,dx$. Posebno za $a = \sqrt{2}$ i $b = 3$.
   Uputa: povežite sa Zadatkom 2 (iv).

7. Izračunajte $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$.
   Uputa: zamjena $x = e^t$.

2 PRIMJENA NEODREĐENOG INTEGRALA U INŽENJERSTVU

U lekciji se primjerima pokazuje važnost neodređenog integrala u primjenama:

1. Određuje se jednadžba radioaktivnog raspada.
2. Određuje se jednadžba hlađenja (odnosno zagrijavanja) tijela.
3. Određuje se jednadžba gibanja tijela po pravcu pri djelovanju konstantne sile.

2.1 PRIPADNI PROBLEM

Vidjeli smo da se derivacijom teoretski opisuju i kontroliraju najvažnija fizikalna svojstva: brzina promjene, rast, pad i prijelaz s jednog na drugi - lokalni ekstremi, ubrzani i usporeni rast i pad, prijelaz s ubrzanja na usporenje i obratno - točke infleksije, itd.
Sve to ide uz uvjet da poznajemo pravilo, tj. funkciju prema kojemu se proces odvija: položaj točke koja se giba po pravcu u ovisnosti o vremenu, vrijednost jedne veličine u procesu u ovisnosti o vrijednosti druge veličine itd.
Nažalost, u stvarnosti, obično ne poznajemo izravno jednadžbu, odnosno pravilo prema kojem se neki proces odvija, a to nas najviše zanima. Češće možemo, točno ili približno, opisati brzinu kojom se proces odvija, silu koja uvjetuje gibanje i slično. Vidjet ćemo kako se tada, koristeći se integralom i pojmom diferencijalne jednadžbe, može barem načelno riješiti problem određivanja pravila odvijanja procesa.

2.2 POTREBNO PREDZNANJE

Potrebno je poznavati:

1. (i) činjenicu da, ako su dvije veličine x i y povezane relacijom $y = f(x)$, onda se brzina promjene veličine y s obzirom na promjenu veličine x opisuje derivacijom $f'(x)$ funkcije f po x, tj. s $\frac{df}{dx}$, što se zapisuje kratko i kao y', odnosno $\frac{dy}{dx}$. Kraće:

$$\text{Brzina } v(x) \text{ od } y \rightsquigarrow y' = \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{df}{dx}$$

(ii) također, da se tada akceleracija promjene opisuje drugom derivacijom funkcije f po x. Kraće:

$$\text{Akceleracija } a(x) \text{ od } y \rightsquigarrow y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x) = \frac{d^2f}{dx^2}$$

2. pojam neodređenog integrala i vrijednost nekih jednostavnih integrala
3. činjenicu da je $\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$
4. činjenicu da je sila proporcionalna akceleraciji, a da je koeficijent proporcionalnosti masa (jedan od Newtonovih zakona).

2.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

2.3.1 Pojam diferencijalne jednadžbe

Već smo vidjeli da se brzina (čestice koja se giba po pravcu) dobije iz jednadžbe gibanja deriviranjem. To se kraće izražava malo nepreciznom rečenicom:

$$Brzina\ je\ derivacija\ puta\ po\ vremenu.$$

Naime, tu se ne derivira funkcija koja opisuje prijeđeni put u vremenu, već funkcija koja opisuje *položaj* čestice što se giba.

Obratan je problem:
Možemo li, barem teoretski, rekonstruirati gibanje čestice, tj. položaj u svakom trenutku t, *ako znamo brzinu u svakom trenutku* t*?*

Odgovor je da možemo, pod uvjetom da znamo položaj čestice u nekom (jednom konkretnom) trenutku t_0. Naime, označimo:

$y(t)$ položaj u trenutku t čestice koja se giba po y-osi. Ako nema zabune, pišemo samo y.

$v(t)$ brzina u trenutku t te čestice. Ako nema zabune, pišemo v.

Tada je, prema definiciji brzine, $v(t) := y'(t)$, tj. $v(t) := \frac{dy(t)}{dt}$ ili, kraće: $v := y'$, tj. $v := \frac{dy}{dt}$. Dakle:

$$y(t) = \int v(t)dt$$

ili, kraće, $y = \int vdt$.
Kako znamo, rješenje je skup primitivnih funkcija ovisnih o konstanti C, koju ćemo znati odrediti budemo li znali položaj u nekom trenutku t_0, tj. vrijednost $y(t_0)$. Zaključujemo da gibanje iz brzine možemo rekonstruirati rješavanjem sljedećeg sustava:

$$\begin{aligned} y'(t) &= v(t) \\ y(t_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Tu se $y' = v$ zove **diferencijalna jednadžba gibanja**, a $y(t_0) = y_0$ **početni uvjet**. Problem određivanja funkcije $y(t)$ ako su poznati $v(t)$ i y_0 zove se **Cauchyjev problem**. Analogan pristup vrijedi za svake dvije zavisne veličine u nekom procesu.

Primjer 2.1. [Cauchyjev problem]
Riješimo Cauchyjev problem

$$\begin{aligned} y' &= 2x \\ y(0) &= 1. \end{aligned}$$

Rješavamo odgovarajući integral, a potom konstantu C određujemo iz početnog uvjeta:

$$y = \int 2x\,dx = x^2 + C.$$

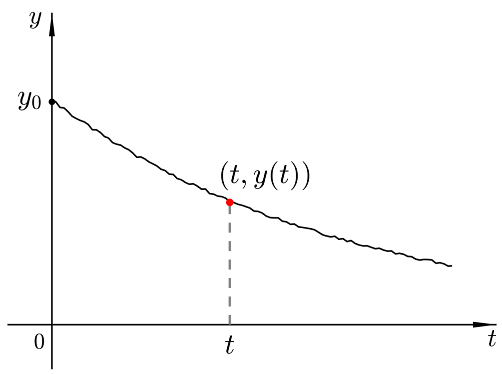
Iz $y(0) = 1$ dobijemo $1 = 0^2 + C$, tj. $C = 1$. Rješenje je $y = x^2 + 1$. □

2.3.2 Opis radioaktivnog raspada – diferencijalna jednadžba radioaktivnog raspada

Neka je:

- t vrijeme
- $y(t)$ količina radioaktivne materije, na primjer $C - 14$, u trenutku t
- y_0 količina radioaktivne materije u početku, tj. za $t = 0$: $y_0 = y(0)$.

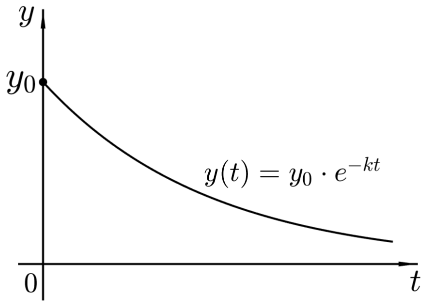
Problem opisa radioaktivnog raspada jest u određivanju ovisnosti $y(t)$ o t. Ograničit ćemo se na raspad u izoliranim uvjetima. S problemom se upoznajemo pokusom. Glavna je poteškoća, na primjer s teškim elementima kao što je $C - 14$, što se vrlo sporo raspadaju pa je teško doći do podataka u širokoj vremenskoj skali. Zato treba naći metodu koja će iz *lokalnih* rezultata dati *globalne*.
Intuitivno je jasno da je $y(t)$ neka padajuća funkcija (Slika 2.1).

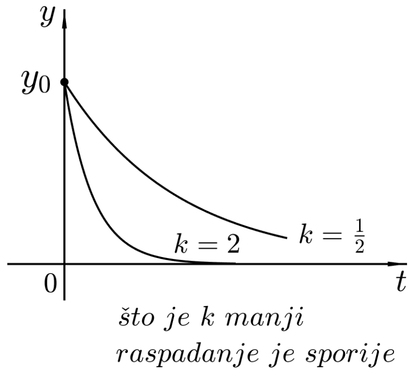


Slika 2.1: Intuitivni prikaz radioaktivnog raspada

1. Eksperimentalno određivanje diferencijalne jednadžbe raspada: intuitivno je jasno, a potvrđuje se pokusom, da je količina raspadnute materije, između dvaju relativno bliskih mjerenja u vremenima t i $t + \Delta t$, približno proporcionalna proteklom vremenu Δt i količini $y(t)$ materije u trenutku t.
   Dakle, postoji pozitivna konstanta k, ovisna samo o vrsti radioaktivne materije (a ne i o vremenu), tako da bude:
   $$\Delta y \approx -ky(t)\Delta t.$$
   Naime, količina raspadnute materije je
   $$y(t) - y(t + \Delta t) = -\Delta y,$$
   a predznak je minus jer se količina smanjuje. Sve se može zapisati i kao
   $$\frac{\Delta y}{\Delta t} \approx -ky.$$

2. Diferencijalna jednadžba raspada: iz gornje približne jednadžbe naslućujemo **diferencijalnu jednadžbu raspada** skupa s početnim uvjetom:
   $$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -ky\\ y(0) &= y_0.\end{aligned}$$
   Odavdje se može rekonstruirati jednadžba raspada ovako:
   $$\begin{aligned}\frac{dy}{y} &= -kdt\\ \int \frac{dy}{y} &= \int -kdt\\ \ln y &= -kt + \ln C.\end{aligned}$$
   Tu smo iskoristili da je $y(t) > 0$ za sve t i konstantu smo napisali kao $\ln C$. Sad je:
   $$y = e^{\ln C - kt} = e^{\ln C}e^{-kt} = Ce^{-kt},$$
   a iz uvjeta $y(0) = y_0$, dobijemo $C = y_0$. Konačno, imamo:
   $$y = y_0 e^{-kt},$$
   što možemo zapisati i kao
   $$y(t) = y(0)e^{-kt}.$$
   Da bismo raspad opisali do kraja potrebno je znati koeficijent k, Slika 2.2. Na primjer, za $C - 14$ približno je jednak $k = 1.244 \cdot 10^{-4}$, uz uvjet da se vrijeme mjeri u godinama.





Slika 2.2: Jednadžba raspada $y(t) = y_0 e^{-kt}$

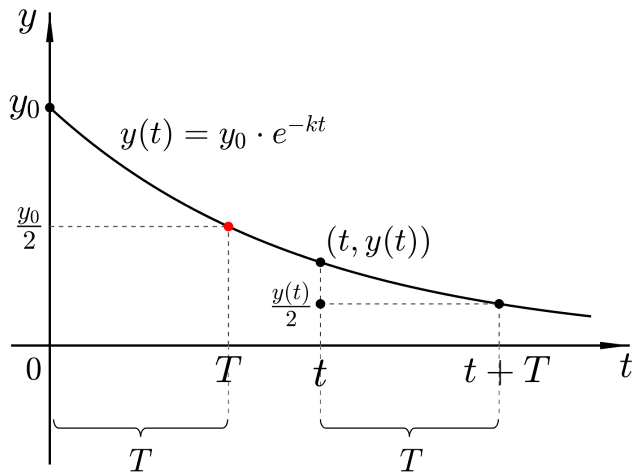
Primjer 2.2. [Vrijeme poluživota]
Odredimo vrijeme poluživota radioaktivne materije, tj. vrijeme T za koje se količina radioaktivne materije prepolovi (posebice za $C-14$). Treba biti

$$y(t+T) = \frac{1}{2} y(t).$$

Uvrštavanjem se dobije:

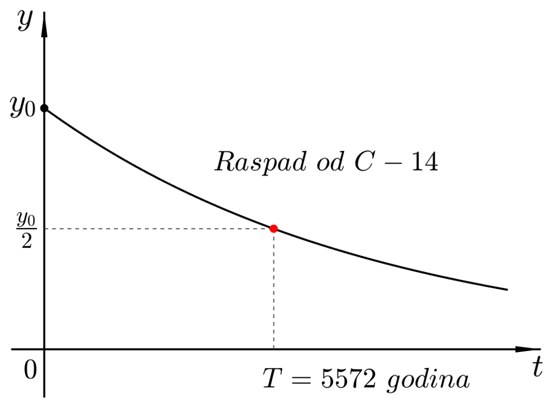
$$\begin{aligned} y(0)e^{-k(t+T)} &= \frac{1}{2} y(0) e^{-kt} \\ e^{-kt} e^{-kT} &= \frac{1}{2} e^{-kt} \\ e^{-kT} &= \frac{1}{2} \\ -kT &= \ln 1 - \ln 2 \\ T &= \frac{\ln 2}{k}. \end{aligned}$$

Vidimo da vrijeme poluživota T ne ovisi o t već samo o k, tj. o vrsti materije. Zato je T važna karakteristika radioaktivne materije (Slika 2.3).



Slika 2.3: Vrijeme poluživota

Za $C-14$ je $k \approx 1.244 \cdot 10^{-4}$ pa je $T \approx 5572$ godina (Slika 2.4).



Slika 2.4: Raspad od $C-14$: vrijeme poluživota

□

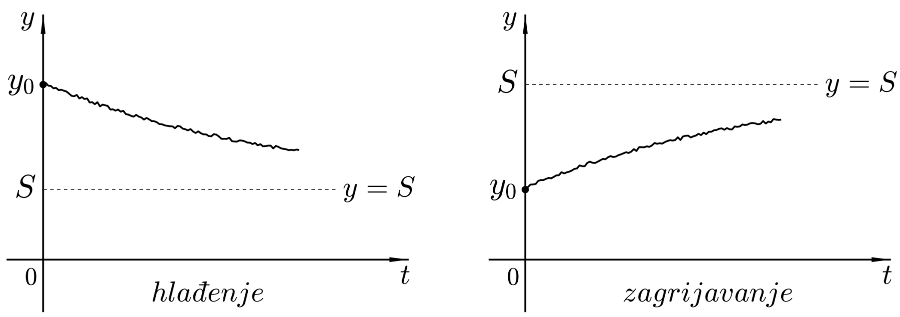
2.3.3 Hlađenje - zagrijavanje tijela u sredini stalne temperature

Neka je:

t	vrijeme
S	stalna temperatura sredine
$y(t)$	temperatura tijela smještenog u sredinu
y_0	početna temperatura tijela.

Problem: Treba opisati mijenjanje temperature tijela ovisno o vremenu.

Intuitivno je jasno da će se tijelo hladiti ako je $y_0 > S$, da će se zagrijavati i približavati temperaturi S ako je $y_0 < S$ te da će zadržavati stalnu temperaturu ako je $y_0 = S$, Slika 2.5.



Slika 2.5: Intuitivni prikaz hlađenja, odnosno zagrijavanja tijela

Također je intuitivno jasno, a potvrđuje se pokusom (Newtonov zakon), da je u svakom trenutku promjena temperature proporcionalna razlici između temperature sredine i temperature tijela, također da je proporcionalna proteklom vremenu (za male vremenske pomake). Dakle, pokus pokazuje:

$$\Delta y(t) \approx k\,[S - y(t)]\,\Delta t$$

za pozitivnu konstantu k (koja ovisi o materijalu). Odatle dobivamo **diferencijalnu jednadžbu hlađenja - zagrijavanja**, dakle $\frac{dy}{dt} = k(S - y)$:

$$\frac{dy}{dt} = -k(y - S).$$

Zajedno s početnim uvjetom, treba riješiti sljedeći Cauchyjev problem:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -k(y - S)\\ y(0) &= y_0.\end{aligned}$$

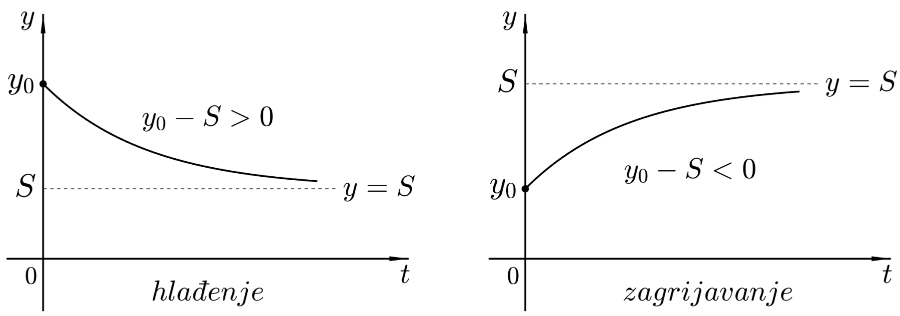
Nakon zamjene $z = y - S$, tj. $dz = dy$, dolazimo do

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= -kz\\ z(0) &= y_0 - S,\end{aligned}$$

što znamo riješiti (jer je sve kao kod radioaktivnog raspada).
Dobijemo $z(t) = (y_0 - S)e^{-kt}$, tj.

$$y(t) = S + (y_0 - S)e^{-kt}.$$

Grafički prikaz je na Slici 2.6.



Slika 2.6: Jednadžba hlađenja - zagrijavanja: $y(t) = S + (y_0 - S)e^{-kt}$

Primjer 2.3. [Hlađenje - zagrijavanje tijela]
Tijelo se nalazi u sredini stalne temperature $S = 18°C$ i ima u prvom trenutku mjerenja, tj. za $t = 0$, temperaturu od 35°C. Nakon sat vremena izmjerena mu je temperatura od 27°C. Treba odrediti:

(i) konstantu hlađenja

(ii) temperaturu dva sata vremena prije nultog trenutka

(iii) temperaturu za dva sata (nakon nultog trenutka)

(iv) vrijeme u kojem će tijelo poprimiti temperaturu od 19°C

(v) vrijeme u kojem će tijelo poprimiti temperaturu sredine.

Tu je $y_0 = 35$ pa je $y_0 - S = 35 - 18 = 17$. Zato je $y(t) = 18 + 17e^{-kt}$.

(i) Kako je $y(1) = 27$, dobijemo

$$\begin{aligned} 18 + 17e^{-k\cdot 1} &= 27 \\ e^{-k} &= \frac{9}{17} \\ k &= \ln\frac{17}{9} \approx 0.636 \end{aligned}$$

(ii) $y(-2) = 18 + 17e^{-k\cdot(-2)} \approx 78.654$

(iii) $y(2) = 18 + 17e^{-k\cdot 2} \approx 22.765$

(iv) Tražimo T tako da vrijedi $y(T) = 19$, tj.

$$\begin{aligned} 18 + 17e^{-kT} &= 19 \\ e^{-kT} &= \frac{1}{17} \\ T &= \frac{\ln 17}{k} \approx 4.455 \end{aligned}$$

(v) U matematičkom modelu, to će se dogoditi tek u limesu kad t ide u beskonačnost, ali u praksi nas može zadovoljiti bilo koji t za koji je $y(t)$ dovoljno blizu $S = 18°C$. Na primjer, ako riješimo nejednadžbu $y(t) < 18.01$, dobit ćemo

$$\begin{aligned} 18 + e^{-kt} &< 18.01 \\ -kt &< \ln 0.01 \\ t &> 7.241, \end{aligned}$$

tj. nakon nešto više od 7 sati tijelo će se ohladiti gotovo do temperature sredine S. □

2.3.4 Gibanje po pravcu pri djelovanju konstantne sile

Neka je:

$y(t)$ koordinata položaja tijela koje se giba po pravcu u trenutku t

$v(t)$ brzina tijela u trenutku t

$a(t)$ akceleracija (ubrzanje) tijela u trenutku t

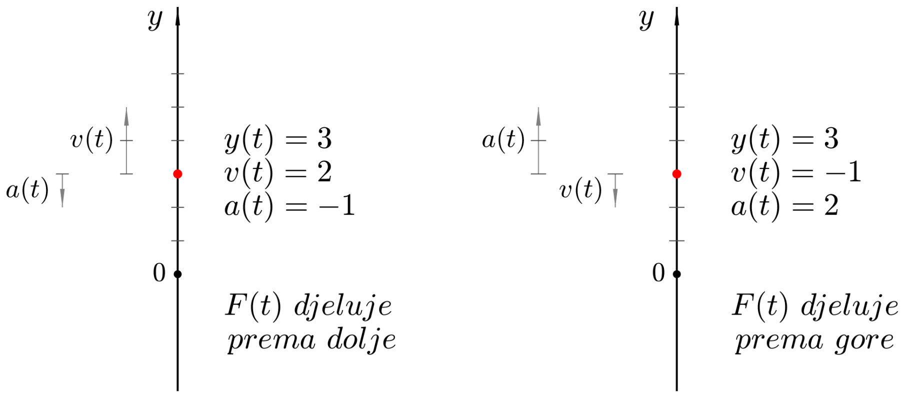
$F(t)$ sila koja djeluje na tijelo dok se nalazi u položaju $y(t)$.
Vrijedi Newtonov zakon $F(t) = ma(t)$, gdje je m masa tijela.

Tada je (Slika 2.7):

1. $y(t)$ je realan broj koji označuje položaj, tj. udaljenost od ishodišta koordinatnog sustava na pravcu (to je broj $|y(t)|$) i usmjerenje, tj. ako je $y(t) > 0$ tijelo je na pozitivnom dijelu, a ako je $y(t) < 0$, ono je na negativnom dijelu pravca

2. $v(t)$ je realan broj, ali ima značenje vektora brzine (kako i treba, jer je brzina vektor). Iznos brzine u trenutku t je $|v(t)|$. Ako je $v(t) > 0$, onda se u tom trenutku tijelo giba u pozitivnom smjeru, a ako je $v(t) < 0$, onda se u tom trenutku tijelo giba u negativnom smjeru y-osi

3. $a(t)$ je realan broj, ali ima značenje vektora akceleracije (kako i treba, jer je akceleracija vektor). Iznos akceleracije u trenutku t je $|a(t)|$. Ako je $a(t) > 0$, onda je $F(t) > 0$, pa u tom trenutku sila djeluje u pozitivnom smjeru, a ako je $a(t) < 0$, onda je $F(t) < 0$, pa u tom trenutku sila djeluje u negativnom smjeru.

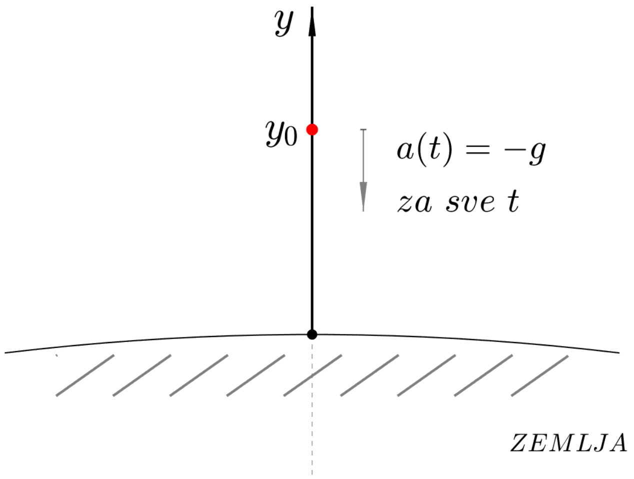


Slika 2.7: Primjeri mogućih $y(t)$, $v(t)$ i $a(t)$

Problem: Treba opisati gibanje na pravcu tijela na koji djeluje konstantna sila.

Da bi to učinili treba uvesti (t, y) koordinatni sustav. Neka je:

- t vrijeme (koordinatnu os vremena možemo zamišljati horizontalnom)
- y-os koordinatni pravac (možemo ga zamišljati vertikalnim - okomitim na vremensku os, i pozitivno usmjerenim *prema gore*)
- $y(t)$ položaj u trenutku t, tj. koordinata položaja tijela koje se giba po koordinatnom pravcu y
- y_0 početni položaj tijela, tj. $y_0 := y(0)$
- v_0 brzina tijela u nultom trenutku, tj. $v_0 := v(0)$
- $-g$ stalna akceleracija, tj. sila je stalna i usmjerena suprotno od usmjerenja y-osi i ima iznos g. To smo napravili tako da nas podsjeća na gibanje pod utjecajem sile teže - vertikalni hitac (Slika 2.8).



Slika 2.8: Vertikalni hitac blizu površine Zemlje uz zanemarivi otpor zraka i utjecaj drugih sila, osim gravitacije

Prelazimo na rješavanje problema vertikalnog hitca. Znamo:

(i) $v(t) = y'(t)$, tj. $v(t) = \frac{dy}{dt}$. Posebno: $v(0) = y'(0)$

(ii) $a(t) = v'(t) = (y'(t))' = y''(t)$

(iii) $a(t) = -g$ za svaki t (jer je sila, pa time i akceleracija, konstantna).

Sad postavljamo Cauchyjev problem:

$$\begin{aligned} y'' &= -g \\ y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= v_0. \end{aligned}$$

Iz $(y')' = -g$ dva puta ponovljenim integriranjem dobijemo

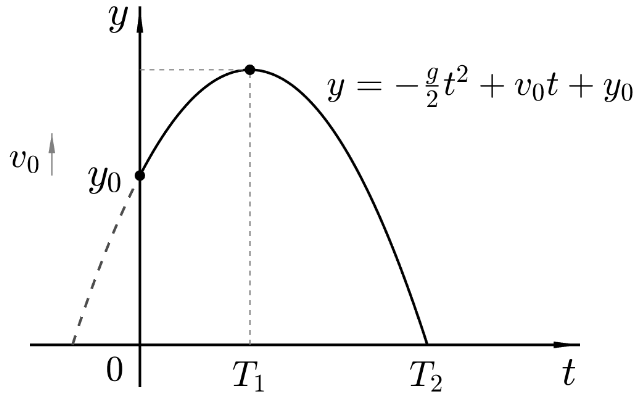
$$\begin{aligned} y'(t) &= -gt + C_1 \\ y(t) &= -g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \end{aligned}$$

za neke konstante C_1 i C_2. Sad iz $y'(0) = v_0$ dobijemo $C_1 = v_0$, a iz $y(0) = y_0$ dobijemo $C_2 = y_0$.

Konačno, imamo

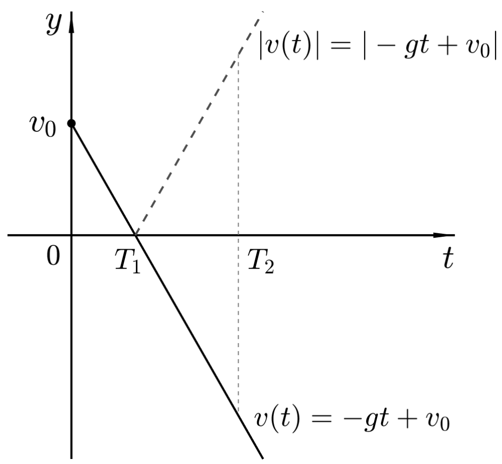
$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + y_0 \\ v(t) &= -gt + v_0. \end{aligned}$$

To je opis položaja i brzine u svakom trenutku t (ako ne dođe do promjene uvjeta), Slika 2.9.



Slika 2.9: Grafički prikaz gibanja pri vertikalnom hitcu za $y_0 > 0$ i $v_0 > 0$

Na Slici 2.9 tijelo u trenutku t_0 ima brzinu $v_0 > 0$. Kako tijelo ide prema gore, brzina mu se postupno smanjuje zato što sila djeluje prema dolje, dakle funkcija položaja usporeno raste. U trenutku $t = T_1$ tijelo postigne maksimalnu visinu i tada mu je brzina nula. Nakon toga tijelo ubrzano pada prema dolje, dakle funkcija položaja ima ubrzani pad. Ipak, gledajući fizikalno ili matematički, ovo je gibanje usporeno od $t = 0$ do $t = T_2$ jer je akceleracija negativna (stalno je jednaka $-g$). Smisao je da se brzina, kao broj, stalno smanjuje, makar se u intervalu od $t = T_1$ do $t = T_2$ brzina u apsolutnom iznosu povećava. To se vidi iz relacije $v(t) = -gt + v_0$ kao i iz Slike 2.10.



Slika 2.10: Grafički prikaz brzine gibanja pri vertikalnom hitcu za $v_0 > 0$

Fizikalno tumačenje rješenja: dio $-\frac{g}{2}t^2$ je doprinos od djelovanja sile, $v_0 t$ je doprinos od početne brzine a y_0 od početnog položaja. Na primjer, ako zamislimo da je riječ o vertikalnom hitcu pod utjecajem gravitacije (koja je blizu površine Zemlje konstantna) i ako zanemarimo otpor, onda je:

(i) y_0 visina na kojoj je tijelo bilo u početku (i tu bi ostalo da nije početne brzine i gravitacije)

(ii) $v_0 t$ promjena položaja tijela za vrijeme t, koje se giba stalnom brzinom v_0 (to je pozitivno za $v_0 > 0$)

(iii) $\frac{g}{2}t^2$ je put koji bi tijelo prešlo pri slobodnom padu za vrijeme t (ako prije toga ne udari u Zemlju). Predznak je negativan jer se za tu vrijednost koordinata položaja smanjila.

2.4 PRIMJENA MATLAB-A

2.4.1 Rješavanje diferencijalnih jednadžba. Naredba dsolve

Diferencijalnu jednadžbu rješavamo naredbom `dsolve`. Pokažimo to na diferencijalnoj jednadžbi iz Primjera 2.1:

```
syms y(x)
jednadzba = diff(y) == 2*x
dsolve(jednadzba)                                  % x^2 + C1
```

Naredba `dsolve` može riješiti i Cauchyjev problem:

```
syms y(x)
jednadzba = diff(y) == 2*x
uvjet = y(0) == 2
dsolve(jednadzba, uvjet)                            % x^2 + 2
```

Dobiveno rješenje, kako je i uobičajeno za simbolički zadane funkcije, može se nacrtati naredbom `fplot`.

I diferencijalne jednadžbe u kojima se pojavljuje jedan ili više parametara, kao u primjeru diferencijalne jednadžbe raspada iz 2.3.2, rješavamo pomoću `dsolve`:

```
syms k y0 y(t)
jednadzba = diff(y) == -k*y
uvjet = y(0) == y0
dsolve(jednadzba, uvjet)                       % y0*exp(-k*t)
```

Rješenje je jednako onom iz Lekcije. Slično rješavamo i diferencijalnu jednadžbu hlađenja - zagrijavanja tijela u sredini stalne temperature iz 2.3.3. I ovdje dobijemo već poznato rješenje, uz drukčije razmještene predznake:

```
syms k S y0 y(t)
jednadzba = diff(y) == -k*(y - S)
uvjet = y(0) == y0
dsolve(jednadzba, uvjet)          % S - exp(-k*t)*(- y0 + S)
```

Za rješavanje Cauchyjevog problema drugog reda, tj. Cauchyjevog problema s dva početna uvjeta, postupamo slično kao gore, uz napomenu da je, za postavljanje početnog uvjeta za prvu derivaciju, najprije potrebno prvu derivaciju definirati kao zasebnu funkciju. Radimo s Cauchyjevim problemom vertikalnog hitca iz 2.3.4:

```
syms g y0 v0 y(t)
jednadzba = diff(y, 2) == -g
Dy = diff(y, 1)
uvjeti = [y(0) == y0, Dy(0) == v0]
dsolve(jednadzba, uvjeti)            % y0 - (g*t^2)/2 + t*v0
```

Rezultat je jednak onom kojeg smo i prije imali, osim što se razlikuje u razmještaju članova.

2.5 PITANJA I ZADATCI

1. Odredite formulu radioaktivnog raspada u terminu vremena poluživota. Uputa: U formulu stavite $k = \frac{\ln 2}{T}$.

2. Odredite formulu za vrijeme potrebno da radioaktivna materija izgubi 1 posto svoje količine. Izračunajte za $C-14$.

3. Napišite formule u problemu hlađenja-zagrijavanja ako je temperatura sredine $0°C$. Nacrtajte pripadne grafove ovisno o tome je li $y_0 > 0$ ili $y_0 < 0$. Komentirajte vezu s problemom radioaktivnog raspada.

4. Nacrtajte slike analogne slikama 2.9 i 2.10 ako je $v_0 = 0$, odnosno $v_0 < 0$. Komentirajte.

5. Tijelo je bačeno u vis brzinom $v_0 = 3m/s$ s početnog položaja $y_0 = 12m$. Uz pretpostavku da je $g = 9.81m/s^2$ i da nema otpora, odredite:
   (i) jednadžbu gibanja tog tijela
   (ii) brzinu $v(t)$ u svakom trenutku
   (iii) maksimalnu visinu i vrijeme kad se postiže
   (iv) vrijeme za koje će tijelo opet biti na početnoj visini i brzinu u tom trenutku (komentirajte)
   (v) vrijeme pada tijela na površinu zemlje i brzinu u tom trenutku
   (vi) vremenske intervale ubrzanog i usporenog pada.

6. Postavite Cauchyjev problem vertikalnog hitca, ako je otpor u svakom trenutku proporcionalan kvadratu brzine i usmjeren suprotno od brzine.

3 PROBLEM POVRŠINE - ODREĐENI INTEGRAL. LEIBNITZ-NEWTONOVA FORMULA

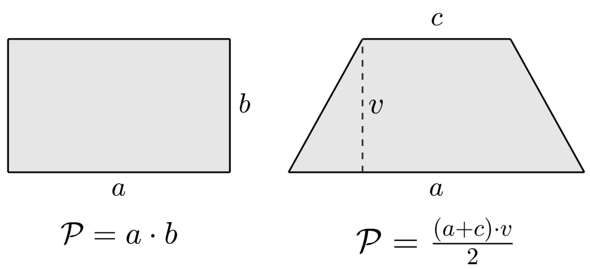
U lekciji se objašnjava kako problem određivanja površine podskupova ravnine vodi do pojma određenog integrala te kako se, preko Leibnitz-Newtonove formule, određeni integral računa pomoću neodređenog, tj. pomoću primitivne funkcije.

3.1 PRIPADNI PROBLEM

Formule za površinu geometrijskih likova omeđenih dužinama otkrivene su u dalekoj prošlosti (u starogrčkoj, indijskoj i arapskoj matematici). S likovima omeđenim zakrivljenim crtama bilo je puno teže. Osim formule za površinu kruga, malo toga je bilo poznato. Arhimed je uspijevao s površinama omeđenim dijelovima parabole, hiperbole ili elipse.
Pomoću integrala mogu se, barem načelno, odrediti površine podskupova ravnine, omeđene dijelovima grafova elementarnih funkcija (i općenitije).
Vidjet ćemo da se pomoću integrala rješavaju i mnogi drugi geometrijski problemi: problem obujma, duljine luka krivulje i sl. te mnogi fizikalni problemi: problem rada sile, težišta i sl.

3.2 POTREBNO PREDZNANJE

Potrebno je poznavati pojam neodređenog integrala i računanja nekih važnih neodređenih integrala.
Također je potrebno poznavanje pojma površine i računanja površine pravokutnika $\mathcal{P} = a \cdot b$ i površine trapeza $\mathcal{P} = \frac{(a+c)v}{2}$, Slika 3.1.

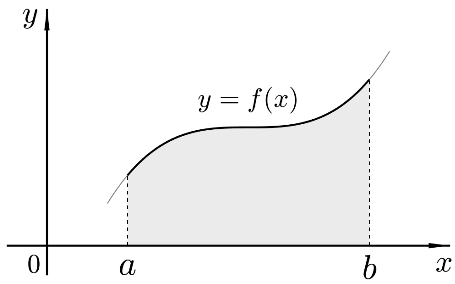


Slika 3.1: Formule za površine pravokutnika i trapeza

3.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

3.3.1 Problem određivanja površine ispod grafa pozitivne funkcije

Neka je f pozitivna funkcija na segmentu $[a, b]$, tj. $f(x) \geqslant 0$ za sve x sa svojstvom $a \leqslant x \leqslant b$. Treba odrediti površinu omeđenu grafom funkcije f, x-osi i vertikalnim pravcima $x = a$ i $x = b$, Slika 3.2. Taj se problem kraće zove **problem određivanja površine ispod grafa funkcije**.



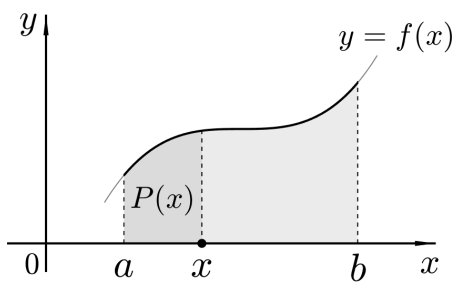
Slika 3.2: Površina ispod grafa pozitivne funkcije

Tradicionalno, oznaka za površinu ispod grafa funkcije f, za x od a do b, označava se kao

$$\int_a^b f(x)dx$$

i čita: *integral od a do be ef od x de x*. Taj se izraz zove i **određeni integral** funkcije f na segmentu $[a, b]$. Brojevi a i b zovu se **granice integrala**, f je **podintegralna funkcija**, a je **donja**, a b je **gornja granica**. Vezu s neodređenim integralom i uporabu ove oznake vidjet ćemo uskoro.
Ovaj se problem može vrlo precizno matematički postaviti i vrlo precizno riješiti. Mi ćemo izbjeći strogo matematičko izlaganje i prikloniti se geometrijskoj intuiciji. Napomenimo da nas ponajprije zanimaju elementarne funkcije, iako se ova problematika može razmatrati za puno šire klase funkcija.
Prirodno je razmotriti **funkciju površine** $P(x)$ za $a \leqslant x \leqslant b$, definiranu s (Slika 3.3):

$$P(x) := \text{ površina ispod grafa od } a \text{ do } x.$$

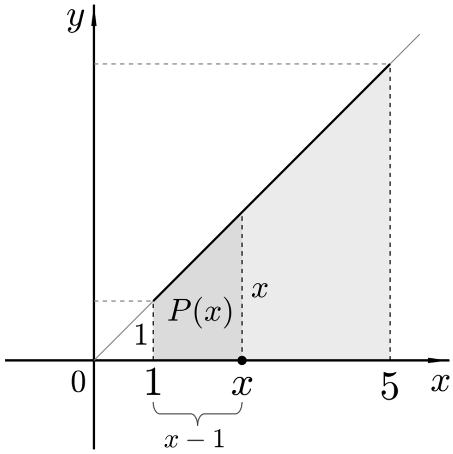


Slika 3.3: Graf funkcije površine $P(x)$

Vidimo dva očita svojstva:

1. $P(a) = 0$
2. $P(b) = \mathcal{P} =$ ukupna površina koju tražimo.

Primjer 3.1. [Funkcija površine]
Odredimo funkciju $P(x)$ ako je $f(x) := x$ i $a = 1$, $b = 5$, Slika 3.4.



Slika 3.4: Primjer 3.1

Vidimo da je $P(x)$ jednak površini trapeza s osnovicama x i 1 i visinom $x - 1$:

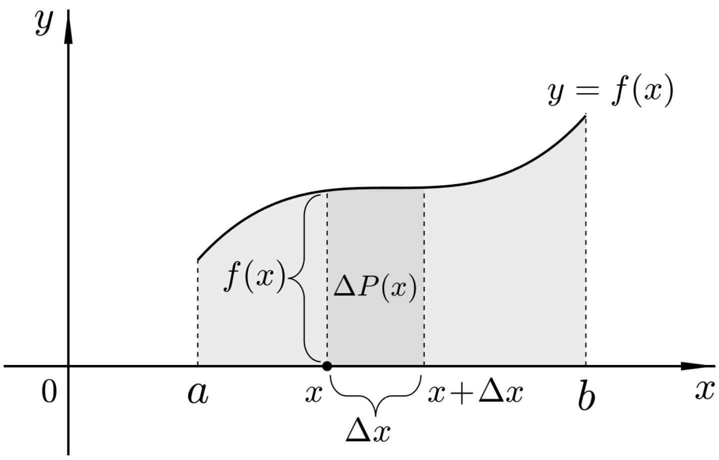
$$P(x) = \frac{(x+1)(x-1)}{2} = \frac{x^2 - 1}{2}.$$

Vrijedi: $P(1) = 0$ i $P(5) = 12 = \mathcal{P}$. Uočimo: kako x ide od 1 do 5, funkcija površine $P(x)$ raste od 0 do 12. $\square$

Na Slici 3.5 vidimo da za prirast površine $\Delta P(x) := P(x + \Delta x) - P(x)$ vrijedi

$$\Delta P(x) \approx f(x) \cdot \Delta x.$$

Napomenimo da tu pretpostavljamo da je $\Delta x > 0$, iako općenito prirast od x može biti i negativan.



Slika 3.5: Prirast površine $\Delta P(x)$

Odatle naslućujemo:

$$dP(x) = f(x)dx,$$

što je formula za **diferencijal površine**, a možemo je shvatiti kao diferencijalnu vezu između funkcije f i njoj pripadajuće funkcije površine. Ta se veza može zapisati i kao $\frac{dP(x)}{dx} = f(x)$, tj. kao

$$P'(x) = f(x),$$

što znači da je $P(x)$ jedna od primitivnih funkcija funkcije f.
Uporaba izraza *integral* i oznake $\int$ tradicionalna je. Oznaka $\int$ je iskrivljenje oznake za sumu $\sum$, a suma se odnosi na zamišljanje da se zbraja beskonačno mnogo doprinosa $f(x)dx$ dok se x mijenja (što dolazi od zbrajanja površina $f(x)\Delta x$ i može se strogo matematički opisati pomoću limesa).
Kraće, možemo zamišljati:

$$\text{Zbroj doprinosa } f(x)dx \text{ za } x \text{ od } a \text{ do } b \text{ prelazi u } \int_a^b f(x)dx.$$

Primjer 3.2. [Provjera jednakosti $P'(x) = f(x)$]
U Primjeru 3.1 imali smo $f(x) := x$ i $P(x) = \frac{x^2-1}{2}$. Vidimo da je

$$P'(x) = \left(\frac{x^2-1}{2}\right)' = \frac{2x}{2} = x = f(x).$$

□

3.3.2 Leibnitz–Newtonova formula za pozitivne funkcije

Neka je F *bilo koja* primitivna funkcija funkcije f, tj. takva da je $F' = f$. Tada je $P(x) = F(x) + C$, gdje je C neka konstanta (to je zato što je i $P(x)$ primitivna funkcija funkcije f).
Sad je lako u terminima funkcije F odrediti površinu $\mathcal{P}$ ispod grafa funkcije f za x od a do b:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= P(b) = P(b) - 0 = P(b) - P(a)\\ &= [F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Dakle,

$$\mathcal{P} = F(b) - F(a).$$

Budući da je $\mathcal{P} = \int_a^b f(x)dx$, pišemo

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

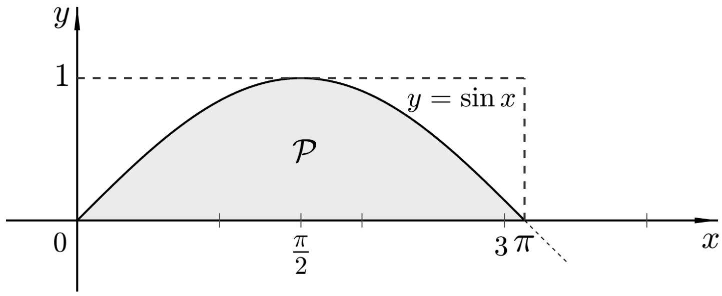
gdje je F bilo koja primitivna funkcija funkcije f, a razlika $F(b) - F(a)$ ne ovisi o tome koji smo F izabrali.

Izraz $F(b) - F(a)$ često pišemo kao $F(x)\Big|_a^b$, dakle:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Ovu formulu zovemo **Leibnitz-Newtonova formula**.

Primjer 3.3. [Leibnitz-Newtonova formula]
Procijenimo i odredimo površinu ispod sinusoide za $0 \leqslant x \leqslant \pi$, Slika 3.6.



Slika 3.6: Primjer 3.3

Iz Slike 3.6 vidimo da je tražena površina unutar pravokutnika duljine π i visine 1, a da zauzima oko $\frac{2}{3}$ njegove površine. Zato procjenjujemo

$$\mathcal{P} \approx \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 1 = 2 \cdot \frac{\pi}{3} \approx 2 \cdot 1 = 2.$$

Računanjem dobijemo

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \int_0^\pi \sin x dx = (-\cos x)\Big|_0^\pi \\ &= -\cos(\pi) - [-\cos(0)] = -(-1) - (-1) = 2.\end{aligned}$$

□

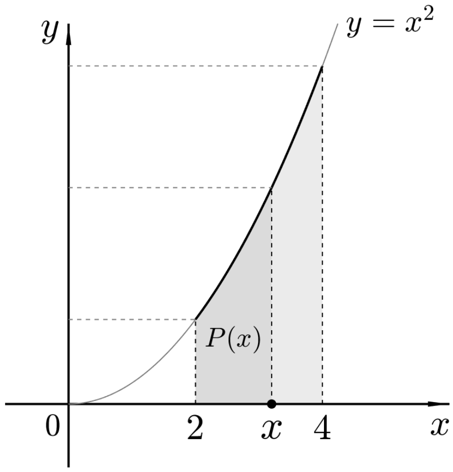
Primjer 3.4. [Veza funkcije površine i drugih primitivnih funkcija]
Ako u jednakost $P(x) = F(x) + C$ uvrstimo $x = a$, dobijemo $0 = F(a) + C$, dakle $C = -F(a)$. Zato je

$$P(x) = F(x) - F(a).$$

Ako je $f(x) := x^2$ i $a = 2$ i $b = 4$, onda je $F(x) = \frac{x^3}{3}$ jedna od primitivnih funkcija od f. Zato je

$$P(x) = F(x) - F(2) = \frac{x^3}{3} - \frac{8}{3}$$

funkcija površine (Slika 3.7).



Slika 3.7: Primjer 3.4

□

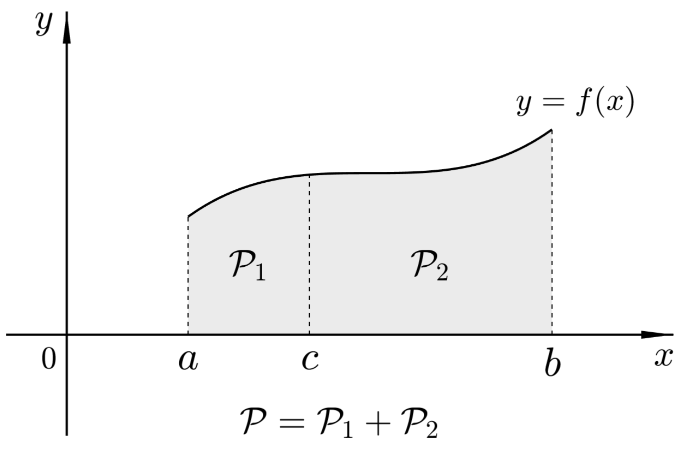
3.3.3 Svojstva određenog integrala za pozitivne funkcije

1. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

   U slučaju negativnog predznaka treba biti $g(x) \leqslant f(x)$ za sve x od a do b. Ovaj je uvjet potreban jer trenutno razmatramo samo pozitivne funkcije. Poslije, kad integral bude definiran za šire klase funkcija, taj uvjet neće biti potreban.

2. $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$, uz uvjet $\lambda \geqslant 0$. Poslije ovo ograničenje na λ neće biti potrebno.

3. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ za $a < c < b$, Slika 3.8. Poslije, u širem kontekstu, a, b i c će moći biti bilo koja tri realna broja.



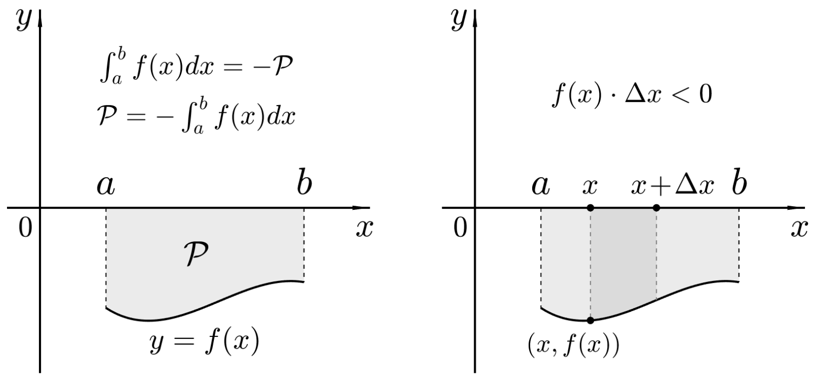
Slika 3.8: Svojstva određenog integrala za pozitivne funkcije - Svojstvo 3

3.3.4 Određeni integral za bilo koje funkcije

1. Određeni integral za negativne funkcije - ako je f negativna na segmentu $[a, b]$, tj. ako je $f(x) \leqslant 0$ za $a \leqslant x \leqslant b$, onda definiramo (Slika 3.9):

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b |f(x)|dx = -\mathcal{P}.$$

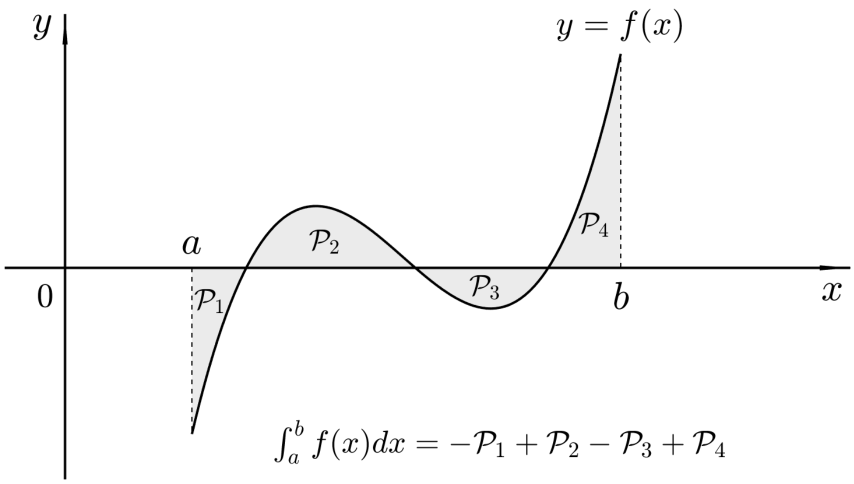
Razlog za tu definiciju je prirodan: izraz $f(x)\Delta x$ tu je negativan za sve x. Naime, kako smo već rekli, u ovim okolnostima uvijek je $\Delta x > 0$.



Slika 3.9: Određeni integral za negativne funkcije

2. Određeni integral općenito (Slika 3.10):

$$\int_a^b f(x)dx = \text{Zbroj površina iznad } x\text{-osi} \\ - \text{Zbroj površina ispod osi } x\text{-osi}$$



Slika 3.10: Određeni integral općenito

Imamo sljedeće dogovore o određenom integralu, ako je donja granica veća od gornje ili njoj jednaka:

1. $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ za $a < b$
2. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

Napomena: od sad u određenom integralu $\int_a^b f(x)dx$, funkcija f može biti bilo koja (razumna) funkcija, a granice integrala a i b mogu biti bilo koja dva realna broja, a ne nužno $a < b$.

3.3.5 Opća Leibnitz-Newtonova formula

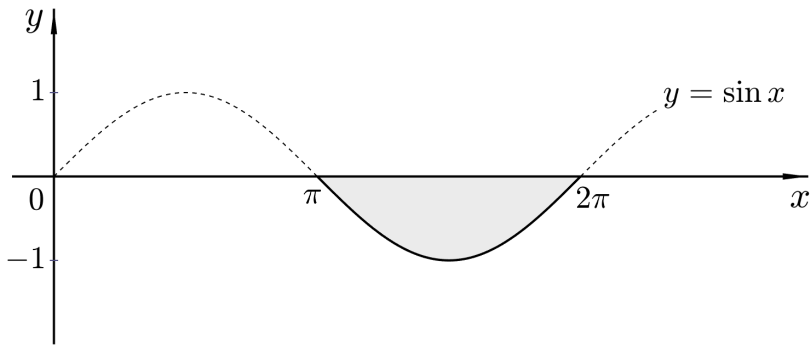
Za svaki određeni integral (bez obzira na funkciju ili granice) vrijedi **Leibnitz-Newtonova formula**

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

gdje je F bilo koja primitivna funkcija funkcije f.

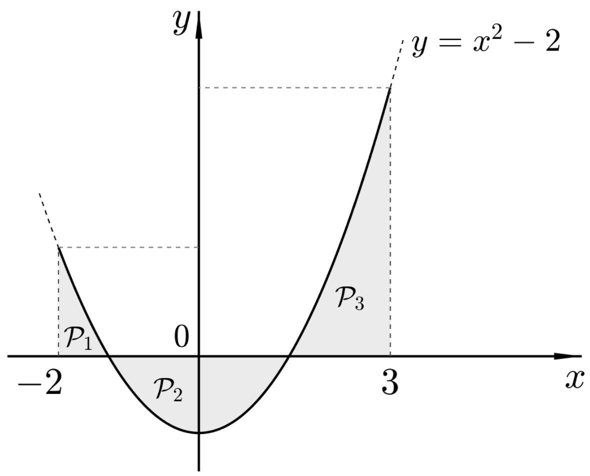
Primjer 3.5. [Opća Leibnitz-Newtonova formula]
Izračunajmo i geometrijski interpretirajmo:

(i) $\int_\pi^{2\pi} \sin(x)dx$, Slika 3.11



Slika 3.11: Primjer 3.5 (i)

(ii) $\int_{-2}^{3}(x^2 - 2)dx$, Slika 3.12.



Slika 3.12: Primjer 3.5 (ii)

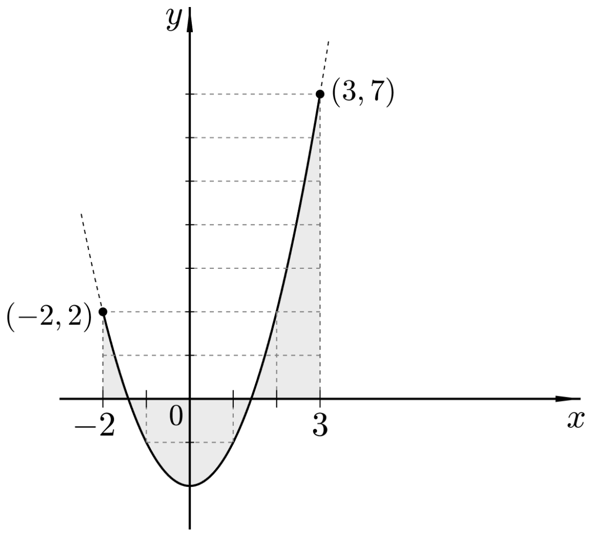
(i) Rezultat je negativan jer je graf ispod x-osi. Očekujemo rezultat -2 jer je u Primjeru 3.3 bio 2. Zaista,

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{2\pi} \sin(x)\,dx &= (-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos\pi) \\ &= -1 - [-(-1)] = -2\end{aligned}$$

(ii)

$$\int_{-2}^{3} \left(x^2 - 2\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x\right)\Big|_{-2}^{3} = 3 - \left(-\frac{8}{3} + 4\right) = \frac{5}{3}.$$

Smisao ovog rezultata u tome je da je $\mathcal{P}_1 - \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 = \frac{5}{3}$, što se može i približno provjeriti (Slika 3.13).



Slika 3.13: Primjer 3.5 (ii)

□

Napomena o očitim svojstvima integrala: tri svojstva određenog integrala koja su vrijedila za pozitivne funkcije i u slučaju da je donja granica manja od gornje, vrijede i općenito, s time da u prvom svojstvu g može biti bilo koja funkcija, u drugom λ bilo koji broj, a u trećem svojstvu više nije potreban uvjet $a < c < b$. Ta svojstva su izravna posljedica opće Leibnitz-Newtonove formule.

Primjer 3.6. [Svojstva određenog integrala]
Izračunajmo $\int_6^3 x^2\,dx$.

$$\int_6^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_6^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{6^3}{3} = -63.$$

Ako iskoristimo pravilo o zamjeni granica integrala, dobijemo:

$$\int_6^3 x^2 dx = -\int_3^6 x^2 dx = -\left(\frac{6^3}{3} - \frac{3^3}{3}\right) = -63,$$

kako smo dobili i izravno.

3.4 PRIMJENA MATLAB-A

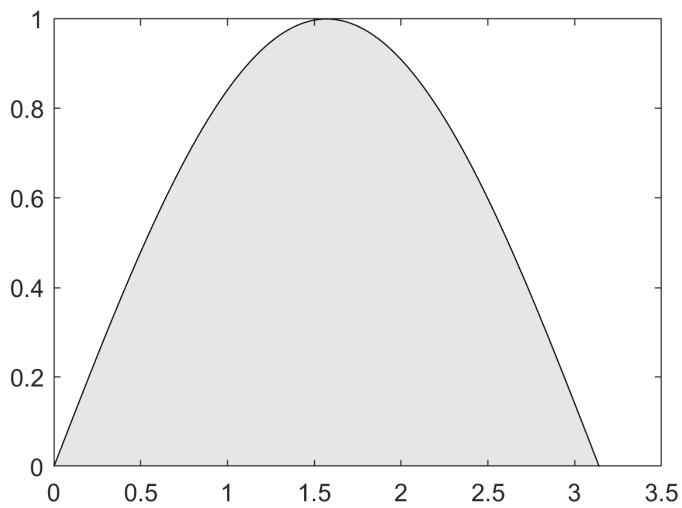
3.4.1 Računanje određenog integrala. Naredbe `int` i `area`, `vectorize` i `eval`

Kao i za neodređeni integral, za računanje određenog integrala koristi se naredba `int`, uz navođenje granica integracije, kao kod integrala iz Primjera 3.3:

```
syms x
f = sin(x)
int(f, 0, pi)                                                 % 2
```

Za prikaz područja ispod grafa funkcije koristi se naredba `area`, s time da se vektor vrijednosti zavisne varijable $y = f(x)$ iz simboličkog rezultata integracije dobiva pomoću naredbi `vectorize` i `eval`:

```
x = linspace(0, pi)
y = eval(vectorize(f))
area(x, y, 'FaceColor', [0.9 0.9 0.9])
```

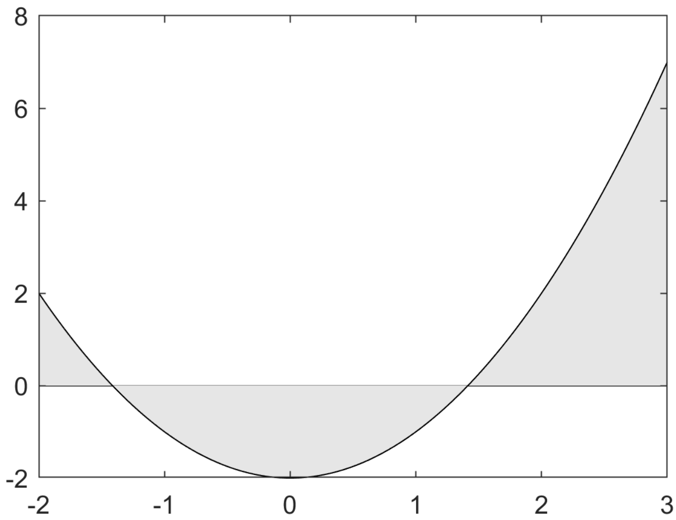


Sa slike vidimo da je funkcija pozitivna na intervalu integracije. Stoga je integral jednak površini gore osjenčanog područja. Kod naredbe `area` koristili smo argument `'FaceColor'` s argumentom `[0.9 0.9 0.9]`, kojim smo u RGB zapisu boju prikazanog područja zadali kao svijetlo sivu. U toj notaciji je crna boja zadana s `[0 0 0]`, a bijela s `[1 1 1]`.

Naredba `int` računa i određene integrale funkcija koje nisu pozitivne na cijelom području integracije:

```
syms x
f = x^2 - 2
int(f, -2, 3)                                                 % 5/3
x = linspace(-2, 3)
```

```
y = eval(vectorize(f))
area(x, y, 'FaceColor', [0.9 0.9 0.9])
```



Spomenimo i zanimljiv slučaj kada je podintegralna funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$. U Lekciji 1 smo vidjeli da je `int(x^(-1)) = log(x)`, što vrijedi samo za $x > 0$ pa se moglo očekivati da MATLAB neće moći izračunati taj integral ako su granice integracije negativni brojevi. Ipak:

```
syms x
int(1/x, -3, -1)                                    % -log(3)
```

Vidimo da smo dobili točan rezultat koji je u skladu s postupkom

$$\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x} dx = (\ln|x|)\big|_{-3}^{-1} = \ln|-1| - \ln|-3| = \ln 1 - \ln 3 = -\ln 3.$$

3.4.2 Numerička integracija. Naredbe `vpaintegral` i `integral`

Izračunajmo još neke integrale, od kojih su posljednja tri integrali koji se ne mogu zapisati pomoću elementarnih funkcija, kao u 1.4.2:

```
syms x
int(1/(1 + x^2), -1, 1)                                    % pi/2
int(sin(x^2), 0, 1)
           % (2^(1/2)*pi^(1/2)*fresnels(2^(1/2)/pi^(1/2)))/2
int(exp(x^2), 0, 1)                       % (pi^(1/2)*erfi(1))/2
int(exp(x)*log(x), 1/2, 1)
                          % ei(1/2) - ei(1) + exp(1/2)*log(2)
```

S prvim smo rezultatom zadovoljni, ali za ostale nemamo jasnu predodžbu o kojim je vrijednostima riječ.
Stoga uvodimo naredbu `vpaintegral` za numeričku integraciju. Ova naredba daje približnu vrijednost traženog određenog integrala, a koristi tzv. *variable-precision arithmetic* s preciznošću koja se može zadati po volji:

```
syms x
vpaintegral(sin(x^2), 0, 1)                        % 0.310268
vpaintegral(exp(x^2), 0, 1)                         % 1.46265
vpaintegral(exp(x)*log(x), 1/2, 1)                % -0.298091
```

Naredba `vpaintegral` daje rezultat i kada naredba `int` ne nudi rješenje pomoću specijalnih funkcija:

```
int(sqrt(log(x)+x)/(x*log(x)+exp(x)))
            % int((x + log(x))^(1/2)/(exp(x) + x*log(x)), x)
vpaintegral(sqrt(log(x)+x)/(x*log(x)+exp(x)),1,2)  % 0.27409
```

Za numeričku integraciju može se koristiti i naredba `integral` koja računa s fiksiranom *double* preciznošću, za razliku od `vpaintegral` koja radi s promjenjivom, tj. varijabilnom preciznošću:

```
integral(@(x) sin(x.^2), 0, 1)                        % 0.3103
integral(@(x) exp(x.^2), 0, 1)                        % 1.4627
integral(@(x) exp(x).*log(x), 1/2, 1)                % -0.2981
```

Usporedbom rezultata dobivenih pomoću `integral` s onima dobivenima pomoću `vpaintegral` možemo utvrditi do koje mjere su oni slični, tj. različiti.

3.5 PITANJA I ZADATCI

1. Geometrijski predočite i izračunajte, potom komentirajte rezultat. Jeste li rezultat mogli unaprijed pogoditi?
   (i) $\int_0^{2\pi} \cos x \, dx$
   (ii) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$
   (iii) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx$
   (iv) $\int_{-a}^{a} f(x) dx$, gdje je f neka neparna funkcija.

   Uputa: u (iv) je rezultat 0 zbog neparnosti. Primijenite slično razmišljanje na dobivanje rezultata u (ii) i na (iii).

2. Obrazložite slikom i riječima jednakost: $\int_{-a}^{a} f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ za parnu funkciju f.

3. Odredite i geometrijski interpretirajte funkciju površine $P(x)$ ispod grafa funkcije $f(x) = x^2$ za:
   (i) $x \geqslant 0$
   (ii) $x \geqslant -1$
   (iii) $x \geqslant 1$.

4. Za sve tri funkcije površine $P(x)$ iz Zadatka 3 izračunajte derivaciju $P'(x)$. Komentirajte.

5. Za funkcije $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ i $f(x) = x^3 - x$ odredite funkciju $F(x) = \int_0^x f(t)dt$. Izračunajte svaki put $F'(x)$. Što zaključujete?

6. Neka je f pozitivna funkcija na intervalu $[a, b]$ i neka je $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ za $x \in [a, b]$. Obrazložite zašto je F rastuća funkcija.

7. Je li F iz Zadatka 6 nužno rastuća ako f nije pozitivna? Obrazložite primjerom. Što bi bilo ako je f negativna funkcija?

4 METODE RAČUNANJA ODREĐENOG INTEGRALA. NEPRAVI INTEGRAL

U lekciji se pokazuje da metode računanja neodređenog integrala, nakon određene preformulacije, vrijede i za određeni integral. Također, uvodi se pojam nepravog integrala - to je proširenje pojma određenog integrala i na funkcije koje nisu definirane u granicama integrala ili kojima su granice $-\infty$ ili ∞.

4.1 PRIPADNI PROBLEM

Katkad je u primjenama potrebno računati površine koje se protežu u beskonačnost. To se, u mnogim važnim slučajevima, rješava pomoću nepravog integrala.

4.2 POTREBNO PREDZNANJE

Potrebno je poznavati pojam neodređenog integrala i metode računanja te pojam određenog integrala.

4.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

4.3.1 Metoda parcijalne integracije određenog integrala

Primjer 4.1. [Parcijalna integracija određenog integrala]
Izračunajmo $\int_0^3 xe^{-x}dx$.

Prvi način - primijenimo formulu parcijalne integracije za neodređeni integral

$$\int udv = uv - \int vdu$$

pa poslije uvrstimo granice:

$$\begin{aligned}\int xe^{-x}dx &= \left[u = x, du = dx;\ dv = e^{-x}dx, v = -e^{-x}\right] = \\ &= x\left(-e^{-x}\right) - \int\left(-e^{-x}\right)dx = \\ &= -xe^{-x} - e^{-x} + C.\end{aligned}$$

Sad je

$$\int_0^3 xe^{-x}dx = \left(-xe^{-x} - e^{-x}\right)\Big|_0^3 = -4e^{-3} + 1.$$

Drugi način - izravna parcijalna integracija određenog integrala: koristimo formulu

$$\int_a^b u dv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

uz napomenu da se granice u svim integralima odnose na x, tj. x ide od a do b, a ne u, odnosno v. Dobivamo:

$$\begin{aligned}\int_0^3 xe^{-x}dx &= \left[u = x, du = dx;\; dv = e^{-x}dx, v = -e^{-x}\right] = \\ &= x\left(-e^{-x}\right)\Big|_0^3 - \int_0^3 \left(-e^{-x}\right)dx = \\ &= -3e^{-3} - e^{-x}\Big|_0^3 = \\ &= -4e^{-3} + 1.\end{aligned}$$

$\square$

4.3.2 Uvođenje nove nepoznanice u određeni integral

Prema analogiji s neodređenim imamo dvije vrste zamjena u određenom integralu $\int_a^b f(x)dx$.

Prva vrsta zamjene zasniva se na zamjeni $h(x) = t$ za pogodno odabranu funkciju h. Odatle se dobije $h'(x)dx = dt$. Ovo je sve bilo i u neodređenom integralu. Novost je da treba mijenjati granice: kako x ide od a do b, t ide od $h(a)$ do $h(b)$, jer je $t = h(x)$. Kratko zapisano:

$$\begin{aligned}&[\; h(x) = t,\; h'(x)dx = dt \\ &\;\text{za } x = a \text{ je } t = h(a) \\ &\;\text{za } x = b \text{ je } t = h(b)\;].\end{aligned}$$

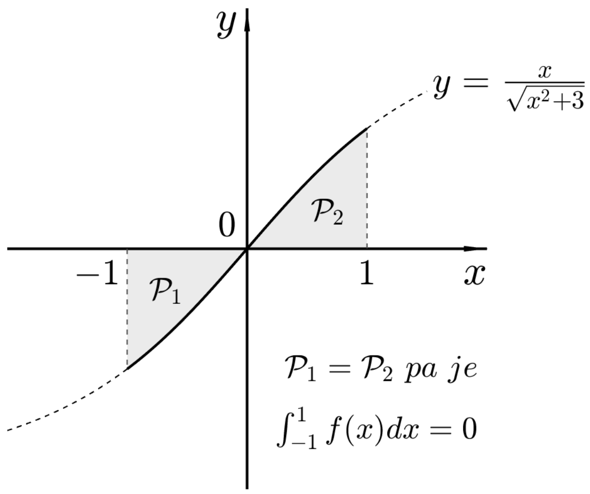
Primjer 4.2. [Prva vrsta zamjene]
Izračunajmo $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx$.
Stavimo

$$\left[h(x) := \sqrt{x^2+3} = t,\; x^2 + 3 = t^2,\; xdx = tdt\right].$$

Sad je $h(-1) = h(1) = \sqrt{4} = 2$ pa je

$$\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}dx = \int_2^2 \frac{tdt}{t} = 0$$

jer je donja granica jednaka gornjoj (čim smo to dobili mogli smo prestati s računanjem).
Objašnjenje (Slika 4.1): podintegralna funkcija je neparna, a interval po kojemu integriramo simetričan pa smo i bez računanja mogli zaključiti da je integral jednak nuli (površina ispod x-osi jednaka je onoj iznad x-osi).



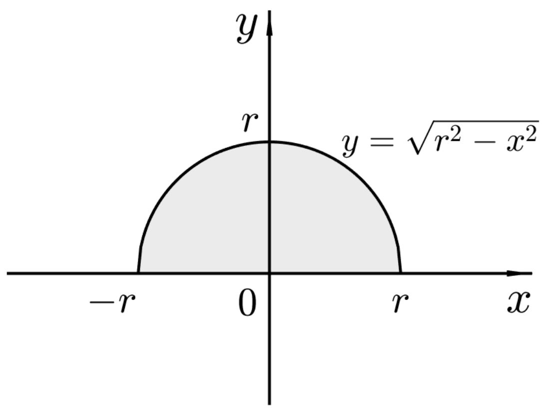
Slika 4.1: Primjer 4.2

$\square$

Druga vrsta zamjene zasniva se na zamjeni $x = g(t)$ za pogodno odabranu funkciju g. Odatle je $dx = g'(t)dt$ i $t = g^{-1}(x)$, što znači da g mora imati inverznu funkciju. Što se tiče granica, ako je $x = a$ onda je $t = g^{-1}(a)$, a ako je $x = b$, onda je $t = g^{-1}(b)$. Kratko zapisano:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t)dt.$$

Primjer 4.3. [Druga vrsta zamjene]
Površina kruga: izračunajmo $\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}dx$, Slika 4.2.



Slika 4.2: Primjer 4.3

Stavimo:

$$\left[x = g(t) = r\sin t,\ dx = r\cos t dt,\ t = g^{-1}(x) = \text{Arcsin}\left(\frac{x}{r}\right)\right]$$

pa je

$$\begin{aligned}\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx &= \int_{\text{Arcsin}\left(\frac{-r}{r}\right)}^{\text{Arcsin}\left(\frac{r}{r}\right)} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t} \cdot r\cos t dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 t dt \\ &= r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2} dt \\ &= r^2 \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= r^2 \cdot \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Iz Slike 4.2 vidimo da smo ovako izračunali površinu polovice kruga. Uočimo da je ovaj određeni integral bilo bitno lakše izračunati ovako, nego preko računanja neodređenog integrala. □

4.3.3 Nepravi integral

Ima više tipova **nepravih integrala**. Upoznat ćemo ih kroz primjere.

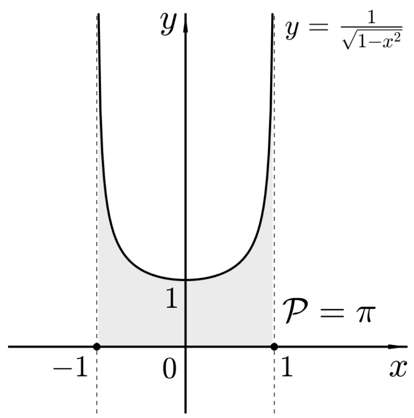
Primjer 4.4. [Nepravi integral - funkcija f nije definirana u jednoj ili obje granice]

(i) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

(ii) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(iii) $\int_0^1 \frac{dx}{x}$.

(i) Problem je u tome (Slika 4.3) što podintegralna funkcija nije definirana u granicama integrala već samo na otvorenom intervalu $\langle -1, 1\rangle$ pa bi površina mogla biti beskonačna.



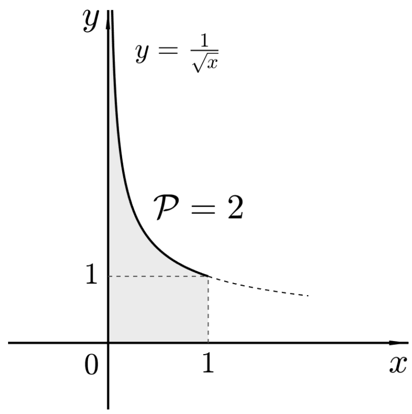
Slika 4.3: Primjer 4.4 (i)

Tu smo imali sreću da je primitivna funkcija $\mathrm{Arcsin}x$ podintegralne funkcije definirana i u rubovima integrala pa je

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \mathrm{Arcsin}x\Big|_{-1}^{1} = \mathrm{Arcsin}(1)-\mathrm{Arcsin}(-1)\\ &= 2\mathrm{Arcsin}(1) = \pi.\end{aligned}$$

(ii) Problem je poput onog u (i) - podintegralna funkcija (Slika 4.4) nije definirana u nuli - i razrješava se slično jer je primitivna funkcija $2\sqrt{x}$ podintegralne funkcije definirana u nuli:

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2.$$

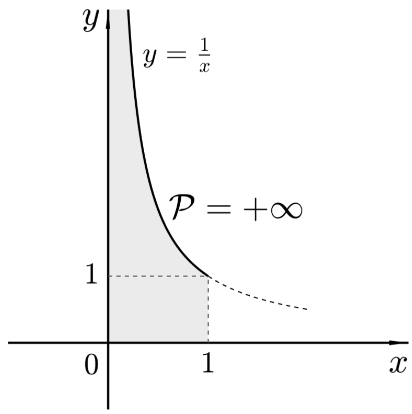


Slika 4.4: Primjer 4.4 (ii)

(iii) Tu je (Slika 4.5) primitivna funkcija $\ln x$ koja nije definirana u nuli, štoviše, $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\ln x) = -\infty$, što pišemo i kao $\ln(0) = -\infty$ pa je

$$\int_0^1\frac{dx}{x} = \ln x\Big|_0^1 = \ln 1 - \ln 0 = 0-(-\infty) = +\infty,$$

tj. površina je beskonačna.



Slika 4.5: Primjer 4.4 (iii)

□

Primjer 4.5. [Nepravi integral - granice integrala su $-\infty$ i/ili $+\infty$]

(i) $\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx$, Slika 4.6

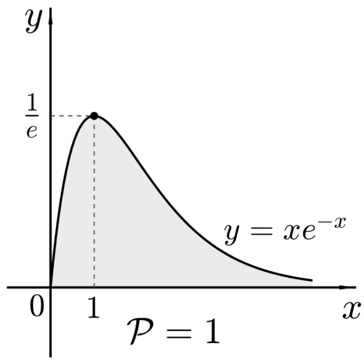
(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, Slika 4.7.

(i) Tu je problem što je područje integracije beskonačan interval. Iz Primjera 4.1 znamo da je primitivna funkcija $-xe^{-x} - e^{-x}$, a iz L'Hospitalova pravila imamo

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

pa je

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = \left(-xe^{-x} - e^{-x}\right)\Big|_0^{+\infty} = (0-0)-(0-1) = 1.$$

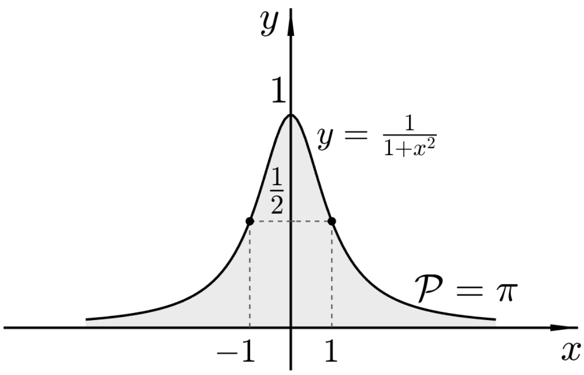


Slika 4.6: Primjer 4.5 (i)

(ii)

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= 2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\mathrm{Arctg}(x)\Big|_0^{+\infty}\\ &= 2\mathrm{Arctg}(+\infty) - 2\mathrm{Arctg}(0)\\ &= 2\cdot\frac{\pi}{2} - 2\cdot 0 = \pi.\end{aligned}$$

Tu smo $\lim_{x\to\infty} \mathrm{Arctg}(x)$ zapisali kao $\mathrm{Arctg}(\infty)$.



Slika 4.7: Primjer 4.5 (ii)

□

4.4 PRIMJENA MATLAB-A

4.4.1 Određeni integral s općim granicama

Sve određene integrale, pa tako i one koji se inače rješavaju metodom parcijalne integracije ili uvođenjem nove nepoznanice u određeni integral, u MATLAB-u se može izračunati naredbom `int`. Pokažimo to na primjerima integrala iz Primjera 4.1 - 4.3:

```
syms r x
int(x*exp(-x), 0, 3)                          % 1 - 4*exp(-3)
int(x/sqrt(x^2 + 3), -1, 1)                               % 0
int(sqrt(r^2 - x^2), -r, r)                    % (pi*r^2)/2
```

S obzirom na to da je u drugom integralu podintegralna funkcija neparna, isti rezultat dobit ćemo i ako integriramo po intervalu $[-a, a]$ za bilo koji $a > 0$. Ovo pokazuje da se naredba `int` može koristiti i kada su granice integrala neodređene, tj. parametarski zadane:

```
syms a x
int(x/sqrt(x^2 + 3), -a, a)                               % 0
```

Riješimo i Zadatak 1 iz 4.5, tj. nađimo površinu unutar elipse s poluosima duljina a i b. Integral množimo s 2 jer sam integral računa površinu između gornje poluelipse i x-osi:

```
syms a b x
2*int(b*sqrt(1 - x^2/a^2), -a, a)                    % pi*a*b
```

Kako smo površinu izračunali za sve pozitivne parametre a i b, dobili smo formulu za računanje površine unutar elipse (koja poopćuje formulu za površinu kruga).

4.4.2 Računanje nepravih integrala

Naredba `int`, koju smo upoznali u prethodnim lekcijama, može se koristiti i za računanje nepravih integrala, kako onima s konačnim, tako i onima s beskonačnim intervalima integracije. Pokažimo to na nepravim integralima iz Primjera 4.4 i 4.5:

```
syms x
int(1/sqrt(1 - x^2), -1, 1)                              % pi
int(1/sqrt(x), 0, 1)                                      % 2
int(1/x, 0, 1)                                          % Inf
int(x*exp(-x), 0, inf)                                    % 1
int(1/(1 + x^2), -inf, inf)                              % pi
```

4.5 PITANJA I ZADATCI

1. Izračunajte površinu unutar elipse s jednadžbom
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$
Uputa: u jednadžbi poluelipse $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$ stavite $x = a \sin t$.

2. Izaberite po volji segment $[a, b]$ i pozitivnu funkciju f.
   (i) Pomaknite graf u desno ili u lijevo za $c > 0$. Jesu li se time površine između grafa i x-osi promijenile? Kako se zadatak može riješiti analitički?
   (ii) Isto pitanje, samo što sad graf rastegnemo, odnosno spljoštimo vertikalno c puta (crtajte i zaključujte pri $c = 2$). Postupak provedite i analitički.
   (iii) Isto pitanje, samo što sad graf rastegnemo, odnosno spljoštimo horizontalno c puta (crtajte i zaključujte pri $c = 2$). Postupak provedite i analitički.

   Uputa:
   (i) Površine se ne mijenjaju: analitički, umjesto $f(x)$, imamo funkcije $f(x - c)$, odnosno $f(x + c)$.
   (ii) Površine se povećavaju, odnosno smanjuju 2 puta (umjesto f, gledamo funkcije $2f$, odnosno $\frac{1}{2}f$).
   (iii) Površine se povećavaju, odnosno smanjuju 2 puta (umjesto $f(x)$ od a do b, gledamo funkcije $f(\frac{x}{2})$ od $2a$ do $2b$, odnosno $f(2x)$ od $\frac{a}{2}$ do $\frac{b}{2}$).

3. Izračunajte za cijele brojeve m i n:
   (i) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)dx$
   (ii) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)dx$
   (iii) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)dx$.

   Uputa: u (i) je funkcija neparna. U (ii) i (iii) koristite formulu pretvaranja umnoška u zbroj.

4. Izračunajte površinu ispod grafa funkcije $f(x) := \frac{1}{x^2}$ za $x \geqslant 1$ i nacrtajte sliku.

5. U integralu
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx,$$
gdje su $\sigma > 0$ i μ realni brojevi, zamijenite varijablu zamjenom $\frac{x-\mu}{\sigma} = t$. Skicirajte staru i novu podintegralnu funkciju i procijenite rezultat.

6. Integral $\int_a^b f(x)dx$, gdje f nije definirana u b i gdje je $a < b$, mogao bi se strogo matematički definirati kao

$$\lim_{\substack{w \to b \\ a < w < b}} \int_a^w f(x)dx.$$

Analogno postupite ako je:

(i) f nije definirana u a

(ii) $b = +\infty$

(iii) $a = -\infty$

(iv) f nije definirana u nekom c gdje je $a < c < b$.

Ilustrirajte ove definicije slikom.
Uputa: radi jednostavnosti, geometrijske ilustracije radite s pozitivnom funkcijom f. Uvijek iscrtkajte površinu limes koje je pojedini integral.

5 PRIMJENA ODREĐENOG INTEGRALA U GEOMETRIJI

U lekciji se pokazuje kako se pomoću određenog integrala mogu računati površine široke klase podskupova ravnine. Također se pokazuje kako se može računati obujam rotacijskog tijela.

5.1 PRIPADNI PROBLEM

Važni podskupovi ravnine u pravilu su zadani krivuljama koje ih omeđuju. Postavlja se pitanje računanja površine takvih podskupova. Taj se problem načelno rješava pomoću određenog integrala, pod uvjetom da su krivulje koje omeđuju podskup grafovi (razumnih) funkcija.
Određeni integral omogućuje strog izvod formula za obujam kugle i stošca i, općenito, računanje obujma tijela nastalih rotacijom.

5.2 POTREBNO PREDZNANJE

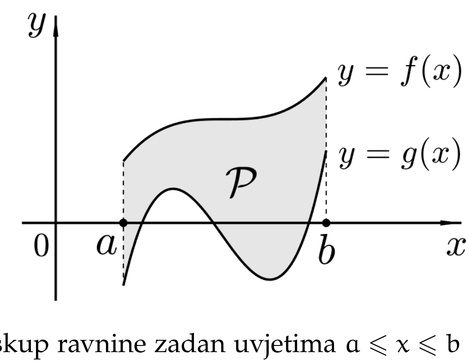
Potrebno je poznavati pojam određenog integrala i metode računanja te pojam površine i obujma. Također, treba znati formulu za obujam V valjka visine h i polumjera r osnovke: $V = \pi r^2 h$.

5.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

5.3.1 Računanje površina podskupova ravnine

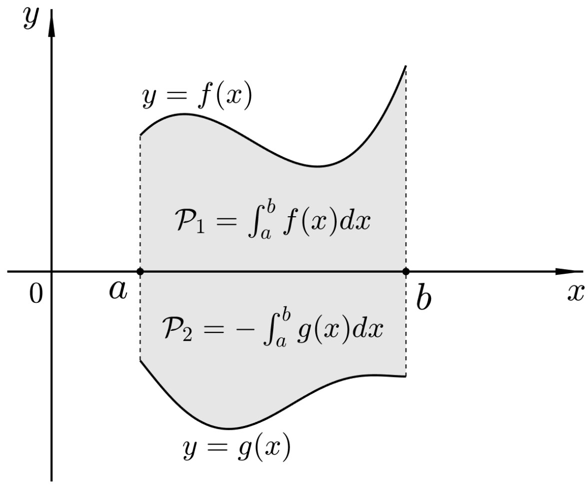
Površinu $\mathcal{P}$ podskupa ravnine (Slika 5.1) zadanog uvjetima $a \leqslant x \leqslant b$ i $g(x) \leqslant y \leqslant f(x)$ računamo formulom

$$\mathcal{P} = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx.$$



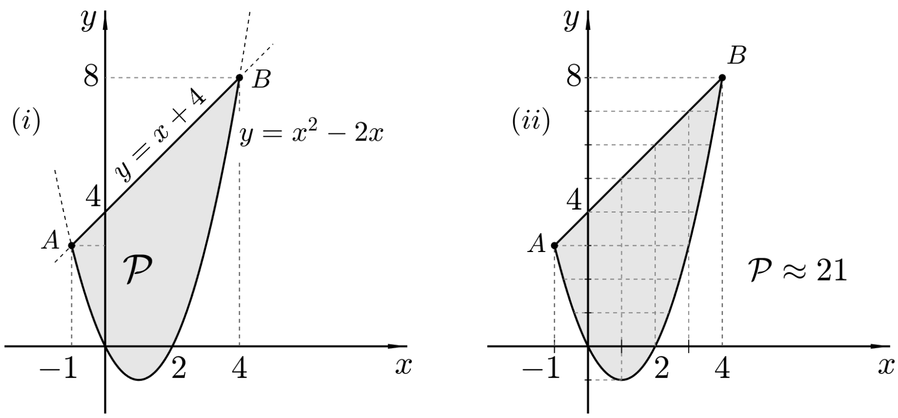
Slika 5.1: Podskup ravnine zadan uvjetima $a \leqslant x \leqslant b$ i $g(x) \leqslant y \leqslant f(x)$

U slučaju kad je f pozitivna, a g negativna funkcija, ta je formula ilustrirana Slikom 5.2.



Slika 5.2: Podskup ravnine zadan pozitivnom funkcijom f i negativnom g

Primjer 5.1. [Površina podskupa ravnine]
Procijenimo, a poslije točno odredimo površinu podskupa ravnine omeđenog krivuljama s jednadžbama $y = x + 4$ i $y = x^2 - 2x$.
Vidimo da je riječ o označenom dijelu ravnine između pravca i parabole, Slika 5.3 (i). Vidimo, također, da možemo primijeniti gornju formulu, samo treba odrediti presjek krivulja: točke A i B. To se ostvaruje rješavanjem sustava $y = x^2 - 2x$, $y = x + 4$. Dobijemo $A(-1, 3)$ i $B(4, 8)$. Sad možemo procjenjivati. Prebrojavanjem "kvadratića" sa Slike 5.3 (ii) i procjenjivanjem njihovih djelića, vidimo da je $\mathcal{P} \approx 21$.



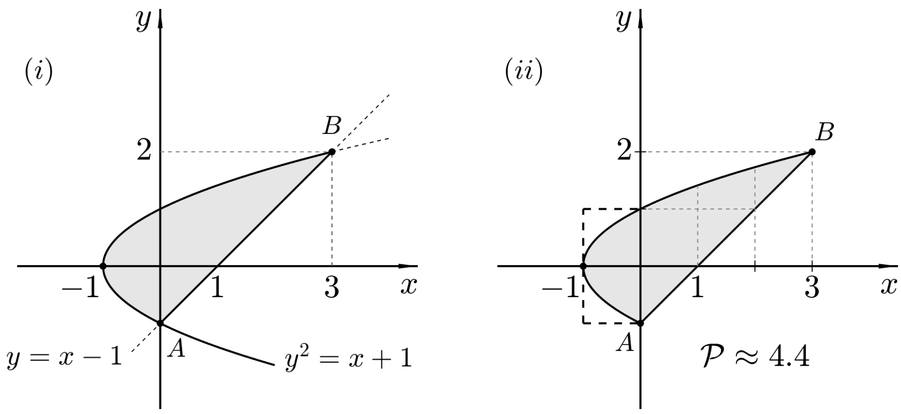
Slika 5.3: Primjer 5.1

Budući da znademo granice, površinu možemo i točno izračunati:

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \int_{-1}^{4} \left[(x+4) - (x^2 - 2x)\right] dx = \int_{-1}^{4} (-x^2 + 3x + 4) dx \\ &= \left(-\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Big|_{-1}^{4} = \frac{125}{6} \approx 21.\end{aligned}$$

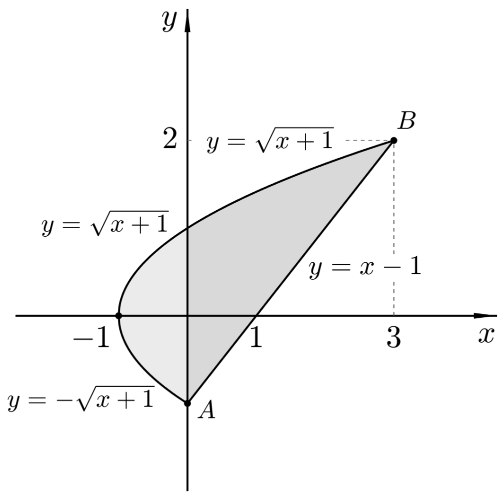
□

Primjer 5.2. [Površina podskupa ravnine]
Geometrijski predočimo i procijenimo, a nakon toga točno izračunajmo površinu podskupa ravnine omeđenog krivuljama s jednadžbama $y^2 = x+1$ i $y = x-1$.
Rješavanjem sustava $y^2 = x+1$, $y = x-1$ dobije se $A(0,-1)$, $B(3,2)$ (Slika 5.4 (i)) i gruba procjena $\mathcal{P} \approx 4.4$, Slika 5.4 (ii).



Slika 5.4: Primjer 5.2

Površina se sastoji od dva dijela, lijevo i desno od y-osi. Lijevi je dio približno $\frac{2}{3}$ pravokutnika s duljinama stranica 1 i 2, što iznosi $\frac{4}{3}$. Desni je dio približno trokut s osnovicom 2 i visinom 3 pa ima površinu 3 (u stvarnosti je ta površina nešto veća). Zbrajanjem dobijemo $\frac{4}{3} + 3 = \frac{13}{3} \approx 4.33$. Kako smo površinu desnog dijela malko podcijenili, odlučujemo se na procjenu $\mathcal{P} \approx 4.4$.
Ako želimo primijeniti formulu za računanje površine zadanog podskupa ravnine (područja), treba najprije to područje podijeliti na dva dijela (Slika 5.5), jer se u $x = 0$ mijenja izraz za funkciju g. Stoga se računanje površine područja svodi na računanje dvaju integrala.

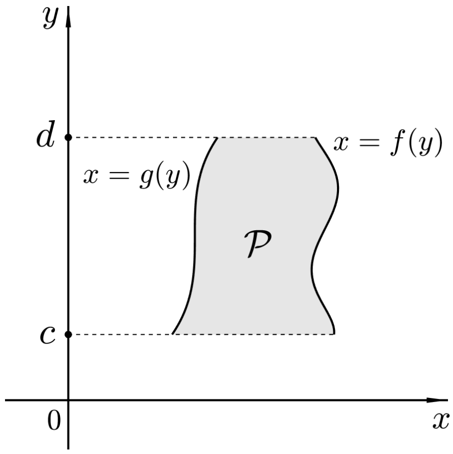


Slika 5.5: Primjer 5.2

Zadatak ostavljamo za samostalan rad. Vidjet ćemo kako se postupak može pojednostaviti, tako da se račun provede izravno. □

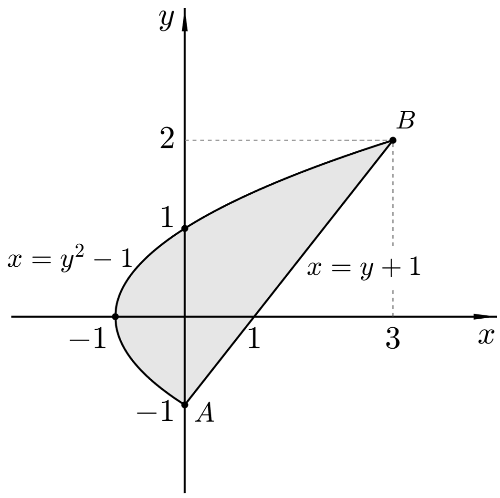
Podskup u prethodnom primjeru zadan je uvjetima $c \leqslant y \leqslant d$ i $g(y) \leqslant x \leqslant f(y)$. Površine takvih podskupova (Slika 5.6) određuju se formulom

$$\mathcal{P} = \int_c^d [f(y) - g(y)]\, dy.$$



Slika 5.6: Podskup ravnine zadan uvjetima $c \leqslant y \leqslant d$ i $g(y) \leqslant x \leqslant f(y)$

Primjer 5.3. [Površina podskupa ravnine]
Drugo, prirodnije, rješenje Primjera 5.2.



Slika 5.7: Primjer 5.3

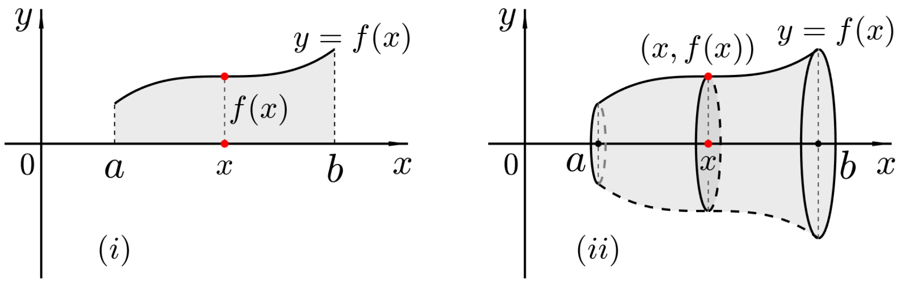
Vidimo (Slika 5.7) da je

$$\mathcal{P} = \int_{-1}^{2} \left[(y+1) - (y^2 - 1)\right] dy = \left(-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} - 2y\right)\Big|_{-1}^{2} = \frac{9}{2} = 4.5,$$

što je u skladu s procjenom. □

5.3.2 Obujam rotacijskog tijela

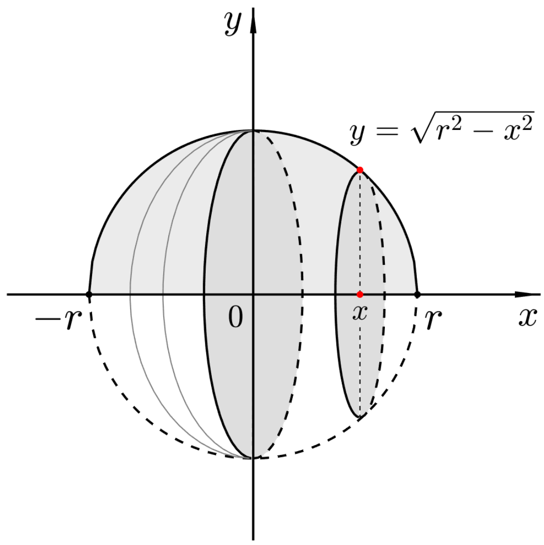
Uočimo dio ravnine između grafa funkcije f i x-osi, za x između a i b, Slika 5.8 (i). Rotacijom oko x-osi dobije se rotacijsko tijelo, Slika 5.8 (ii). Presjek tog tijela s ravninom okomitom na x-os u koordinati x jest krug sa središtem na x-osi, polumjera $f(x)$.



Slika 5.8: Rotacijsko tijelo dobiveno rotacijom oko x-osi

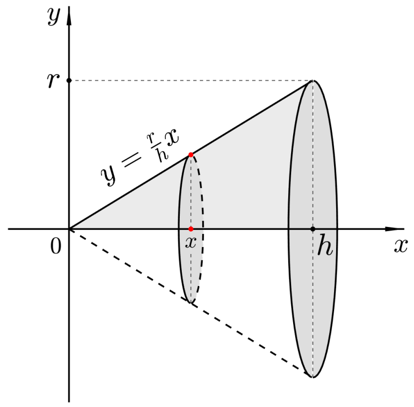
Primjer 5.4. [Kugla i stožac kao rotacijska tijela]

(i) Rotacijom oko x-osi polukruga polumjera r sa središtem u ishodištu, nastaje kugla polumjera r sa središtem u ishodištu, Slika 5.9.
Gornja polukružnica ima jednadžbu $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Dakle, polukrug je dio ravnine između grafa funkcije $f(x) := \sqrt{r^2 - x^2}$ i x-osi za x između $-r$ i r.



Slika 5.9: Primjer 5.4 (i) - kugla kao rotacijsko tijelo

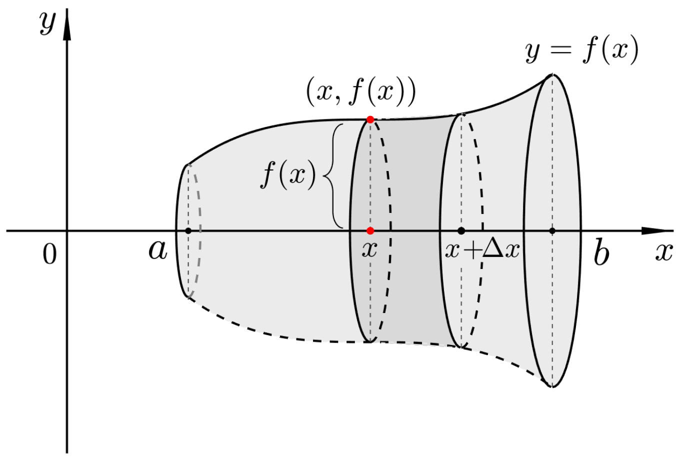
(ii) Rotacijom oko x-osi pravokutnog trokuta sa Slike 5.10 nastaje stožac polumjera r i visine h.
Pravac na kojemu je hipotenuza trokuta ima jednadžbu $y = \frac{r}{h}x$ pa je trokut dio ravnine između grafa funkcije $f(x) := \frac{r}{h}x$ i x-osi za x od 0 do h.



Slika 5.10: Primjer 5.4 (ii) - stožac kao rotacijsko tijelo

□

Iz Slike 5.11 vidimo da je djelić rotacijskog tijela od x do $x + \Delta x$ pseudovaljak, tj. to je približno valjak polumjera $f(x)$ i visine Δx. Volumen (obujam) tog djelića upravo je prirast $\Delta V(x)$ volumena tijela od x do $x + \Delta x$.



Slika 5.11: Djelić rotacijskog tijela od x do $x + \Delta x$

Vidimo da je $\Delta V(x) \approx \pi f^2(x)\Delta x$ pa je $dV(x) = \pi f^2(x)dx$, diferencijal volumena u x. Integriranjem od $x = a$ do $x = b$ dobijemo sljedeću **formulu za volumen** V **rotacijskog tijela**:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Primjer 5.5. [Obujam kugle i stošca]
Koristeći se Primjerom 5.4 i formulom za obujam rotacijskog tijela, dobijemo:

(i) Obujam kugle polumjera r:

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right) dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3}\right) \Big|_{-r}^{r} = \pi \frac{4r^3}{3}$$

(ii) Obujam stošca polumjera r i visine h:

$$V = \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}x\right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \frac{x^3}{3}\bigg|_0^h = \pi \frac{r^2 h}{3}.$$

□

5.4 PRIMJENA MATLAB-A

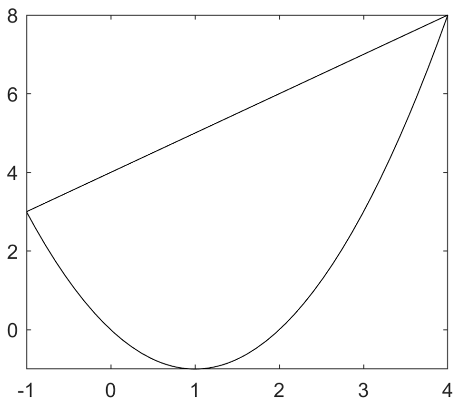
5.4.1 Računanje površina podskupova ravnine

Riješimo problem iz Primjera 5.1. Najprije definirajmo funkcije, a potom odredimo točke presjeka pripadnih krivulja naredbom `solve`:

```
syms x
f1 = x + 4
f2 = x^2 - 2*x
solve(f1 == f2)                                    % [-1; 4]
```

Te krivulje crtamo na intervalu određenom presječnim točkama:

```
fplot([f1 f2], [-1 4], 'k')
```



Vidimo da pravac odozgo omeđuje područje integracije, a parabola odozdo. Prelazimo na računanje integrala čija je vrijednost jednaka površini područja omeđenog krivuljama, što činimo pomoću uobičajene naredbe `int`:

```
int(f1 - f2, -1, 4)                                % 125/6
```

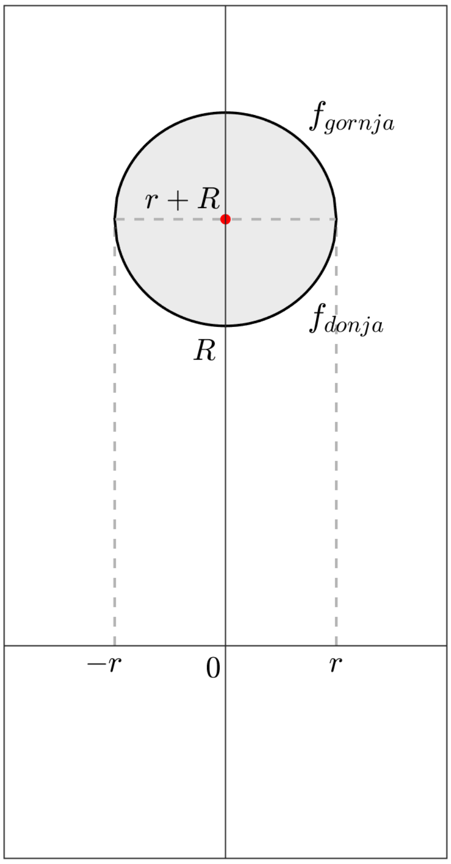
Slično bismo postupili i u Primjeru 5.3, uz napomenu da funkcije treba definirati kao funkcije varijable y.

5.4.2 Obujam rotacijskog tijela

Pokažimo na Primjeru 5.5 kako se naredba `int` koristi za računanje volumena kugle i stošca:

```
syms r h x
f_kugla = sqrt(r^2 - x^2)
f_stozac = (r/h)*x
V_kugla = pi*int(f_kugla^2, -r, r)          % (4*pi*r^3)/3
V_stozac = pi*int(f_stozac^2, 0, h)         % (pi*h*r^2)/3
```

Izračunajmo i volumen torusa iz Zadatka 6 u 5.5 kao razliku volumena dvaju tijela, jednog dobivenog rotacijom oko x-osi područja ispod gornje polukružnice te drugog dobivenog rotacijom oko x-osi područja ispod donje polukružnice sa slike:




```
syms r R x
f_gornja = R + r + sqrt(r^2 - x^2)
f_donja = R + r - sqrt(r^2 - x^2)
V_torus = pi*(int(f_gornja^2, -r,r) - int(f_donja^2, -r, r))

V_torus = 2*r^2*pi^2*(r + R)
```

5.5 PITANJA I ZADATCI

1. U formuli $P = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ iz 5.3.1 uvrstite $g = 0$ tj. $g(x) = 0$ za sve $x \in [a, b]$. Nacrtajte sliku i napišite nejednadžbe koje određuju područje. Komentirajte jeste li to već vidjeli.

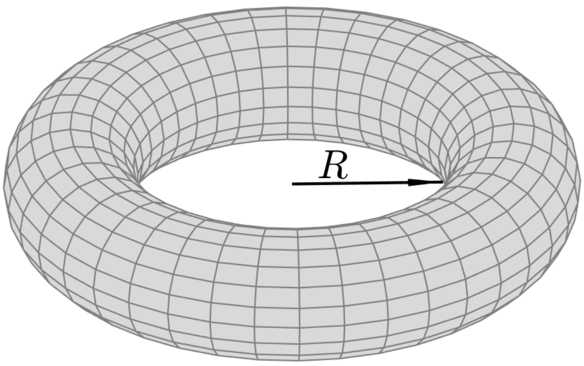
2. (i) Odredite područje ravnine između krivulja $y = ax^2$ i $y = \sqrt{bx}$ za pozitivne parametre a i b. Ilustrirajte grafički i izračunajte za $a = 3$ i $b = 24$.
   (ii) Kako su povezane površine za parametre a i b s onom za parametre ka i kb? Pokušajte objasniti što se događa.

3. Predočite geometrijski, procijenite i izračunajte površinu između grafova funkcija sin i cos za $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.
   Uputa: pazite na to kada je koji graf ispod, a kada iznad.

4. (i) Izračunajte obujam rotacijskog elipsoida dobivenog rotacijom oko x-osi područja omeđenog elipsom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Komentirajte vezu s obujmom kugle.
   (ii) Kako su povezani volumeni za parametre a i b s onim za parametre ka i kb? Posebno za $k = 2$.

5. (i) Izračunajte obujam rotacijskog paraboloida dobivenog rotacijom oko x-osi područja omeđenog parabolom $y^2 = ax$ i pravcem $x = h$, za $a, h > 0$. Predočite i posebno izračunajte za $a = 2$ i $h = 5$.
   (ii) Kako su povezani volumeni za parametre a i h s onim za parametre ka i kh? Posebno za $k = 2$.

6. Izračunajte obujam torusa (automobilske gume), ako je poprečni presjek krug polumjera r, a unutarnji promjer (promjer praznog dijela) $2R$, Slika 5.12.



Slika 5.12: Torus

6 NEKE PRIMJENE ODREĐENOG INTEGRALA U INŽENJERSTVU

U lekciji se ilustriraju tri primjene određenog integrala u inženjerstvu. Prva je u rješavanju problema težišta ravne nehomogene žice, što je ujedno i primjena u vjerojatnosti i statistici. Druga je u rješenju problema momenta inercije, a treća u problemu određivanja rada što ga izvrši (promjenjiva) sila koja djeluje uzduž nekog pravca.

6.1 PRIPADNI PROBLEM

Težište ravne homogene tanke žice upravo je središte žice. Postavlja se pitanje težišta ako žica nije homogena. Matematički, to je problem težišta nehomogenog segmenta. Taj se problem može riješiti pomoću određenog integrala, pod uvjetom da poznajemo gustoću žice, tj. gustoću segmenta. Slično je za moment inercije.
Rad što ga stalna sila koja djeluje uzduž nekog pravca na putu konačne duljine jednaka je, prema definiciji rada, umnošku iznosa sile i duljine puta (uz usklađene jedinice). Postavlja se pitanje rada ako sila nije stalna, već promjenjiva. I taj se problem rješava pomoću određenog integrala.

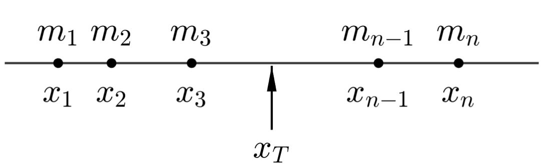
6.2 POTREBNO PREDZNANJE

Potrebno je poznavati pojam neodređenog i određenog integrala te metoda njihova računanja, naročito metodu parcijalne integracije. Također je potrebno poznavati sljedeće fizikalne pojmove:

1. Pojam težišta sustava masa na pravcu i razumijevanje formule

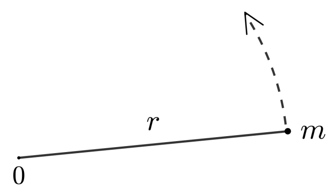
$$x_T = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i},$$

   gdje su mase $m_1, \ldots, m_n$ smještene na koordinatnom pravcu u točke s koordinatama $x_1, \ldots, x_n$, Slika 6.1. Uočimo da je $\sum m_i$ u nazivniku ukupna masa.



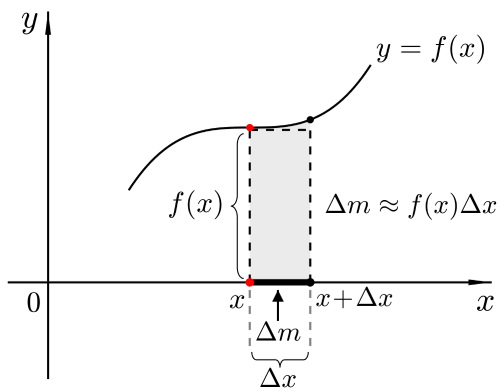
Slika 6.1: Težište sustava masa na pravcu

2. Pojam momenta inercije I mase m oko točke udaljene r od mase (Slika 6.2) i formule
$$I = mr^2$$
te formule za moment inercije oko težišta I_T sustava masa na pravcu (koja odavdje izravno slijedi jer se momenti inercije zbrajaju):
$$I_T = \sum (x_i - x_T)^2 m_i.$$



Slika 6.2: Moment inercije mase oko točke

3. Pojam funkcije gustoće mase $f(x)$ razmještene na koordinatnom pravcu koja se definira kao limes prosječnih gustoća:
$$f(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}.$$
Dakle, $\Delta m \approx f(x)\Delta x$, Slika 6.3, gdje je Δm masa smještena između x i $x + \Delta x$, tj. na malom segmentu duljine Δx. Drugim riječima, djelić mase Δm po iznosu je približno jednak površini pravokutnika sa stranicama duljine $f(x)$ i Δx.

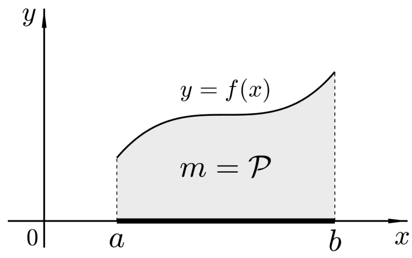


Slika 6.3: Funkcija gustoće mase $f(x)$

6.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

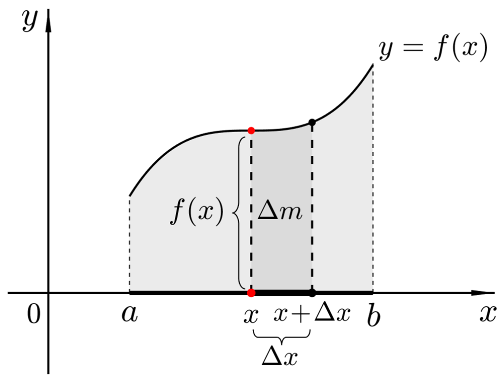
6.3.1 Masa nehomogenog segmenta

Iz diferencijalne relacije $\Delta m \approx f(x)\Delta x$, dobijemo $dm = f(x)dx$ (to slijedi i izravno iz definicije gustoće u točki), a odatle (Slika 6.4) **formulu za masu nehomogenog segmenta**:
$$m = \int_a^b f(x)dx.$$



Slika 6.4: Masa nehomogenog segmenta

Dakle, masa segmenta $[a, b]$ interpretira se *površinom ispod grafa funkcije gustoće mase* $f(x)$, za x od a do b. Posebno, djelić mase Δm djelića segmenta Δx na Slici 6.3 ima masu jednaku površini područja ispod grafa od f, a iznad Δx, Slika 6.5.



Slika 6.5: Funkcija gustoće $f(x)$ mase i djelić mase Δm

Primjer 6.1. [Primjena formule za masu]
Neka je funkcija gustoće mase $f(x) := x$ za $0 \leqslant x \leqslant 5$.

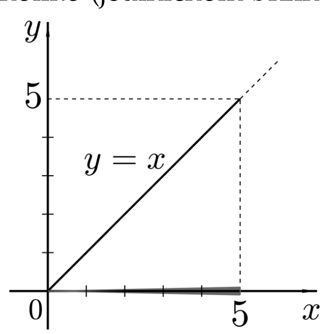
(i) Predočimo grafički raspored mase i interpretirajmo.

(ii) Odredimo ukupnu masu m.

(iii) Odredimo točku c do koje je razmazano polovica mase.

(iv) Procijenimo je li težište segmenta u c, lijevo od c ili desno od c.

(i) Graf je pravac s jednadžbom $y = x$ za $0 \leqslant x \leqslant 5$, Slika 6.6. Možemo zamisliti da je masa razmazana po segmentu $[0, 5]$ tako da se namaz jednoliko (jediničnom brzinom) pojačava.

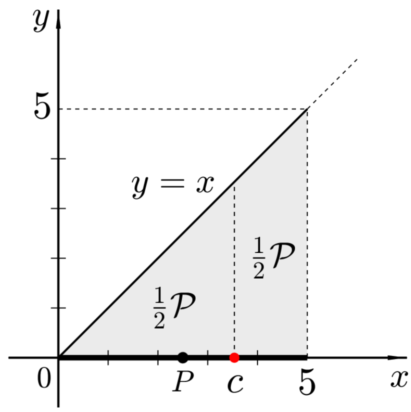


Slika 6.6: Primjer 6.1 (i)

(ii) Rezultat je izražen u jedinicama mase:

$$m = \int_0^5 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^5 = 12.5.$$

(iii) Treba biti (Slika 6.7): $\int_0^c x\,dx = \frac{12.5}{2}$, tj. $\frac{c^2}{2} = \frac{12.5}{2}$.
Dakle, $c = \sqrt{12.5} \approx 3.536$.



Slika 6.7: Primjer 6.1 (ii)

(iv) Težište je lijevo od c jer se gustoća mase povećava. Također vidimo da bi težište trebalo biti desno od polovišta P segmenta koje je u 2.5. □

Strogi izvod formule za masu

Formulu za masu segmenta izveli smo intuitivnim pristupom, zanemarujući matematičku strogoću. Sad ćemo pokazati kako se ta formula, čak i općenitija, može izvesti koristeći se svojstvima određenog integrala.
Najprije definiramo funkciju $m(x)$ kao masu od a do x, dakle

$$m(x) := \ masa\ segmenta\ [a, x].$$

Odmah vidimo da je $m(a) = 0$ i $m(b) = m$, ukupna masa. Također, formula za funkciju gustoće $f(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}$ sad se preciznije može zapisati kao

$$f(x) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m(x)}{\Delta x}.$$

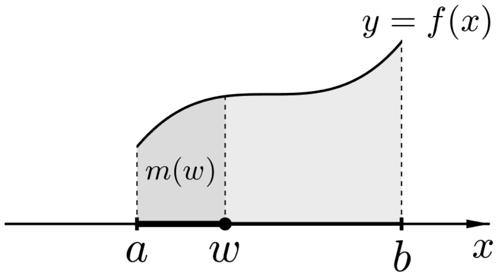
Drugim riječima, $f(x)$ je derivacija funkcije $m(x)$, tj. $m'(x) = f(x)$. Integriranjem te relacije od $x = a$ do $x = w$ za bilo koji $w \in [a, b]$, dobije se

$$\int_a^w m'(x)dx = \int_a^w f(x)dx.$$

Kako je $m(x)$, po definiciji, primitivna funkcija funkcije $m'(x)$, iz Leibnitz-Newtonove formule slijedi $m(x)|_a^w = \int_a^w f(x)dx$, tj. $m(w) - m(a) = \int_a^w f(x)dx$, a kako je $m(a) = 0$, vrijedi

$$m(w) = \int_a^w f(x)dx.$$

Dakle, $m(w)$ je po iznosu jednak površini ispod grafa funkcije gustoće f, od $x = a$ do $x = w$. To ilustriramo Slikom 6.8.



Slika 6.8: Graf funkcije mase $m(x)$

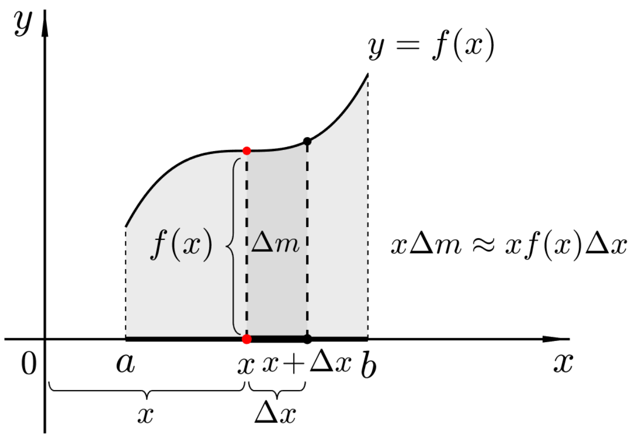
Formula vrijedi za svaki w iz segmenta $[a, b]$ pa i za $w = b$, dakle

$$m = m(b) = \int_a^b f(x)dx,$$

kako smo dobili i prije.

6.3.2 Težište nehomogenog segmenta

Postupimo analogno sustavu čestica na pravcu. Doprinos *krak sile puta sila* djelića mase Δm (koji odgovara veličini $x_i m_i$), približno je jednak $x\Delta m$, što je, pak, približno jednako $xf(x)\Delta x$, Slika 6.9.



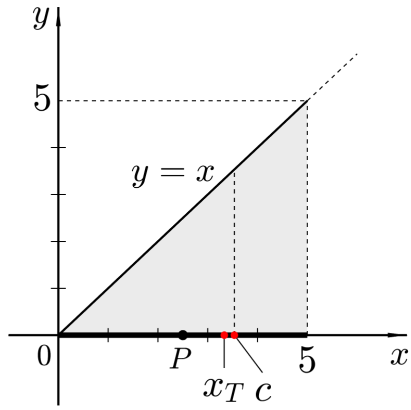
Slika 6.9: Težište nehomogenog segmenta - doprinos $xf(x)\Delta x$ za točku x

"Zbrajanjem" svih doprinosa $xf(x)\Delta x$ i dijeljenjem s ukupnom masom dobijemo **formulu za težište nehomogenog segmenta**:

$$x_T = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

Vidimo da formula u diskretnom slučaju (sustav masa na pravcu) prelazi u analognu formulu u kontinuiranom slučaju (nehomogeni segment) i obratno, preko identifikacija $x_i \leftrightarrow x$, $m_i \leftrightarrow f(x)dx$, $\sum \leftrightarrow \int$.

Primjer 6.2. [Primjena formule za težište]
Odredimo težište segmenta iz Primjera 6.1, Slika 6.10.

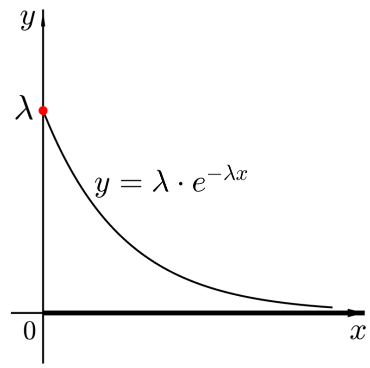


Slika 6.10: Primjer 6.2

$$x_T = \frac{\int_0^5 x \cdot x dx}{\int_0^5 x dx} = \frac{\frac{x^3}{3}\Big|_0^5}{12.5} = \frac{125}{3 \cdot 12.5} = \frac{10}{3}$$

Vidimo da je $2.5 < x_T < \sqrt{12.5}$, kako smo već ranije predvidjeli. $\square$

Primjer 6.3. [Formula za masu i težište na beskonačnom intervalu]
Formula za masu i težište vrijedi i za beskonačne intervale: neka je masa razmazana na $[0, +\infty >$ prema pravilu za gustoću $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, za $x \geqslant 0$, gdje je $\lambda > 0$ realna konstanta (Slika 6.11).



Slika 6.11: Primjer 6.3 - graf funkcije gustoće mase

Pokažimo:

(i) $m = 1$ (jedinična masa)

(ii) $x_T = \frac{1}{\lambda}$

(iii) polovica mase je do $\frac{\ln 2}{\lambda}$.

(i)
$$m = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left(-e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^{+\infty} = -0 - (-1) = 1$$

(ii)

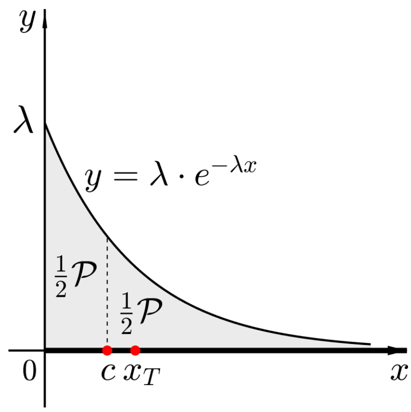
$$\begin{aligned}
x_T &= \frac{\int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx}{\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx} = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&= \left[u = x, du = dx;\ dv = \lambda e^{-\lambda x}, v = -e^{-\lambda x}\right] \\
&= \left(-x e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \\
&= (0 - 0) - \frac{1}{\lambda}(0 - 1) = \frac{1}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Rezultat je prikazan na Slici 6.12. Ovdje uočimo sličnost s Primjerom 4.5 iz Lekcije 4.

(iii) Ako je tražena koordinata c, onda treba biti $\int_0^c \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{2}$, tj.

$$\begin{aligned}
\left(-e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^c &= \frac{1}{2} \\
-1 + e^{-\lambda c} &= \frac{1}{2} \\
c &= \frac{\ln 2}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Rezultat je prikazan na Slici 6.12. Usporedite ovaj rezultat s Primjerom 2.2 iz Lekcije 2.



Slika 6.12: Primjer 6.3 (ii) i (iii)

□

6.3.3 Moment inercije segmenta

Prema uzoru na moment inercije sustava masa na pravcu, dobijemo **formulu za moment inercije oko težišta segmenta** $[a, b]$ kojemu je f funkcija gustoće:

$$I_T = \int_a^b (x - x_T)^2 f(x) dx.$$

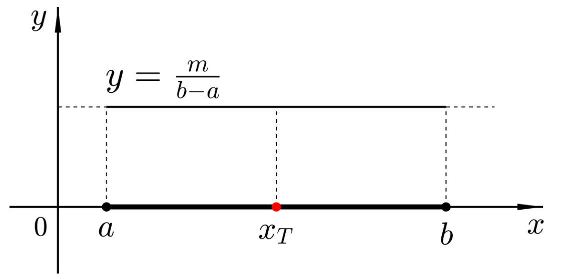
Primjer 6.4. [Moment inercije homogenog štapa]
Odredimo moment inercije oko težišta homogenog segmenta $[a,b]$ mase m.
Čak je i homogeni slučaj netrivijalan i potrebna nam je formula. Homogenost znači: $f(x) = \frac{m}{b-a}$ za svaki $x \in [a,b]$.
Naime:

$$\int_a^b \frac{m}{b-a} dx = \left(\frac{m}{b-a}x\right)\Big|_a^b = m.$$

Znamo (Slika 6.13) da je za homogeni segment $x_T = \frac{a+b}{2}$ pa je

$$\begin{aligned}
I_T &= \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{m}{b-a} dx \\
&= \frac{m}{b-a}\left[\frac{1}{3}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3\right]\Big|_a^b \\
&= \frac{m}{b-a}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3\right] \\
&= \frac{m}{b-a} \cdot \frac{2}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 \\
&= \frac{m(b-a)^2}{12} \\
&= \frac{ml^2}{12},
\end{aligned}$$

gdje je $l := b - a$ duljina segmenta. To je dobro poznata formula momenta inercije homogenog štapa.



Slika 6.13: Primjer 6.4 - homogeni segment

□

Primjer 6.5. [Primjena formule za moment inercije]
Odredimo moment inercije oko težišta segmenta iz Primjera 6.1.
U tom smo primjeru imali $[a,b] = [0,5]$ i $f(x) := x$. U Primjeru 6.2 izračunali smo $x_T = \frac{10}{3}$. Zato je

$$\begin{aligned}
I_T &= \int_0^5 \left(x - \frac{10}{3}\right)^2 x dx = \int_0^5 \left(x^3 - \frac{20}{3}x^2 + \frac{100}{9}x\right) dx \\
&= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{20}{9}x^3 + \frac{50}{9}x^2\right)\Big|_0^5 = \frac{625}{36}.
\end{aligned}$$

□

6.3.4 Rad sile na ravnom putu

Neka je: x koordinata pravca uzduž kojeg djeluje sila, a $F(x)$ vrijednost sile u točki x (sjetimo se dogovora: ako je $F(x) > 0$ sila djeluje u pozitivnom smjeru, inače djeluje suprotno).
Sjetimo se da je rad stalne sile jednak umnošku sile i puta. Zato za djelić rada $\Delta R(x)$ što ga sila $F(x)$ učini na putu od x do $x + \Delta x$, vrijedi

$$\Delta R(x) \approx F(x)\Delta x.$$

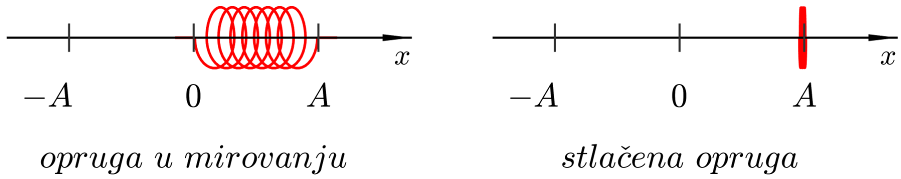
Odavdje dobijemo, uz prirodne uvjete koje zadovoljava funkcija $F(x)$

$$dR(x) = F(x)dx,$$

a potom za rad R što ga F učini od $x = a$ do $x = b$

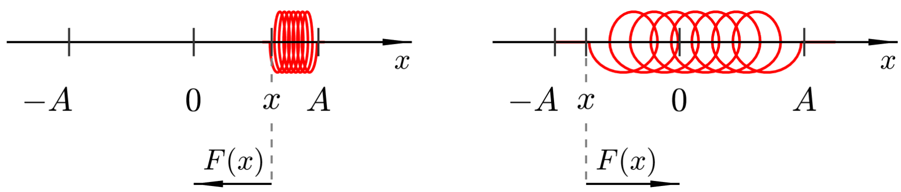
$$R = \int_a^b F(x)dx.$$

Primjer 6.6. [Primjer nekonstantne sile - elastična opruga]
Neka je x koordinata pravca, a A koordinata točke u kojoj je pričvršćena savršeno elastična tanka opruga (Slika 6.14) kojoj je u mirovanju vrh u ishodištu.



Slika 6.14: Primjer 6.6 - elastična opruga

Oprugu stlačimo u točku A i nakon toga pustimo. Zbog savršene elastičnosti vrh opruge titra između točaka A i $-A$. Pretpostavimo da je sustav izoliran tj. da je jedina sila koja se tu javlja sila napetosti opruge. Vrijednost te sile u x označimo kao $F(x)$.
Intuitivno je jasno (i lako se možemo uvjerili) da je sila napetosti na vrh opruge uvijek usmjerena prema ishodištu (Slika 6.15), tj. da su x i $F(x)$ suprotnih predznaka.

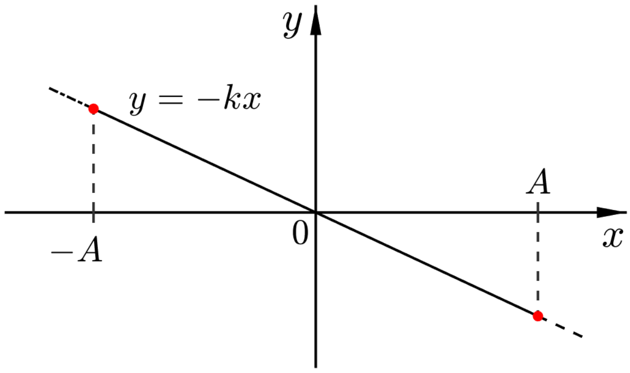


Slika 6.15: Primjer 6.6 - sila napetosti $F(x)$ u točki x

Također je intuitivno jasno, a može se potvrditi pokusom da je ta sila proporcionalna udaljenošću vrha od ishodišta (Hookeov zakon). Dakle:

$$F(x) = -kx,$$

gdje je $k > 0$ konstanta ovisna o materijalu (Slika 6.16).



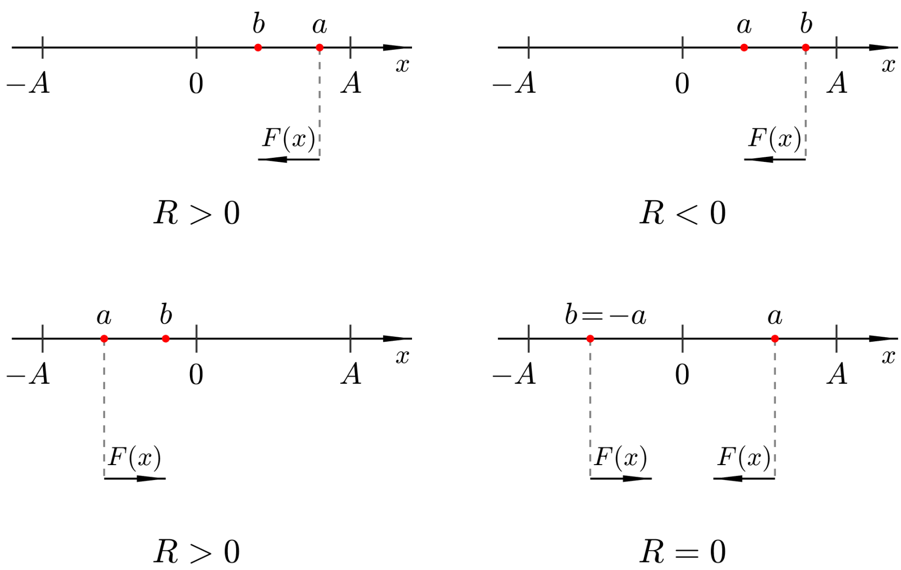
Slika 6.16: Primjer 6.6 - graf sile napetosti F

□

Primjer 6.7. [Rad sile napetosti elastične opruge]
Izračunajmo rad R sile F iz Primjera 6.6 na putu od a do b, i komentirajmo rezultat.

$$R = \int_a^b F(x)dx = \int_a^b (-kx)dx = \left(-k\frac{x^2}{2}\right)\Big|_a^b = k\frac{a^2 - b^2}{2}.$$

Vidimo da je rad pozitivan ako je $|a| > |b|$, inače je negativan ili je jednak nuli (ako je $b = \pm a$). Na Slici 6.17 predočene su i komentirane razne mogućnosti.



Slika 6.17: Primjer 6.7 - rad sile $F(x)$ na putu od a do b

Posebno, iz Slike 6.17, a i iz rješenja integrala vidimo (ono što je fizikalno jasno):

(i) na putu od A do ishodišta 0 rad sile je pozitivan. Fizikalno, to je zato što put i sila imaju isto usmjerenje.

(ii) na putu od ishodišta 0 do $-A$ rad sile je negativan. Fizikalno, to je zato što put i sila imaju različita usmjerenja, odnosno zato što za rastezanje opruge treba uložiti energiju.

(iii) na putu od $-A$ do ishodišta 0 rad sile je pozitivan. Fizikalno, to je zato što put i sila imaju isto usmjerenje.

(iv) na putu od ishodišta 0 do A rad sile je negativan. Fizikalno, to je zato što put i sila imaju različita usmjerenja, odnosno zato što za stiskanje opruge treba uložiti energiju. □

6.4 PRIMJENA MATLAB-A

6.4.1 Računanje mase, težišta i momenta inercije oko težišta

Pomoću naredbe `int` riješit ćemo Primjer 6.3 jer će taj problem biti važan u vjerojatnosti i statistici. Osim mase i težišta, računamo i moment inercije oko težišta, tj. rješavamo Zadatak 5 iz 6.5. Za parametar λ pretpostavljamo da je pozitivan, koristeći za to naredbu `assume`:

```
syms lambda x
assume(lambda > 0)
f(x) = lambda*exp(-lambda*x)
m = int(f(x), 0, Inf)                                  % 1
x_T = int(x*f(x), 0, Inf)/m                     % 1/lambda
I_T = int((x - x_T)^2*f(x), 0, Inf)           % 1/lambda^2
```

Vidimo da se rezultati za masu i težište podudaraju s onima iz Primjera 6.3.

6.5 PITANJA I ZADATCI

1. Pokažite strogo matematički da je težište homogenog segmenta u sredini segmenta.

2. (i) Što se događa s težištem ako se sustav translatira za c, tj. ako se koordinati položaja doda c? Odgovorite i obrazložite u diskretnom i u kontinuiranom slučaju.

   (ii) Što se događa s težištem ako se koordinata položaja pomnoži s c (da se sustav rastegne ili stegne s koeficijentom c)? Odgovorite i obrazložite u diskretnom i u kontinuiranom slučaju. Razmislite što to znači u slučaju kad se promijeni duljinska jedinica, primjerice centimetar umjesto metra.

3. Isto pitanje kao u Zadatku 2, samo sad za moment inercije oko težišta.

4. (i) Napišite formulu za moment inercije oko bilo koje točke na pravcu (ne nužno oko težišta).
   Uputa: koordinata nove točke x_0 ima ulogu koordinate težišta.
   (ii) Primijenite (i) na računanje momenta inercije homogenog segmenta oko rubne točke. Unaprijed procijenite koji je moment inercije veći.

5. Izračunajte moment inercije oko težišta u Primjeru 6.3.

6. Neka je $[a, b] = [0, 5]$ i neka je funkcija gustoće $f(x) = 5 - x$.
   (i) Procijenite grafički masu, potom je izračunajte.
   (ii) Procijenite, potom izračunajte c (do kojega je polovica mase) te procijenite odnos između c i x_T.
   (iii) Izračunajte x_T.
   (iv) Procijenite pa izračunajte moment inercije oko težišta.
   (v) Komentirajte vezu s Primjerima 6.1, 6.2 i 6.5. Jeste li iz rezultata tih primjera mogli izravno riješiti ovaj zadatak?

   Uputa za (i): u istom koordinatnom sustavu predočite funkciju gustoće homogenog segmenta.

7. Koliki rad napravi savršeno elastična opruga dok iz stisnutog položaja A dođe u:
   (i) opruženi položaj (ishodište)?
   (ii) u položaj $-A$? Protumačite rezultat.

7 POJAM FUNKCIJE DVIJU VARIJABLA, GRAFA I PARCIJALNIH DERIVACIJA

U lekciji se obrađuje pojam funkcije više varijabla, ponajviše dviju. Uvodi se pojam grafa funkcije dviju varijabla, daju neki primjeri i uspoređuje s grafom funkcije jedne varijable. Također se, na osnovi pojma derivacije funkcije jedne varijable, uvodi pojam **parcijalne derivacije** funkcije dviju ili više varijabla.

7.1 PRIPADNI PROBLEM

U matematici i u primjeni često se pojavljuju veličine koje ovise o više drugih (nezavisnih) veličina, a ne samo o jednoj. Na primjer, u geometriji, obujam valjka ovisi i o polumjeru osnovke i o visini, u termodinamici tlak plina ovisi i o obujmu i o temperaturi i sl.
Takve se veze opisuju funkcijama s dvjema ili više varijabla, a njihove su geometrijske predodžbe grafovi funkcija. Brzina promjene neke veličine u odnosu na promjenu veličina o kojoj ona ovisi opisuje se parcijalnim derivacijama.

7.2 POTREBNO PREDZNANJE

Potrebno je poznavati pojam funkcije jedne varijable, njena grafa, derivacije (i derivacija višeg reda). Za predočavanje grafa funkcije dviju varijabla treba poznavati koordinatni sustav u prostoru.

7.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

7.3.1 Funkcije dviju varijabla – zadavanje

Ako neka veličina z zavisi o dvjema nezavisnim veličinama x i y, onda je pravilo f te zavisnosti **funkcija dviju varijabla**. Tu funkcijsku zavisnost pišemo kao

$$z = f(x, y).$$

Skup svih uređenih parova (a, b), gdje a ide skupom vrijednosti koje postiže veličina x i b ide skupom vrijednosti koje postiže y, za koje postoji $f(a, b)$, zove se **područje definicije (domena)** te funkcije.

Dakle, D je podskup koordinatne ravnine, tj. $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. To pišemo i kao

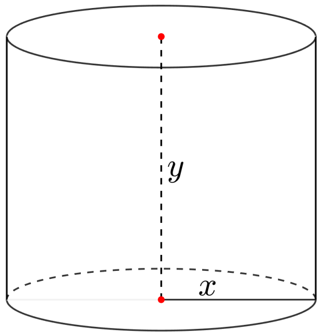
$$f : D \to R$$

odnosno kao $(x, y) \mapsto f(x, y)$.

Primjer 7.1. [Neke funkcije dviju varijabla i njihove domene]

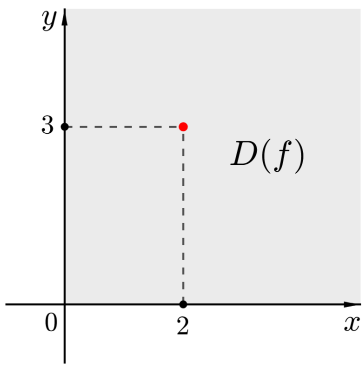
(i) Ako je x polumjer osnovke valjka (Slika 7.1), y visina i z obujam valjka, onda su te tri veličine povezane vezom

$$z = \pi x^2 y.$$



Slika 7.1: Primjer 7.1 (i)

Tu je $f(x, y) := \pi x^2 y$, a $D(f)$ su sve točke prvog kvadranta (Slika 7.2) jer x i y mogu biti bilo koji pozitivni realni brojevi. Na primjer, $f(2, 3) = \pi \cdot 2^2 \cdot 3 = 12\pi$, što znači da valjak polumjera osnovke 2 i visine 3 ima obujam 12π.



Slika 7.2: Primjer 7.1 (i) - domena funkcije $f(x, y) := \pi x^2 y$

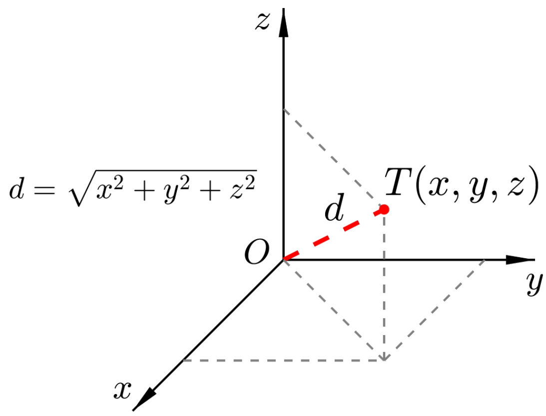
Inače, u tu funkciju možemo uvrstiti bilo koji uređeni par realnih brojeva, samo što oni onda nemaju geometrijsko značenje jer nema valjaka s negativnim polumjerom ili visinom.
To je česta pojava kod zapisivanja odnosa među veličinama u inženjerstvu. Naime, te veličine imaju svoja fizikalna značenja

koja utječu na suženje realnih vrijednosti varijabla, tj. na suženje matematičke, maksimalne domene.
Za funkcije zadane analitički, tj. zapisane formulom, ta se maksimalna domena zove **prirodna domena**.

(ii) Ako su x, y i z koordinate u prostoru, onda je funkcija f koja mjeri udaljenost točke od ishodišta zadana formulom

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

To je funkcija triju varijabla definirana na cijelom prostoru (Slika 7.3).



Slika 7.3: Primjer 7.1 (ii)

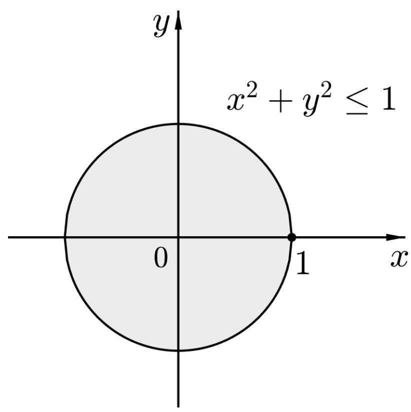
□

Primjer 7.2. [Prirodna domena funkcije]
Odredimo prirodnu domenu funkcije:

(i) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

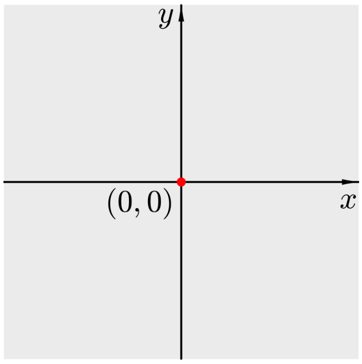
(ii) $f(x, y) := \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(i) Tu treba biti $1 - x^2 - y^2 \geqslant 0$, tj. $x^2 + y^2 \leqslant 1$, što je krug polumjera 1 sa središtem u ishodištu (Slika 7.4).



Slika 7.4: Primjer 7.2 (i) - krug polumjera 1 sa središtem u ishodištu

(ii) Tu treba biti $x^2 + y^2 \neq 0$, što je ravnina bez ishodišta (Slika 7.5). Naime, $(0, 0)$ je jedino rješenje jednadžbe $x^2 + y^2 = 0$.



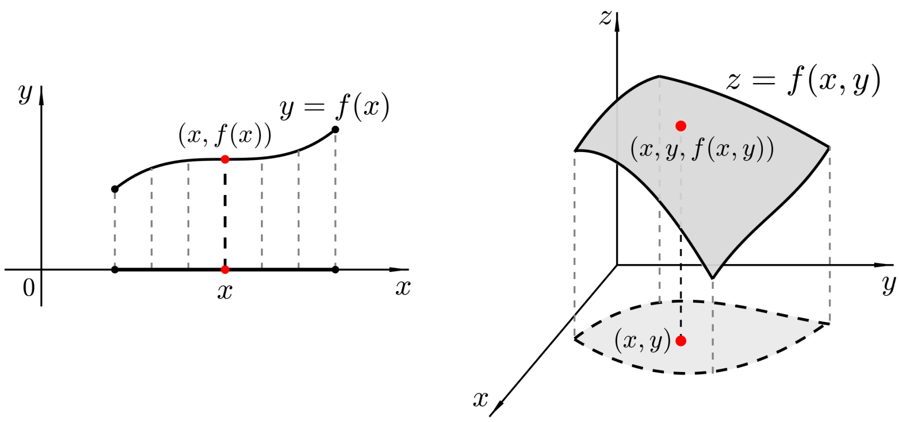
Slika 7.5: Primjer 7.2 (ii) - ravnina bez ishodišta

□

7.3.2 Graf funkcije dviju varijabla

Analogno tome kako je graf funkcije f jedne varijable *krivulja* u ravnini s jednadžbom $y = f(x)$, tako je graf funkcije dviju varijabla *ploha* u prostoru (Slika 7.6) s jednadžbom

$$z = f(x, y).$$



Slika 7.6: Graf funkcije dviju varijabla - ploha u prostoru

Tu smo, prirodno, uzeli da su koordinate u prostoru redom x, y i z. Gornja jednadžba govori kako treća koordinata z, ovisi o prvim dvjema, tj. o x i y.
Uočimo jednostavnu, ali vrlo važnu vezu između grafa i područja definicije:

(i) kod funkcija jedne varijable projekcija grafa $y = f(x)$ na x-os upravo je domena funkcije f, i iznad svake točke domene postoji točno jedna točka grafa-krivulje, tj. iznad točke na osi apscisa s koordinatom x, na grafu je točka $(x, f(x))$

(ii) kod funkcija dviju varijabla projekcija grafa $z = f(x, y)$ na xy-ravninu upravo je domena funkcije f i iznad svake točke domene postoji točno jedna točka grafa-plohe, tj. iznad točke xy-ravnine s koordinatama (x, y), na grafu je točka $(x, y, f(x, y))$.

Dalje bi bilo: graf funkcije f triju varijabla je *trodimenzionalna ploha* u četverodimenzionalnom prostoru (tzv. *hiperploha*), s jednadžbom $w = f(x, y, z)$ itd. Graf funkcije triju ili više varijabla očito ne možemo grafički predočiti, a problemi nastaju i kod funkcija dviju varijabla. Ipak, razvijaju se metode za približno dočaravanje grafova takvih funkcija.

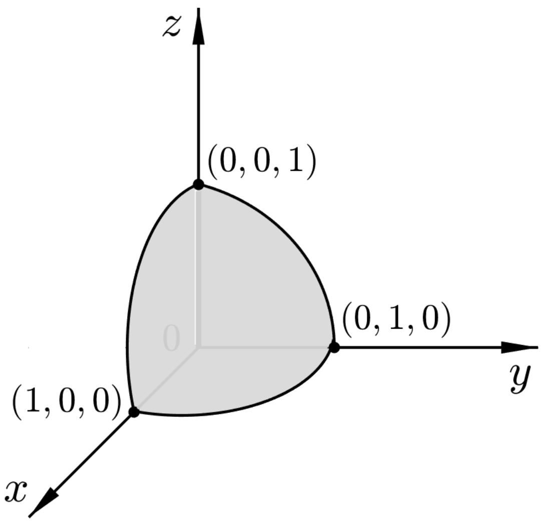
Primjer 7.3. [Jednadžba kugline plohe]
Opišimo i predočimo graf funkcije $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
Graf je ploha s jednadžbom

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

što je ekvivalentno sustavu: $z^2 = 1 - x^2 - y^2$ i $z \geqslant 0$, tj. sustavu

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \\ z &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Kako je $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ udaljenost točke (x, y, z) od ishodišta, to čitamo ovako:
Točka (x, y, z) je na grafu ako i samo ako joj je udaljenost od ishodišta 1 i s gornje je strane xy-ravnine.
Drugim riječima, graf je gornja polusfera polumjera 1, Slika 7.7.

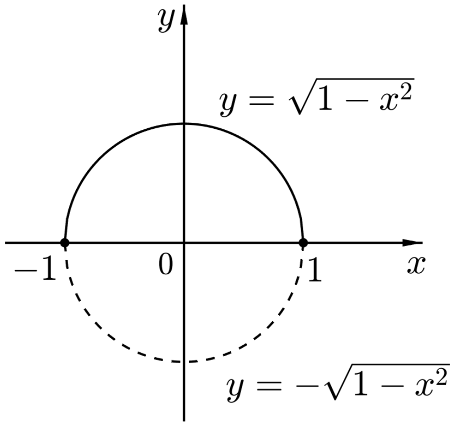


Slika 7.7: Primjer 7.3 - dio sfere u prvom oktantu

Zato je (ako izbacimo uvjet $z \geqslant 0$)

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

jednadžba sfere polumjera 1 sa središtem u ishodištu. Uočimo sličnost s time što je $x^2 + y^2 = 1$ jednadžba kružnice u xy-ravnini, a $y = \sqrt{1-x^2}$ jednadžba gornje polukružnice (Slika 7.8).



Slika 7.8: Primjer 7.3 - gornja i donja polukružnica

□

7.3.3 Parcijalne derivacije funkcije dviju varijabla

Prema analogiji s derivacijom funkcije f jedne varijable u točki x_0

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

definiramo parcijalne derivacije funkcije f dviju varijabla u točki (x_0, y_0):

Parcijalna derivacija po varijabli x (y_0 stoji, a x se mijenja oko x_0):

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

Parcijalna derivacija po varijabli y (x_0 stoji, a y se mijenja oko y_0):

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Vidimo da su parcijalne derivacije u točki dva broja.

Poput funkcija jedne varijable, ako umjesto (x_0, y_0) stavimo (x, y), dobijemo parcijalne derivacije funkcije f. To su dvije nove funkcije koje označavamo kao

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ i } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \;\text{ ili jednostavno }\; \frac{\partial f}{\partial x} \text{ i } \frac{\partial f}{\partial y}.$$

One se lako računaju, na primjer da bismo dobili $\frac{\partial f}{\partial x}$, u izrazu za f, varijablu y smatramo konstantom, a varijablu x promjenjivom. To pokazujemo na primjeru.

Primjer 7.4. [Parcijalne derivacije funkcije funkcije dviju varijabla]
Neka je $f(x, y) = x^2y + xy^2$. Odredimo $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3)$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3)$.
Tu je

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy + y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 + x \cdot 2y = x^2 + 2xy.\end{aligned}$$

Zato je:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) &= 2 \cdot 2 \cdot 3 + 3^2 = 21 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) &= 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 16.\end{aligned}$$

Tu se jasno vidi da su parcijalne derivacije funkcije opet funkcije, dok su parcijalne derivacije funkcije u točki brojevi. □

Primjer 7.5. [Parcijalne derivacije funkcije triju varijabla]
Odredimo parcijalne derivacije funkcije

$$f(x, y, z) := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Tu je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Sad, koristeći se simetrijom, bez računanja dobijemo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.\end{aligned}$$

□

Fizikalno značenje parcijalnih derivacija: poput činjenice da derivacija funkcije jedne varijable opisuje brzinu promjene jedne varijable s obzirom na promjenu druge, za funkciju f dviju varijabla x i y, parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial x}$ opisuje **brzinu promjene** varijable z (gdje je $z = f(x, y)$), s obzirom na promjenu varijable x (pri stalnoj vrijednosti varijable y). Slično je s $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Primjer 7.6. [Fizikalno značenje parcijalnih derivacija]
Komentirajmo brzinu promjene veličine z iz Primjera 7.4 u točki $(2, 3)$.
Tu je

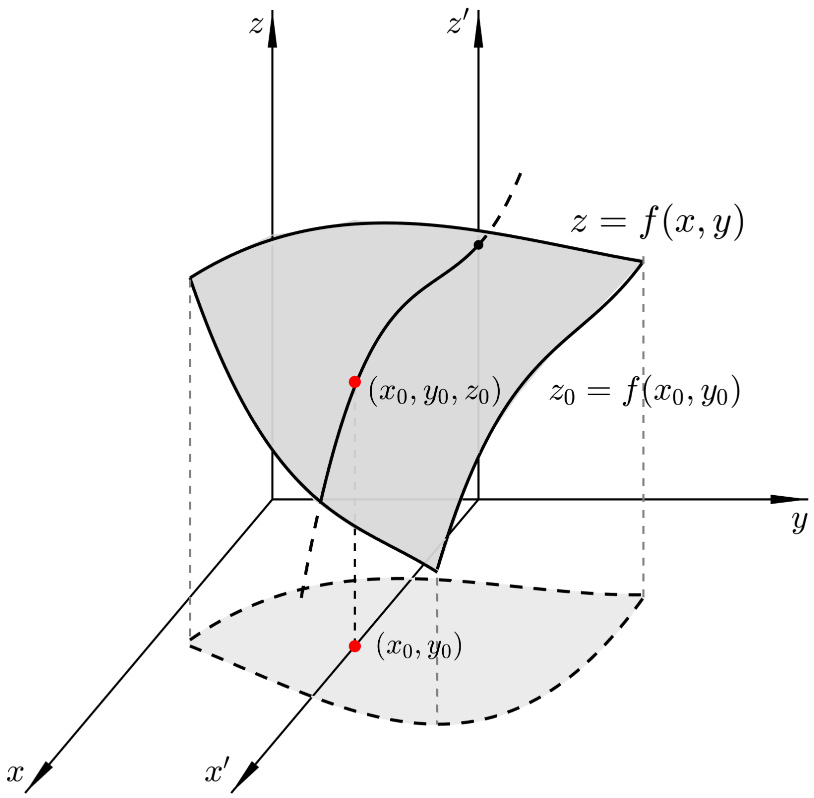
$$z = f(x, y) = x^2y + xy^2$$

pa je $z(2, 3) = 30$. Također je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = 21, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) = 16.$$

Odatle očitavamo da je brzina promjene u x-smjeru jednaka 21, dok je brzina promjene u y-smjeru manja i iznosi 16.
To možemo tumačiti ovako: za malu promjenu vrijednosti h veličine x (od 2 do $2+h$), dok y zadržava stalnu vrijednost 3, z će se približno promijeniti za $21h$, a za malu promjenu h vrijednosti veličine y (od 3 do $3+h$), dok x zadržava stalnu vrijednost 2, z će se približno promijeniti za $16h$. □

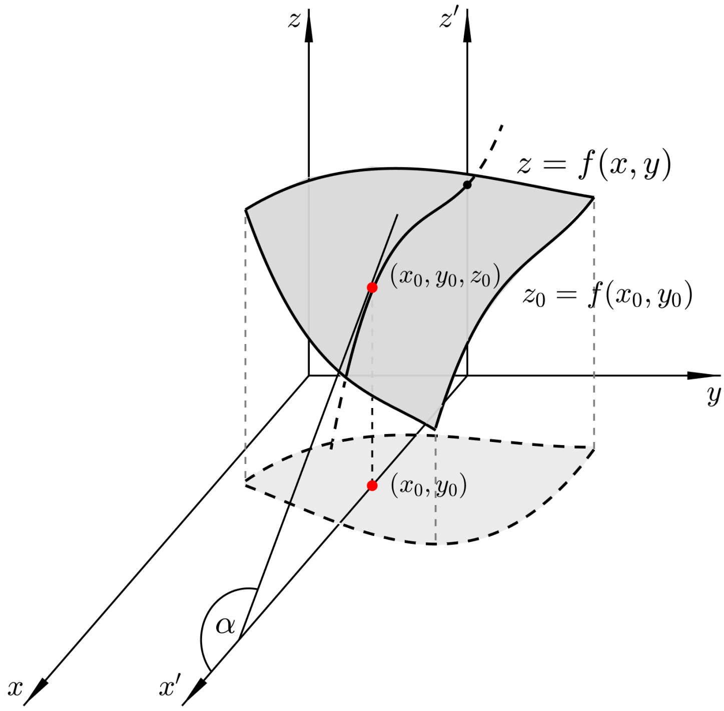
Geometrijsko značenje parcijalnih derivacija: da opišemo geometrijsko značenje parcijalne derivacije po x u (x_0, y_0), presijecimo graf funkcije f ravninom s jednadžbom $y = y_0$, koja je usporedna s xz-ravninom (Slika 7.9).



Slika 7.9: Geometrijsko značenje parcijalne derivacije

Dobijemo krivulju u toj ravnini (možemo je zvati $x'z'$-ravninom), kod koje se mijenjaju vrijednosti x i z prema formuli $z = f(x, y_0)$, a koja prolazi točkom (x_0, y_0, z_0), gdje je $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Podsjetimo se da je derivacija funkcije u točki jednaka koeficijentu smjera (nagibu) tangente na graf te funkcije u pripadnoj točki grafa. Analogno, za funkciju f dviju varijabla x i y, parcijalna derivacija $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ je nagib tangente na gornju krivulju u točki (x_0, y_0, z_0). Tu je nagib tangens kuta α što ga tangenta čini s novom x-osi, tj. s x'-osi (Slika 7.10).



Slika 7.10: Geometrijsko značenje parcijalne derivacije - tangenta i kut α

Analogno je s geometrijskom interpretacijom parcijalne derivacije po y u točki.

Parcijalne derivacije višeg reda: prema uzoru na derivaciju drugog reda funkcije jedne varijable, definiraju se parcijalne derivacije drugog reda funkcije dviju varijabla (ili više varijabla).
Sjetimo se oznake za drugu derivaciju funkcije dviju varijabla (tu eksponent 2 ne znači kvadriranje već samo činjenicu da se deriviranje vrši dva puta i to po x):

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}.$$

Slično je za funkcije dviju varijabla. Načelno imamo četiri mogućnosti (i četiri oznake):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &\quad \text{obje derivacije po } x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &\quad \text{obje derivacije po } y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &\quad \text{prva derivacija po } x,\ \text{druga po } y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &\quad \text{prva derivacija po } y,\ \text{druga po } x.
\end{aligned}$$

Primjer 7.7. [Parcijalne derivacije drugog reda]
Neka je $f(x, y) = x^2 y + x y^2$. Odredimo parcijalne derivacije drugog

reda.
Iz Primjera 7.4 imamo

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + y^2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2xy.$$

Zato je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy + y^2\right) = 2y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + 2xy\right) = 2x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy + y^2\right) = 2x + 2y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 2xy\right) = 2x + 2y.$$

□

Vidimo da je u Primjeru 7.7 bilo

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

To vrijedi općenito, a ne samo u ovom primjeru (istina, neki prirodni uvjeti moraju bili zadovoljeni). Ta činjenica poznata je kao Clairautov teorem, katkad se naziva i Schwartzov teorem.

Slično bi se definirale parcijalne derivacije trećeg ili višeg reda.

7.3.4 Dogovor o oznakama

Osim navedenih oznaka za parcijalne derivacije, u literaturi se pojavljuju i druge, koje su lakše za zapisivanje:

(i) f_x za $\frac{\partial f}{\partial x}$ i f_y za $\frac{\partial f}{\partial y}$

(ii) f_{xx} za $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, f_{yy} za $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, f_{xy} za $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ i f_{yx} za $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Uočimo da f_{xy} označava parcijalnu derivaciju kod koje se najprije derivira po x, potom po y. Dakle, $f_{xy} = (f_x)_y$ itd. To se može primijeniti i na derivacije višeg reda. Na primjer:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = f_{xyy}.$$

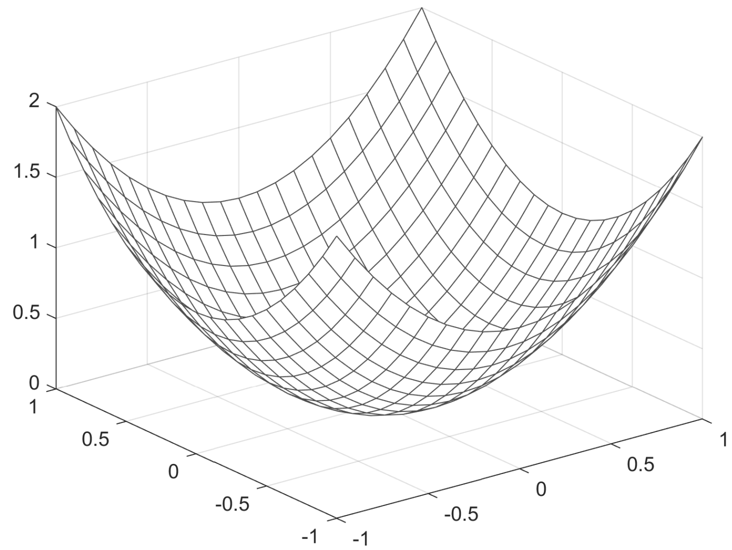
U slučaju veze veličine z o veličinama x, y, tj. $z = f(x, y)$, koriste se oznake: z_x za f_x, z_y za f_y, z_{xx} za f_{xx}, z_{yy} za f_{yy}, z_{xy} za f_{xy}, z_{yx} za f_{yx} itd.

7.4 PRIMJENA MATLAB-A

7.4.1 Prikaz plohe u koordinatnom prostoru. Naredbe `meshgrid`, `surf` i `mesh`

Za crtanje grafa funkcije dviju varijabla, tj. za prikaz plohe $z = f(x, y)$, koriste se naredbe `mesh` i `surf`. Najprije pomoću `mesh` određujemo područje domene za koje će se prikazati ploha, a potom pomoću `surf` prikazujemo plohu. Pokažimo to na primjeru plohe $z = x^2 + y^2$:

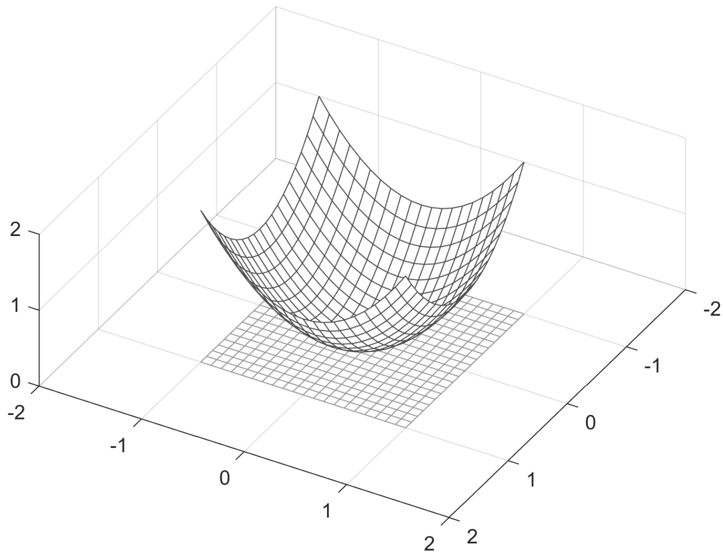
```
[X Y] = meshgrid(-1:0.1:1)
Z = X.^2 + Y.^2
w = [1 1 1]
surf(X, Y, Z, 'EdgeColor', 0.3*w, 'FaceColor', w)
```



Naredbi `surf` dodali smo argumente `'EdgeColor'` i `'FaceColor'` za određivanje boje linija na plohi i boje same plohe, redom. Varijabla `w` znači bijelu boju u RGB notaciji.

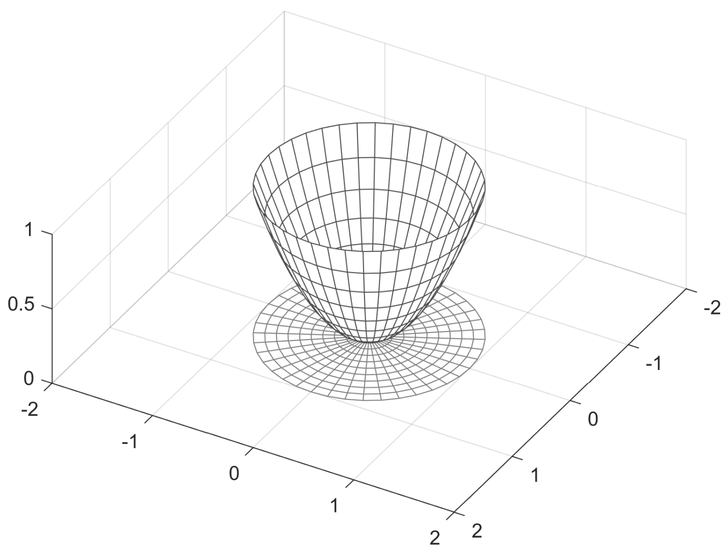
Ukoliko prikazu želimo dodati područje $xy-$ravnine za koje crtamo plohu, koristimo `surf` za crtanje ravnine $z = 0$ (definirane naredbom `zeros`). Kako bismo dodatno poboljšali prikaz, koristimo već poznatu naredbu `view` za odabir točke zamišljenog pogleda na plohu, kao i `xlim` i `ylim` za određivanje granica prikaza po x-osi, odnosno $y-$osi:

```
hold on
Z0 = zeros(size(X))
surf(X, Y, Z0, 'EdgeColor', 0.6*w, 'FaceColor', w)
view(120, 60)
xlim([-2 2])
ylim([-2 2])
```



Ponekad je, kao i u slučaju plohe $z = x^2 + y^2$, područje na kojem će se crtati ploha dobro definirati pomoću polarnih koordinata:

```
[R, T] = meshgrid(-1:0.1:1, -pi/2:pi/20:pi/2)
X = R.*cos(T);
Y = R.*sin(T);
Z = X.^2 + Y.^2
surf(X, Y, Z, 'EdgeColor', 0.3*w, 'FaceColor', w)
hold on
Z0 = zeros(size(X))
surf(X, Y, Z0, 'EdgeColor', 0.5*w, 'FaceColor', w)
view(120, 60)
xlim([-2 2])
ylim([-2 2])
```

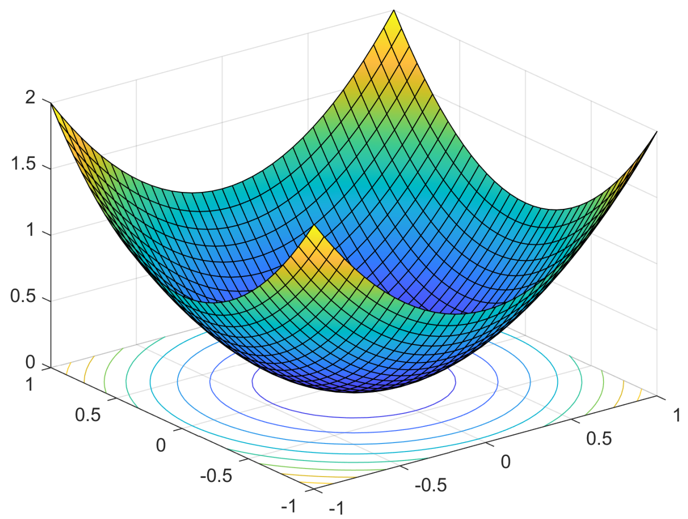


Alternativno, za crtanje plohe može se koristiti naredba `mesh`, o čemu se više može pročitati u MATLAB dokumentaciji.

7.4.2 Graf simbolički zadane funkcije dviju varijabla. Naredbe `fsurf`, `fcontour` i `fmesh`

Graf simbolički zadane funkcije prikazuje se naredbom `fsurf`. Dodatno, konture (linije u domeni s istim vrijednostima funkcije) možemo prikazati tako da dodamo argument `'ShowContours'` s vrijednošću `'on'`:

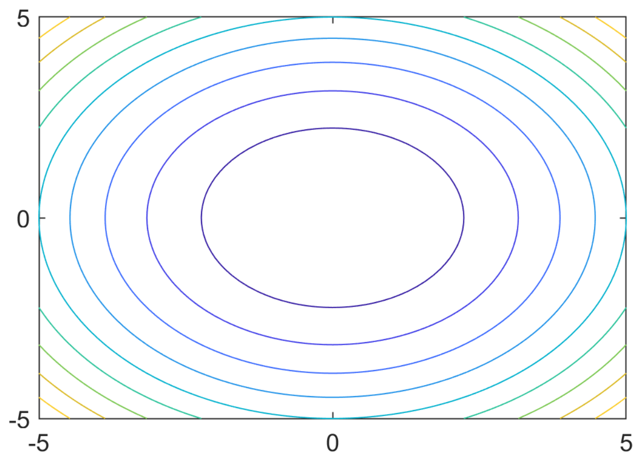
```
syms x y
f(x,y) = x^2 + y^2
fsurf(f, [-1 1], 'ShowContours', 'on')
```



Alternativno, za crtanje grafa simbolički zadane funkcije može se koristiti naredba `fmesh`, o čemu se više može pročitati u MATLAB dokumentaciji.

Do dvodimenzionalnog prikaza kontura u području domene na kojem crtamo graf dolazimo naredbom `fcontour`:

```
fcontour(f)
```



7.4.3 Parcijalne derivacije funkcija više varijabla. Naredbe `diff` i `hessian`

Parcijalne derivacije prvog reda računaju se pomoću naredbe `diff`, uz navođenje varijable po kojoj deriviramo, kao u primjeru funkcije $f(x, y) = x^2 y + xy^2$ iz Primjera 7.4 i 7.7:

```
syms x y
f = x^2*y + x*y^2
Dxf(x, y) = diff(f, x)                          %  2*x*y + y^2
Dyf(x, y) = diff(f, y)                          %  x^2 + 2*x*y
```

Za računanje vrijednosti parcijalnih derivacija u točki, postupa se analogno računanju vrijednosti funkcije za općenite funkcije:

```
Dxf(2, 3)
Dyf(2, 3)
```

Kod računanja parcijalnih derivacija funkcije $f(x, y)$ drugog (i viših) redova, možemo postupiti na više načina:

- za određivanje parcijalne derivacije $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, još jednom deriviramo parcijalnu derivaciju prvog reda po x ili nalazimo parcijalnu derivaciju tako da krenemo od početne funkcije (uz navođenje varijable i reda derivacije ili pak varijabla po kojima želimo derivirati):

```
Dxxf = diff(Dxf, x)                             % 2*y
Dxxf = diff(f, x, 2)                            % 2*y
Dxxf = diff(f, x, x)                            % 2*y
```

- analogno postupamo kod parcijalne derivacije $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$:

```
Dyyf = diff(Dyf, y)                             % 2*x
Dyyf = diff(f, y, 2)                            % 2*x
Dyyf = diff(f, y, y)                            % 2*x
```

- za određivanje parcijalne derivacije $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ili $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$:

```
Dxyf = diff(Dxf, y)                             % 2*x + 2*y
Dxyf = diff(f, x, y)                            % 2*x + 2*y

Dyxf = diff(Dyf, x)                             % 2*x + 2*y
Dyxf = diff(f, y, x)                            % 2*x + 2*y
```

Sve četiri parcijalne derivacije drugog reda funkcije dviju varijabla moguće je dobiti i odjednom, pomoću naredbe `hessian` koja računa Hesseovu matricu drugih derivacija

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}.$$

Odredimo Hesseovu matricu za funkciju iz Primjera 7.7:

```
syms x y
f = x^2*y + x*y^2
H = hessian(f, [x, y])
```

```
H =
    [      2*y, 2*x + 2*y]
    [2*x + 2*y,       2*x]
```

Matrica drugih derivacija u zadanoj točki računaju se tako da se pomoću naredbe `subs` u dobivenu Hesseovu matricu uvrste konkretne vrijednosti:

```
H23 = subs(H, [x, y], [2, 3])
```

```
H23 =
    [ 6, 10]
    [10,  4]
```

Pomoću naredbe `hessian` može se odrediti i matrica parcijalnih derivacija drugog reda za funkcije triju ili više varijabla.

7.4.4 Parcijalne derivacije implicitno zadane funkcije više varijabla

U MATLAB-u nema naredbe za parcijalno deriviranje implicitno zadane funkcije više varijabla. Stoga najprije treba odrediti pripadne eksplicitne funkcije (jednu ili više njih), a potom te funkcije parcijalno derivirati.
Na primjer, za plohu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = R^2$ (radi se o elipsoidu), pomoću `solve` nalazimo eksplicitne funkcije ovisnosti varijable z o varijablama x i y:

```
syms a b c R x y z
imp = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 == R^2
eksp = solve(imp, z)
```

```
eksp =
     (c*(- b^2*x^2 - a^2*y^2 + R^2*a^2*b^2)^(1/2))/(a*b)
    -(c*(- b^2*x^2 - a^2*y^2 + R^2*a^2*b^2)^(1/2))/(a*b)
```

Dobili smo dvije funkcije, svaku u svome retku, koje se razlikuju samo u predznaku, a za grafove, tj. pripadne plohe, imaju gornji, odnosno donji poluelipsoid. Te se funkcije parcijalno deriviraju naredbom `diff`, kako smo to činili i ranije:

```
Dxeksp = diff(eksp, x)
Dyeksp = diff(eksp, y)
```

```
Dxeksp =
    -(b*c*x)/(a*(- a^2*y^2 - b^2*x^2 + R^2*a^2*b^2)^(1/2))
     (b*c*x)/(a*(- a^2*y^2 - b^2*x^2 + R^2*a^2*b^2)^(1/2))
Dyeksp =
    -(a*c*y)/(b*(- a^2*y^2 - b^2*x^2 + R^2*a^2*b^2)^(1/2))
     (a*c*y)/(b*(- a^2*y^2 - b^2*x^2 + R^2*a^2*b^2)^(1/2))
```

Ovo je ujedno i primjer za parcijalno deriviranje funkcije više varijabla s parametrima.

7.5 PITANJA I ZADATCI

1. Odredite prirodnu domenu funkcije:
   (i) $f(x, y) := \ln(R^2 - x^2 - y^2)$, gdje je R realan broj.
   (ii) $f(x, y) := \ln(x^2 + y^2 - R^2)$, gdje je R realan broj.

   Uputa: vodite računa o slučaju $R = 0$.

2. Nađite primjer bar dviju funkcija kojima je domena ravnina bez koordinatnih osi. Od koliko se disjunktnih dijelova sastoji graf takve funkcije?

3. Jesu li $f(x, y) := x$ i $g(x, y) := c$, za realnu konstantu c, funkcije dviju varijabla? Nacrtajte grafove tih funkcija i opišite ih riječima.

4. Napišite izraz za funkciju $f(x, y)$ kojoj je graf:
   (i) gornja polusfera polumjera 5, a središte joj je u točki $(3, 2)$.
   (ii) gornja polusfera polumjera 5, a središte joj je u točki $(3, 2, 4)$ prostora.

   Uputa: konzultirajte Primjer 7.3.

5. Nađite parcijalne derivacije prvog i drugog reda funkcije $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

6. Nađite parcijalne derivacije prvog i drugog reda funkcije $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ i funkcije $g := \frac{1}{f}$.

8 APROKSIMACIJA FUNKCIJE VIŠE VARIJABLA. TANGENTNA PLOHA. DIFERENCIJAL

U lekciji se obrađuju pojmovi linearne i kvadratne aproksimacije za funkcije jedne varijable, uvode i za funkcije dviju ili više varijabla. Također, navode se neke primjene tih pojmova.

8.1 PRIPADNI PROBLEM

Linearna i kvadratna aproksimacija, aproksimacije višeg reda, i, konačno, Taylorov red, uz mnoge druge primjene, imaju važnu ulogu u problemu približnog određivanja vrijednosti funkcija. Pokazuje se da se ti važni pojmovi mogu definirati i za funkcije više varijabla (samo što ćemo se mi zadržati samo na linearnoj i kvadratnoj aproksimaciji). Pomoću tih pojmova rješavaju se analogni problemi onima koje smo imali kod funkcija jedne varijable. Jedan od osnovnih jest ovaj: kako se približno promijeni vrijednost funkcije f dviju varijabla, ako se varijabla x promijeni od x_0 do $x_0 + \Delta x$, a varijabla y od y_0 do $y_0 + \Delta y$? S matematičkog stanovišta ova je lekcija važna jer se u njoj uvježbava analogija, jedna od najvažnijih matematičkih, a i znanstvenih metoda.

8.2 POTREBNO PREDZNANJE

Potrebno je poznavati pojam i geometrijsko značenje derivacije funkcije jedne varijable, te pojam parcijalnih derivacija prvog i drugog reda funkcija više varijabla. Također, potrebno je poznavati pojam linearne i kvadratne aproksimacije za funkcije jedne varijable, te pojam diferencijala funkcije jedne varijable.

8.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

8.3.1 Linearna aproksimacija funkcije dviju varijabla

Prema uzoru na linearnu aproksimaciju funkcije f jedne varijable oko x_0:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$$

ili, u drugom zapisu, uz zamjenu $x_0 + \Delta x = x$,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

definiramo **linearnu aproksimaciju funkcije dviju varijabla** f oko (x_0, y_0):

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y$$

ili, u drugom zapisu, uz zamjenu $x_0 + \Delta x = x$ i $y_0 + \Delta y = y$,

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Vidimo da formula uzima u obzir doprinos od promjene varijable x i varijable y. Ti se doprinosi zbrajaju.

Primjer 8.1. [Linearna aproksimacija funkcije dviju varijabla]
Odredimo linearnu aproksimaciju funkcije $f(x, y) := \sqrt{6 - x^2 - y^2}$ oko $(1, 2)$ i $(1, 1)$.
Tu je

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{-x}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{-y}{\sqrt{6 - x^2 - y^2}}.\end{aligned}$$

Zato je

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) &= \frac{-1}{\sqrt{6 - 1^2 - 2^2}} = -1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) &= \frac{-2}{\sqrt{6 - 1^2 - 2^2}} = -2.\end{aligned}$$

Zajedno s $f(1, 2) = 1$ i koristeći drugu formulu zaključujemo da za $(x, y) \approx (1, 2)$ vrijedi

$$\sqrt{6 - x^2 - y^2} \approx 1 - (x - 1) - 2(y - 2) = 6 - x - 2y.$$

Također je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \frac{-1}{2}$$

i $f(1, 1) = 2$, pa za $(x, y) \approx (1, 1)$ vrijedi

$$\sqrt{6 - x^2 - y^2} \approx 2 - \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1) = 3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y.$$

Iz Tablice 8.1 možemo se uvjeriti u doseg tih formula.

x	y	$\sqrt{6-x^2-y^2}$	$6-x-2y$	$3-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y$
1	2	1	1	1.5
1.1	2.1	0.6164	0.7	1.4
1.1	1.9	1.0863	1.1	1.5
0.9	2.1	0.8832	0.9	1.5
1	1	2	3	2
1.1	1.1	1.8921	2.7	1.9
1.1	0.9	1.9950	3.1	2

Tablica 8.1: Primjer 8.1

U prva četiri retka vrijednosti (x, y) birane su oko $(1, 2)$. Vidi se da formula $6 - x - 2y$, koja i jest linearna aproksimacija od f oko $(1, 2)$, dobro aproksimira stvarne vrijednosti. Nasuprot tome, $3 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y$ loše ih aproksimira, što je logično jer je to linearna aproksimacija od f oko $(1, 1)$, a ne oko $(1, 2)$. U posljednja tri retka situacija je obrnuta. □

8.3.2 Geometrijska interpretacija linearne aproksimacije - tangentna ploha

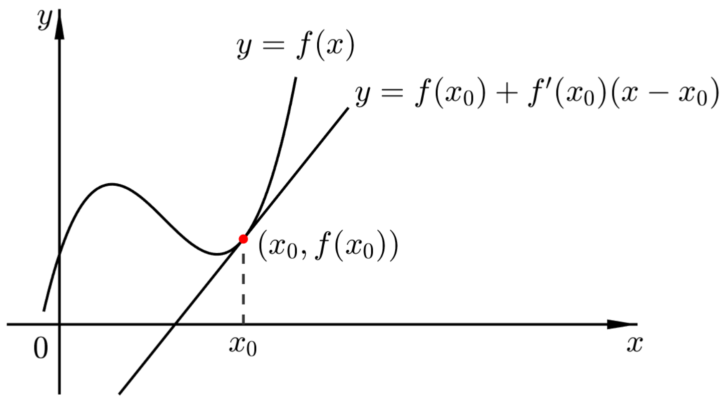
Za funkciju f jedne varijable, formula linearne aproksimacije oko x_0

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

geometrijski se interpretira time što je *pravac* s jednadžbom

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

tangenta na graf funkcije f u točki (x_0, y_0), Slika 8.1.



Slika 8.1: Tangenta na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$

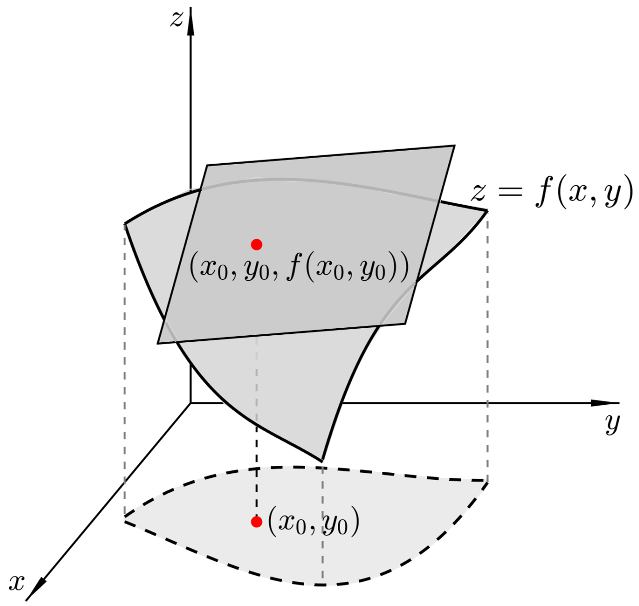
Uočimo prijelaz s formule na tangentu: $f(x)$ se zamijeni s y, a približna vrijednost znakom jednakosti. Analogno tome, formula linearne aproksimacije funkcije f oko (x_0, y_0)

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

geometrijski se interpretira time što je *ravnina* s jednadžbom

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

tangentna ravnina na graf funkcije f u točki $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, Slika 8.2. Uočimo da je u obje formule desna strana ista.



Slika 8.2: Tangentna ravnina na graf funkcije f u točki $(x0, y0, f(x0, y0))$

Primjer 8.2. [Jednadžba tangentne plohe]
Odredimo jednadžbu tangentne ravnine na graf funkcije $f(x, y) := \sqrt{6 - x^2 - y^2}$ u točki $(1, 2, 1)$.

Koristeći se rezultatom Primjera 8.1, dobijemo jednadžbu

$$z = 6 - x - 2y.$$

To znači da je točka (x, y, z) prostora na tangentnoj ravnini ako i samo ako vrijedi $z = 6 - x - 2y$. $\square$

8.3.3 Diferencijal funkcije dviju varijabla

Prema usporedbi prirasta, približnog prirasta (na osnovi linearne aproksimacije) i diferencijala funkcije jedne varijable:

Prirast funkcije f u x: $\Delta f(x) := f(x + \Delta x) - f(x)$

Približni prirast u x: $\Delta f(x) \approx f'(x)\Delta x$

Diferencijal u x: $df(x) = f'(x)dx$,

imamo analogne pojmove za funkcije dviju (ili više) varijabla:

Prirast funkcije f u (x, y):

$$\Delta f(x, y) := f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

Približni prirast u (x, y):

$$\Delta f(x, y) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\Delta y$$

Diferencijal u (x, y):

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy.$$

Uočimo kako se diferencijal dobije iz formule za približni prirast, zamjenom Δx s dx te Δy s dy, i znaka približne jednakosti znakom jednakosti.
Ako ove pojmove želimo definirati ili računati u konkretnoj točki (x_0, y_0), onda svugdje, osim u Δx i Δy, umjesto x treba staviti x_0, a umjesto y treba staviti y_0.
Analogno vrijedi za funkcije triju ili više varijabla.

Primjer 8.3. [Približni prirast funkcije triju varijabla]
Odredimo približno promjenu udaljenosti točke $T(3, 6, 6)$ od ishodišta, ako joj se prva koordinata poveća za 0.2, druga smanji za 0.2 i treća poveća za 0.1.
Koristimo se formulom za linearnu aproksimaciju funkcije f triju varijabla oko (x_0, y_0, z_0), iz koje dobijemo približnu formulu za prirast funkcije oko (x_0, y_0, z_0):

$$\begin{aligned}\Delta f(x_0, y_0, z_0) &:= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0) \approx \\ &\approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)\Delta z.\end{aligned}$$

Tu je:

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$(x_0, y_0, z_0) = (3, 6, 6)$$

$$\Delta x = 0.2,\ \Delta y = -0.2,\ \Delta z = 0.1.$$

U Primjeru 7.5 već smo izračunali parcijalne derivacije prvog reda. Dobili smo

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.\end{aligned}$$

Uvrštavanjem $x = 3$, $y = 6$ i $z = 6$ dobije se

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3,6,6) = \frac{1}{3}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(3,6,6) = \frac{2}{3}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(3,6,6) = \frac{2}{3}.$$

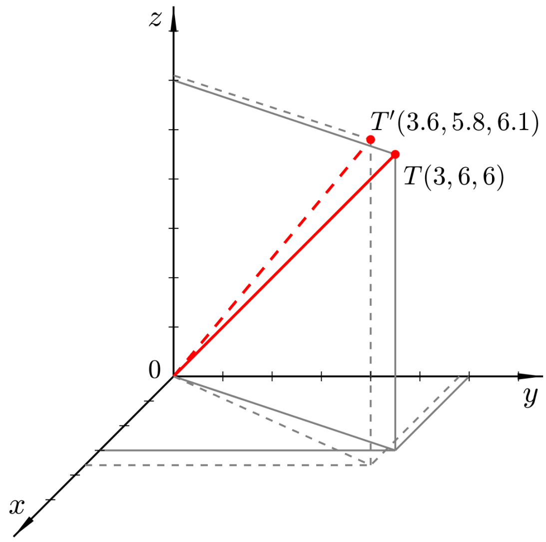
Uvrštavanjem u formulu za približni prirast dobije se

$$\Delta f(3,6,6) \approx \frac{1}{3} \cdot 0.2 - \frac{2}{3} \cdot 0.2 + \frac{2}{3} \cdot 0.1 = 0$$

pa zaključujemo da približni račun pokazuje kako se udaljenost praktično nije promijenila (Slika 8.3). Inače, izravnim računom dobili bismo da je nova udaljenost

$$\sqrt{3.2^2 + 5.8^2 + 6.1^2} \approx 9.005.$$

Kako je $f(3,6,6) = 9$, vidimo da se udaljenost povećala za 0.005 (na tri decimale).



Slika 8.3: Primjer 8.3

□

Primjer 8.4. [Diferencijal funkcije triju varijabla]
Odredimo diferencijal funkcije $f(x,y,z) := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ i diferencijal te funkcije u $(3,6,6)$.
Koristeći se rješenjem Primjera 8.3, dobijemo

$$\begin{aligned} df(x,y,z) &:= \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)dz \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dx + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dy + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dz. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem $x = 3$, $y = z = 6$ (ali ne u dx, dy, dz), dobijemo

$$df(3, 6, 6) = \frac{3}{9}dx + \frac{6}{9}dy + \frac{6}{9}dz = \frac{1}{3}dx + \frac{2}{3}dy + \frac{2}{3}dz.$$

□

8.3.4 Kvadratna aproksimacija funkcija dviju varijabla

Prema uzoru na kvadratnu aproksimaciju funkcije f jedne varijable oko x_0

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}(\Delta x)^2$$

ili, u drugom zapisu, uz zamjenu $x_0 + \Delta x = x$,

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2,$$

definiramo kvadratnu aproksimaciju funkcije dviju varijabla f oko (x_0, y_0):

$$\begin{aligned} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) &\approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)\Delta x \Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\frac{(\Delta y)^2}{2!} \end{aligned}$$

ili, u drugom zapisu, uz zamjenu $x_0 + \Delta x = x$ i $y_0 + \Delta y = y$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &\approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)(x - x_0)(y - y_0) \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)\frac{(y - y_0)^2}{2!}. \end{aligned}$$

Vidimo da formule, uz linearni dio, imaju dodatni, kvadratni dio. Uočimo tri pribrojnika u kvadratnom dijelu: oni se odnose, redom, na $(\Delta x)^2$, $\Delta x \Delta y$ te $(\Delta y)^2$. Uz $\Delta x \Delta y$ nema dijeljenja s 2!, što se može tumačiti time da se jedanput gleda $\Delta x \Delta y$, a drugi $\Delta y \Delta x$.
Postoje analogne formule i za funkcije triju ili više varijabla. Također, postoje formule za kubnu aproksimaciju itd.

Primjer 8.5. [Kvadratna aproksimacija funkcije dviju varijabla]
Odredimo kvadratnu aproksimaciju funkcije $f(x, y) := \ln(x^2 + y^2)$ oko (x_0, y_0), posebice oko $(1, 0)$.
Vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{2x}{x^2 + y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{2y}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Odavdje dobijemo:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \cdot \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \cdot \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Sad možemo zapisati kvadratnu aproksimaciju (druga formula):

$$\begin{aligned}\ln(x^2+y^2) &\approx \ln(x_0^2+y_0^2) + \frac{2x_0}{x_0^2+y_0^2}(x-x_0) + \frac{2y_0}{x_0^2+y_0^2}(y-y_0)\\ &+ \frac{y_0^2-x_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}(x-x_0)^2 + (-4)\frac{x_0y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}(x-x_0)(y-y_0)\\ &+ \frac{x_0^2-y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}(y-y_0)^2.\end{aligned}$$

Ako sad stavimo $(x_0, y_0) = (1, 0)$, dobit ćemo

$$\begin{aligned}\ln(x^2+y^2) &\approx 0 + 2(x-1) + 0 \cdot (y-0)\\ &\quad + (-1)(x-1)^2 - 4 \cdot 0(x-1)(y-0) + 1 \cdot (y-0)^2,\end{aligned}$$

tj.

$$\ln(x^2+y^2) \approx 2(x-1) - (x-1)^2 + y^2.$$

□

8.4 PRIMJENA MATLAB-A

8.4.1 Taylorov polinom. Linearna i kvadratna aproksimacija funkcija dviju varijabla. Naredba `taylor`

U Lekciji **??** već smo upoznali naredbu `taylor` za računanje Taylorovog polinoma. Pokažimo na funkciji iz Primjera 8.1 kako se određuje funkcija linearne aproksimacije:

```
syms x0 y0 x y
f(x, y) = sqrt(6 - x^2 - y^2)
lin(x, y) = taylor(f, [x, y], [x0, y0], 'Order', 2)
```

```
lin(x, y) =
    (- x0^2 - y0^2 + 6)^(1/2)
    - (x0*(x - x0))/(- x0^2 - y0^2 + 6)^(1/2)
    - (y0*(y - y0))/(- x0^2 - y0^2 + 6)^(1/2)
```

U dobivenu se formulu pomoću naredbe `subs` može uvrstiti konkretne vrijednosti koordinata točke (x_0, y_0). Tako dolazimo do linearnih aproksimacija iz Primjera 8.1:

```
lin12(x, y) = subs(lin, [x0, y0], [1, 2])    % - x - 2*y + 6
lin11(x, y) = subs(lin, [x0, y0], [1, 1])  % - x/2 - y/2 + 3
```

Sada se može računati približna vrijednost funkcije u točkama oko (x_0, y_0). Na primjer:

```
lin12(1.1, 2.1)                                        % 7/10
```

Kod kvadratne aproksimacije postupamo slično kao kod linearne, što ilustriramo na Primjeru 8.5:

```
syms x0 y0 x y
f(x, y) = log(x^2 + y^2)
kvad(x, y) = taylor(f, [x, y], [x0, y0], 'Order', 3)
kvad10(x, y) = subs(kvad, [x0, y0], [1, 0])
```

```
kvad(x, y) =
    log(x0^2 + y0^2)
    + (1/(x0^2 + y0^2)
    - (2*x0^2)/(x0^2 + y0^2)^2)*(x - x0)^2
    + (1/(x0^2 + y0^2)
    - (2*y0^2)/(x0^2 + y0^2)^2)*(y - y0)^2
    + (2*x0*(x - x0))/(x0^2 + y0^2)
    + (2*y0*(y - y0))/(x0^2 + y0^2)
    - (4*x0*y0*(x - x0)*(y - y0))/(x0^2 + y0^2)^2
kvad10(x, y) = 2*x - (x - 1)^2 + y^2 - 2
```

8.5 PITANJA I ZADATCI

1. (i) Što se dobije ako se u formulu za linearnu aproksimaciju funkcije dviju varijabla stavi $\Delta x = 0$ i $\Delta y = 0$, odnosno $x = x_0$ i $y = y_0$ u alternativnoj formuli?

   (ii) Što se dobije ako se u formulu za linearnu aproksimaciju funkcije dviju varijabla stavi $\Delta y = 0$, odnosno $y = y_0$ u alternativnoj formuli? Komentirajte možete li to dovesti u vezu s funkcijama jedne varijable.

2. (i) Napišite formulu za linearnu aproksimaciju funkcije dviju varijabla oko (x_0, y_0), ako je $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$ i $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

   (ii) Napišite formulu za linearnu aproksimaciju funkcije dviju varijabla oko (x_0, y_0), ako je $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Komentirajte možete li to dovesti u vezu s funkcijama jedne varijable.

3. Neka je $f(2, 3) = -1$ i $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 3) = 3$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 3) = -4$. Napišite oba izraza za linearnu aproksimaciju funkcije f oko $(2, 3)$. Što je varijabla u tom izrazu?

4. Što je u formuli za linearnu aproksimaciju funkcije dviju varijabla fiksirano, a što promjenjivo (varijabla)? Odgovorite za obje formule. Što je za kvadratnu aproksimaciju?

5. (i) Neka je $f(x, y) := a + bx + cy$ linearna funkcija. Pokušajte odgovoriti bez računanja koja je linearna aproksimacija funkcije f oko $(0, 0)$. Poslije provjerite računanjem.

   (ii) Odredite linearnu aproksimaciju funkcije iz (i) oko (x_0, y_0).

6. Neka je $f(x, y) := a_0 + a_1 x + a_2 y + b_0 x^2 + b_1 xy + b_2 y^2$ kvadratna funkcija.

   (i) Bez računanja pokušajte odgovoriti koja je linearna, a koja kvadratna aproksimacija od f oko $(0, 0)$. Provjerite predviđanje računanjem i komentirajte.

   (ii) Odredite linearnu i kvadratnu aproksimaciju funkcije f oko (x_0, y_0). Komentirajte.

9 LOKALNI EKSTREMI FUNKCIJE VIŠE VARIJABLA

U lekciji se obrađuje metoda za određivanje najmanje i najveće vrijednosti funkcije dviju varijabla.

9.1 PRIPADNI PROBLEM

Problemi minimizacije i maksimizacije spadaju u najvažnije praktične i teoretske probleme. Smisao je da se odrede vrijednosti argumenata u kojima neka funkcija postiže svoju najmanju ili najveću vrijednost (lokalno ili globalno).
Vidjeli smo da se taj problem za funkcije jedne varijable rješava pomoću derivacija. Sad ćemo vidjeti da se analogan problem za funkcije više varijabla rješava pomoću parcijalnih derivacija.

9.2 POTREBNO PREDZNANJE

Potrebno je poznavati pojam lokalnog ekstrema funkcije jedne varijable i metode njegova određivanja. Također, treba poznavati pojam i geometrijsko značenje parcijalnih derivacija funkcije dviju varijabla te jednadžbu tangentne ravnine na graf funkcije f dviju varijabla u točki grafa $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

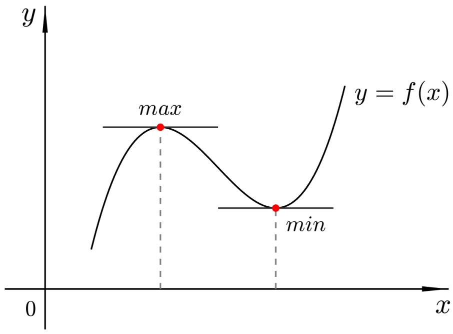
9.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

9.3.1 Pojam i geometrijska predodžba lokalnog ekstrema funkcije dviju varijabla

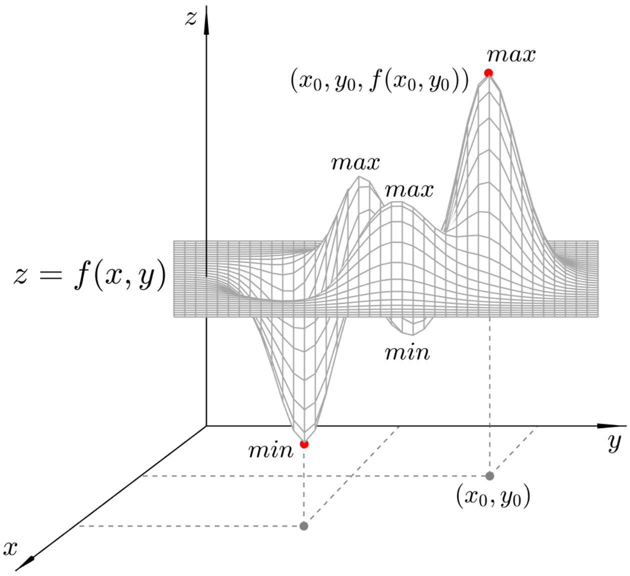
Prema uzoru na lokalni ekstrem funkcije jedne varijable (Slika 9.1), uvodimo pojam lokalnog ekstrema funkcije f dviju varijabla (Slika 9.2):

> f ima **lokalni minimum** u (x_0, y_0) ako je $f(x_0, y_0)$ *najmanja vrijednost u nekoj okolini* od (x_0, y_0)
>
> f ima **lokalni maksimum** u (x_0, y_0) ako je $f(x_0, y_0)$ *najveća vrijednost u nekoj okolini* od (x_0, y_0).

Pod okolinom od (x_0, y_0) najbolje je zamišljati mali krug sa središtem u (x_0, y_0) koji je čitav u domeni od f.

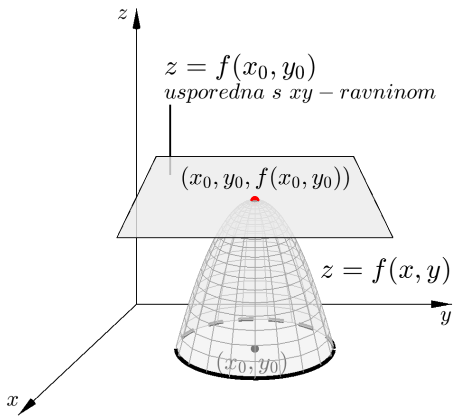


Slika 9.1: Lokalni ekstremi funkcije jedne varijable



Slika 9.2: Lokalni ekstremi funkcije dviju varijabla

Uočimo da je tangentna ravnina na graf u lokalnom ekstremu usporedna s xy-ravninom, i analogiju s lokalnim ekstremom funkcije jedne varijable, kod koje je tangenta u lokalnom ekstremu usporedna s x-osi, Slika 9.3.



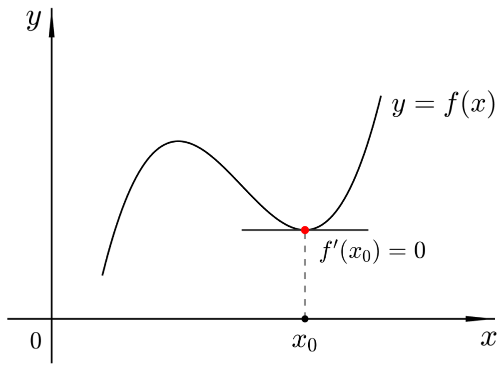
Slika 9.3: Tangentna ravnina u lokalnom ekstremu

9.3.2 Nužan uvjet ekstrema funkcije dviju varijabla – stacionarne točke

Iz jednadžbe tangentne ravnine na graf funkcije f dviju varijabla u točki grafa $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ i geometrijske predodžbe lokalnog ekstrema, zaključujemo da jednadžba tangentne ravnine u lokalnom ekstremu mora biti $z = f(x_0, y_0)$, tj. da su uvjeti:

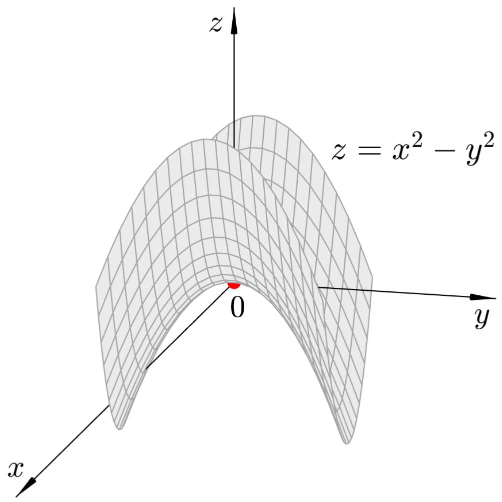
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

nužni uvjeti lokalnog ekstrema u (x_0, y_0). Usporedite s lokalnim ekstremom funkcije jedne varijable (Slika 9.4).



Slika 9.4: Nužan uvjet lokalnog ekstrema za funkciju jedne varijable

Točke koje zadovoljavaju nužan uvjet ekstrema zovu se **kritične točke ili stacionarne točke**, kao i kod funkcija jedne varijable. U kritičnoj točki može biti lokalni minimum ili lokalni maksimum ili može biti **sedlasta točka** - analogon točke infleksije za funkcije jedne varijable (Slika 9.5).



Slika 9.5: Sedlasta točka $(0, 0)$ funkcije $f(x, y) = x^2 - y^2$

Analogno se dobiju nužni uvjeti lokalnog ekstrema za funkcije triju ili više varijabla, samo što se ne mogu ovako jednostavno geometrijski predočiti.

Primjer 9.1. [Kritične točke funkcije dviju varijabla]
Skicirajmo graf i odredimo kritične točke funkcija:

(i) $f(x,y) := x^2 + y^2$

(ii) $f(x,y) := x^2 + y^2 + 1$

(iii) $f(x,y) := x^2 + y^2 - 1$

(iv) $f(x,y) := x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5$

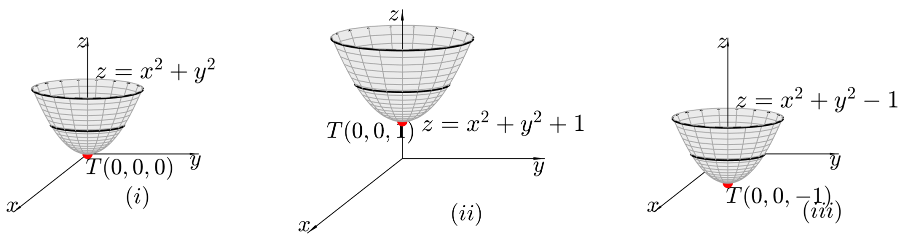
(v) $f(x,y) := 4 - x^2 - y^2$.

Pokušajmo odrediti njihov karakter.

(i)-(iii) Nužni uvjeti lokalnog ekstrema daju

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0,$$

odakle dobivamo $x = y = 0$ pa je $(0,0)$ jedina stacionarna točka. Iz Slike 9.6 vidimo da je to uvijek minimum, samo što je vrijednost minimuma redom $0, 1, -1$.



Slika 9.6: Primjer 9.1 (i)-(iii)

Drugim riječima, tjemena su redom $T(0,0,0)$, $T(0,0,1)$ i $T(0,0,-1)$. Uočimo da smo do rezultata mogli doći samo crtanjem grafa (bez traženja stacionarnih točaka).

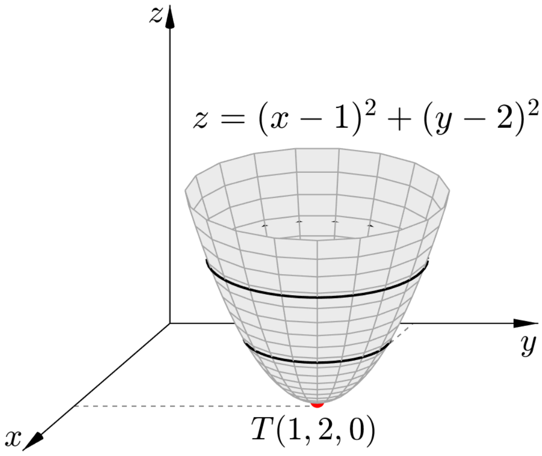
(iv) Tu je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 4,$$

što vodi do stacionarne točke $(1,2)$. I u toj je točki minimum, što se vidi iz jednakosti

$$x^2 - 2x + y^2 - 4x + 5 = (x-1)^2 + (y-2)^2$$

pa možemo pisati $f(x,y) := (x-1)^2 + (y-2)^2$. Slika je poput one iz (i), samo što je tjeme u $(1,2,0)$, Slika 9.7.

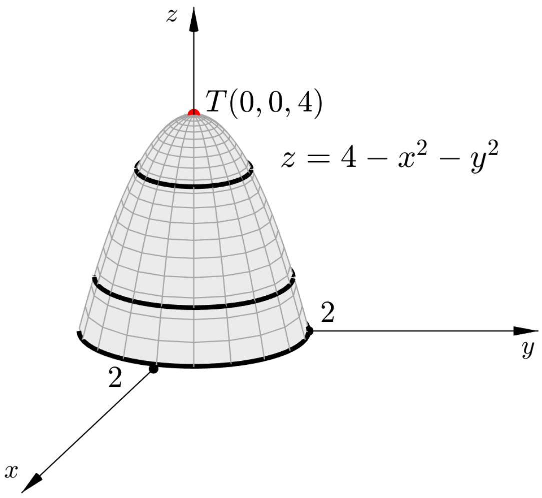


Slika 9.7: Primjer 9.1 (iv)

(v) Tu je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

pa je, opet, $(0,0)$ stacionarna točka. U toj je točki maksimum (Slika 9.8).



Slika 9.8: Primjer 9.1 (iv)

$\square$

Primjer 9.2. [Nužan uvjet ekstrema funkcija dviju varijabla] Skicirajmo graf i odredimo kritične točke funkcije $f(x,y) = xy$.

Tu je

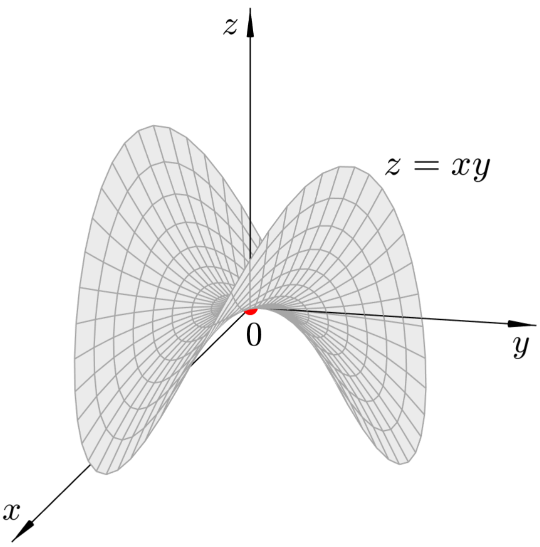
$$\frac{\partial f}{\partial x} = y = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x = 0$$

pa je, opet, $(0, 0)$ stacionarna točka. U toj točki nije lokalni ekstrem, već sedlasta točka. Graf nije lako jasno predočiti, ali se vidi sljedeće:

1. Graf sadrži koordinatne osi (jer je na njima $xy = 0$, tj. $z = 0$)

2. Za (x, y) iz prvog ili trećeg kvadranta, graf je iznad, a za one iz drugog i četvrtog kvadranta, on je ispod xy-ravnine.

Zato graf možemo zamisliti kao sedlo: prednji dio sedla je iznad prvog kvadranta (uzdiže se), a stražnji iznad trećeg kvadranta (također se uzdiže). Desna i lijeva strana sedla ide prema dolje i one su ispod drugog, odnosno ispod četvrtog kvadranta. Kako se ti dijelovi sastaju u ishodištu, ono se naziva sedlastom točkom (Slika 9.9).



Slika 9.9: Primjer 9.2

□

Fizikalno, sedlaste točke odgovaraju nestabilnim točkama procesa.

9.3.3 Kriterij lokalnog ekstrema i sedlaste točke

Prema analogiji s funkcijama jedne varijable, gdje se karakter stacionarne točke može opisati pomoću derivacija višeg reda, izvodi se analogan, ali bitno složeniji kriterij, za karakter stacionarnih točaka funkcije dviju varijabla.
Umjesto uvjeta $f''(x_0) > 0$ imamo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ i $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) > 0$ te slično za $f''(x_0) < 0$. Pokazuje se da to nije dovoljno. Potreban je još

jedan uvjet u kojemu sudjeluje determinanta sastavljena od drugih parcijalnih derivacija u stacionarnoj točki.
Evo opisa kriterija: neka je (x_0, y_0) stacionarna točka od f. Definiramo:

$$A := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$$

$$C := \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$$

$$B := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

$$\Delta := AC - B^2.$$

Tada vrijedi:

(i) Ako je $\Delta < 0$ onda je (x_0, y_0) sedlasta točka.

(ii) Ako je $\Delta > 0$ onda je (x_0, y_0) točka lokalnog ekstrema i to:

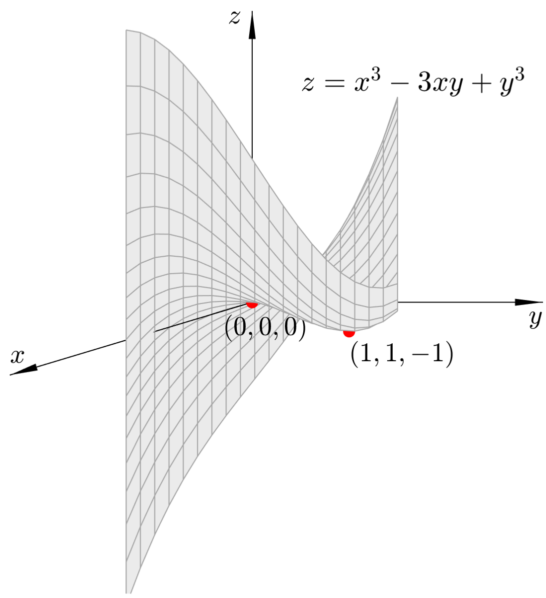
za $A < 0$ to je lokalni maksimum

za $A > 0$ to je lokalni minimum.

Uočimo sličnost s kriterijem za funkcije jedne varijable. Uočimo također, da je, uz uvjet $\Delta > 0$, uvjet $A < 0$ ekvivalentan uvjetu $C < 0$ (i slično za $A > 0$). Zato je dovoljno provjeriti bilo koji od tih uvjeta. Mi smo stavili uvjet za A, a mogli smo i za C.

(iii) Ako je $\Delta = 0$, kriterij ne daje odluku.

Primjer 9.3. [Primjena kriterija lokalnog ekstrema]
Odredimo lokalne ekstreme funkcije $f(x, y) := x^3 - 3xy + y^3$, Slika 9.10.



Slika 9.10: Primjer 9.3

Tu je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Zato je:

$$A = 6x, \quad C = 6y, \quad B = -3, \quad \Delta = 6x \cdot 6y - (-3)^2 = 9(4xy - 1).$$

Stacionarne se točke dobiju iz sustava:

$$3y = 3x^2$$
$$3x = 3y^2.$$

Dobiju se točke $(0,0)$ i $(1,1)$. Izrazi A, B, C i Δ mogu se gledati kao funkcije dviju varijabla. Vidimo da je:

$\Delta(0,0) = -9 < 0$ pa je $(0,0)$ sedlasta točka

$\Delta(1,1) = 27 > 0$ pa je $(1,1)$ točka lokalnog ekstrema. Kako je $A(1,1) = 6 > 0$, zaključujemo da je u $(1,1)$ lokalni minimum.

To sve potvrđuje i Slika 9.10. □

Primjer 9.4. [Primjena pojma lokalnog ekstrema]
Od svih kvadara zadana obujma odredimo onaj minimalna oplošja.
Prije rješavanja napomenimo da su zadaci ovoga tipa vrlo važni u primjeni, jer organske i anorganske tvorevine često imaju ovakvo (ili nekakvo drugčije) svojstvo minimalnosti. Naravno, ovaj je zadatak zanimljiv za minimizaciju potrošnje materijala.
Označimo s x, y i z duljine bridova kvadra, s O oplošje i s V obujam. Tada je

$$V = xyz, \quad \text{tj.} \quad z = \frac{V}{xy}$$
$$O = 2(xy + xz + yz) = 2\left(xy + \frac{V}{y} + \frac{V}{x}\right)$$

pa se zadatak svodi na određivanje minimuma funkcije

$$f(x,y) := xy + \frac{V}{x} + \frac{V}{y}$$

za pozitivne x i y. Dobijemo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{V}{x^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{V}{y^2}.$$

Stacionarne točke dobijemo iz sustava $y - \frac{V}{x^2} = 0$, $x - \frac{V}{y^2} = 0$, tj. iz

$$\begin{aligned} y &= \frac{V}{x^2} \\ x &= \frac{V}{y^2}. \end{aligned}$$

Dobijemo $xy^2 = yx^2$, tj. $y = x$ (jer je $x, y > 0$). Uvrštavanjem u neku od gornjih jednadžba, dobijemo

$$x = y = z = \sqrt[3]{V}.$$

Zaključujemo da je rješenje kocka. Dakle:

Od svih kvadara stalnog obujma, najmanje oplošje ima kocka.

Da je dobiveno rješenje minimum, a ne maksimum, možemo zaključiti na dva načina:

1. čisto matematički, pomoću kriterija (postupak provedite sami)
2. intuitivno: oplošje nema najveće vrijednosti, uz stalni obujam može biti po volji veliko (objasnite). Zato stacionarna točka treba biti minimum. □

9.4 PRIMJENA MATLAB-A

9.4.1 Pronalaženje lokalnih ekstrema funkcije dviju varijabla. Naredba `fminsearch`

Na funkciji iz Primjera 9.3 pokazat ćemo kako se pomoću naredbe `fminsearch` numerički pronalazi točka lokalnog minimuma, uz zadanu početnu točku u okolini koje se minimum želi naći. Pritom x i y redom označavamo s $x(1)$ i $x(2)$ jer je to zahtjev naredbe `fminsearch`. Pri ispisu nađene točke lokalnog minimuma `xmin`, tj. uređenog para $(x(1), x(2))$ u kojemu se postiže minimum, dobivamo i pripadnu vrijednost funkcije:

```
f = @(x) x(1).^3-3*x(1)*x(2) + x(2).^3
x0 = [0, 0]
[xmin, f_xmin] = fminsearch(f, x0)
```

```
xmin =
    1.0000    1.0000
f_xmin =
   -1.0000
```

Za točku lokalnog minimuma dobili smo uređeni par decimalnih brojeva $(1.0000, 1.0000)$ koji je različit od stvarne točke lokalnog minimuma $(1, 1)$, makar se može činiti da su te dvije točke jednake.

Ako bi nam za daljnji račun bila potrebna veća preciznost, naredbi `fminsearch` trebali bismo dodati argument definiran pomoću naredbe `optimset`, koja se koristi za zadavanje optimizacijskih parametara:

```
f = @(x) x(1).^3-3*x(1)*x(2) + x(2).^3
x0 = [0, 0]
preciznost = optimset('TolX', 0.00001)
[xmin, f_xmin] = fminsearch(f, x0, preciznost)
```

Slično kao u **??**, naredba `fminsearch` može koristiti za pronalaženje lokalnih maksimuma, s time da je u tom slučaju potrebno raditi s funkcijom $-f$.

Osim naredbe `fminsearch` koja lokalni minimum traži bez dodatnih uvjeta na nezavisne varijable, unutar *Optimization Toolbox-a* (koji nije dio standardne MATLAB instalacije) postoji i naredba `fmincon` koja pronalazi minimum poštujući jedan ili više uvjeta.

9.4.2 Nužni i dovoljni uvjeti lokalnih ekstrema funkcija dviju varijabla. Naredbe `solve` i `hessian`

Proceduru pronalaženja kritičnih, tj. stacionarnih točaka funkcija dviju varijabla analogna je onoj za funkcije jedne varijable iz **??**, uz razliku što ovdje treba odrediti rješenja *sustava* jednadžba. Odredimo pomoću `solve` stacionarne točke funkcije iz Primjera 9.3:

```
syms x y
f = x^3 - 3*x*y + y^3
uvjeti = [diff(f, x) == 0, diff(f, y) == 0]
[stacx, stacy] = solve(uvjeti, [x y])
stac = [stacx stacy]
```

```
stac =
[                    0,                      0]
[                    1,                      1]
[  (3^(1/2)*1i)/2 - 1/2, - (3^(1/2)*1i)/2 - 1/2]
[- (3^(1/2)*1i)/2 - 1/2,   (3^(1/2)*1i)/2 - 1/2]
```

Vidimo da smo, osim realnih, dobili i kompleksna rješenja. Kako bismo skup rješenja ograničili na ona koja su realna, naredbi `solve` dodat ćemo argument `'Real'` s vrijednošću `true`. Dobit ćemo stacionarne točke $(0,0)$ i $(1,1)$, kao i u rješenju spomenutog primjera:

```
syms x y
f = x^3 - 3*x*y + y^3
uvjeti = [diff(f, x) == 0, diff(f, y) == 0]
[stacx, stacy] = solve(uvjeti, [x y], 'Real', true)
stac = [stacx stacy]
```

```
stac =
```

```
[0, 0]
[1, 1]
```

Napomenimo da bi analogno bilo moguće provesti postupak određivanja stacionarnih točaka za funkcije triju ili više varijabla.

Za dobivene stacionarne točke možemo provjeriti dovoljne uvjete za lokalne ekstreme, tj. kriterij lokalnih ekstrema iz 9.3.3. Pokažimo ovu proceduru za stacionarnu točku $(1,1)$. Pomoću naredbe `hessian` koju smo upoznali u 7.4.3 određujemo matricu drugih parcijalnih derivacija, a potom u nju uvrštavamo točku $(1,1)$:

```
H = hessian(f, [x, y])                    % [6*x -3; -3 6*y]
H11 = subs(H, [x, y], [1, 1])
det(H11)                                  % 27
```

```
H11 =
     6    -3
    -3     6
```

Vidimo da je determinanta veća od nule, kao i to da je prvi element matrice pozitivan pa zaključujemo da je $(1,1)$ točka lokalnog minimuma.

9.5 PITANJA I ZADATCI

1. Provjerite kriterij ekstrema na funkcijama iz Primjera 9.1 i 9.2.
2. Odredite lokalne ekstreme funkcije $f(x,y) := x^3 - 3xy^2 + 3y^2$.
3. (i) Pokažite da je Primjeru 9.4 riječ o minimumu.

   (ii) Potvrdite tvrdnju Primjera 9.4 koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine.
   Uputa: ta nejednakost tvrdi da za pozitivne brojeva a, b i c vrijedi

   $$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc},$$

   s tim da jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$. Tvrdnju primijenite na funkciju $f(x,y) := xy + \frac{V}{x} + \frac{V}{y}$ iz Primjera 9.4.
4. (i) Odredite stacionarne točke funkcije $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$. Koliko ih ima?

   (ii) Odredite karakter stacionarnih točaka iz (i) za koje obrađeni kriterij daje odluku.

5. Riješite problem analogan, ali obratan onome iz Primjera 9.4: od svih kvadara stalnog oplošja, odredite onaj koji ima najveći obujam.

6. Za funkciju $f(x, y) := x^3 - 3xy + y^3$ iz Primjera 9.3 pokazano je da je u $(0, 0)$ sedlasta točka. Potvrdite to računajući vrijednost funkcija za točke (x, y) koje su blizu ishodišta $(0, 0)$, najprije s jedne i druge strane x-osi, potom y-osi te u pojedinim kvadrantima. Analizirajte i pokušajte objasniti dobivene rezultate.
Uputa: pogledajte analizu sedlaste točke iz Primjera 9.2.

10 VIŠESTRUKI INTEGRALI - UZASTOPNO INTEGRIRANJE. PRIMJENA U GEOMETRIJI

U lekciji se uvodi pojam dvostrukog i, općenito, višestrukog integrala i objašnjava njegovo geometrijsko značenje. Također se objašnjava jedna metoda efikasnog računanja dvostrukog integrala - uzastopno integriranje, u pravokutnim i u polarnim koordinatama.

10.1 PRIPADNI PROBLEM

Problem određivanja obujma tijela koji su omeđeni zakrivljenim plohama odavno je važan matematički i praktični problem. Taj se problem načelno rješava pomoću dvostrukog integrala, analogno tome kako se problem površine rješava pomoću običnog - jednostrukog integrala.

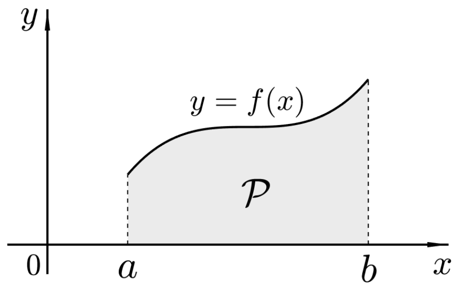
10.2 POTREBNO PREDZNANJE

Potrebno je poznavanje pojma funkcije dviju varijabla i njena grafa, te pojam i geometrijsku interpretaciju određenog integrala funkcije jedne varijable - jednostrukog integrala. Također je potrebno poznavati pojam obujma i računanja obujma prizme.

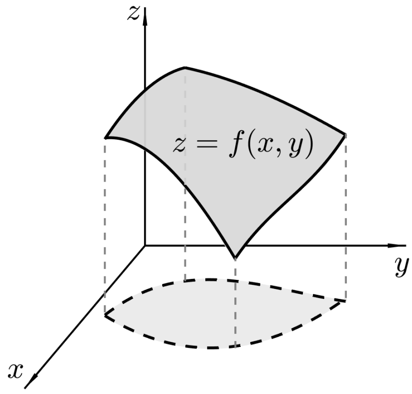
10.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

10.3.1 Obujam ispod grafa pozitivne funkcije dviju varijabla

Analogno tome kako graf pozitivne funkcije f jedne varijable zatvara s x-osi površinu (Slika 10.1), tako graf pozitivne funkcije dviju varijabla s xy-ravninom zatvara prostor (Slika 10.2). U prvom slučaju riječ je o površini ispod krivulje, a u drugom o prostoru ispod plohe.

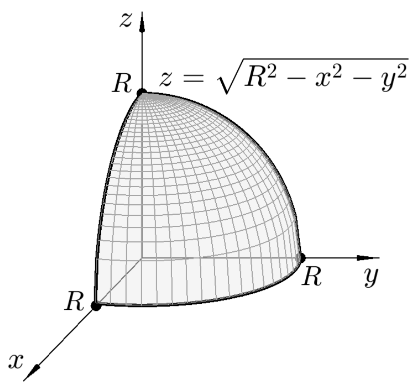


Slika 10.1: Površina ispod grafa pozitivne funkcije jedne varijable



Slika 10.2: Prostor ispod grafa pozitivne funkcije dviju varijabla

Primjer 10.1. [Prostor ispod plohe]
Polukugla polumjera R može se shvatiti kao dio prostora između grafa funkcije $f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ i xy-ravnine (Slika 10.3 - prikaz dijela polukugle u prvom oktantu).



Slika 10.3: Dio polukugle u prvom oktantu

□

Podsjetimo da djelić površine $\Delta P(x)$ ispod grafa pozitivne funkcije f jedne varijable, a iznad segmenta od x do $x + \Delta x$ duljine Δx, ima približnu vrijednost (Slika 10.4)

$$\Delta P(x) \approx f(x)\Delta x$$

i da je diferencijal površine u x

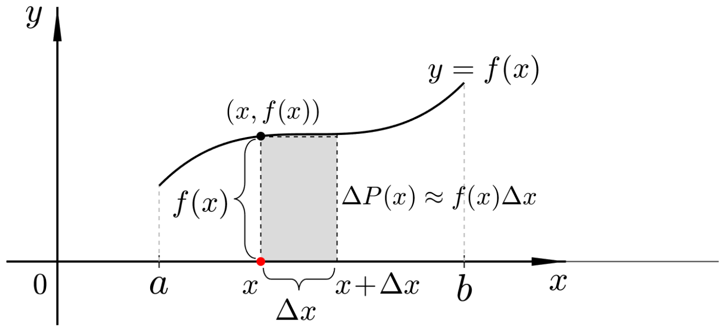
$$dP(x) = f(x)\Delta x.$$

Analogno definiramo **djelić obujma** $\Delta V(x,y)$ ispod grafa pozitivne funkcije f dviju varijabla, a iznad pravokutnika sa stranicama duljina Δx i Δy, s jednim vrhom u točki (x,y) kao na Slici 10.5 (i). Vidimo (Slika 10.5 (ii)) da taj pravokutnik ima površinu $\Delta x \cdot \Delta y$ i da je

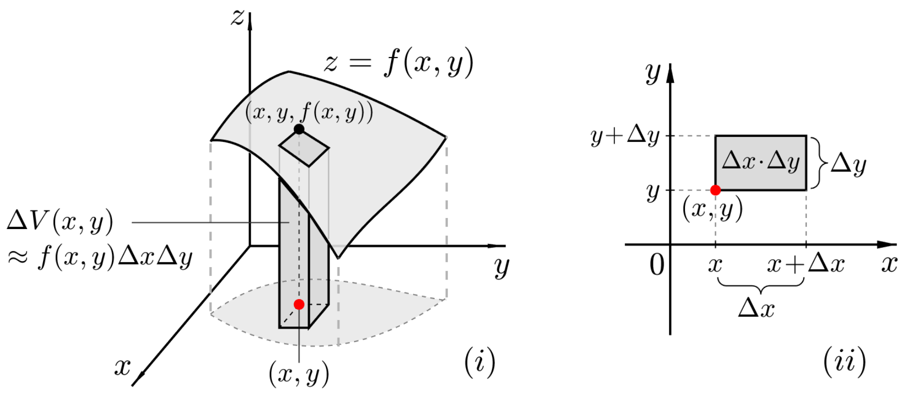
$$\Delta V(x,y) \approx f(x,y)\Delta x \Delta y,$$

odakle definiramo **diferencijal obujma** u (x,y):

$$dV(x,y) = f(x,y)dxdy.$$



Slika 10.4: Djelić površine $\Delta P(x)$



Slika 10.5: Djelić obujma $\Delta V(x, y)$

Analogno kao za funkcije jedne varijable, ovdje treba biti $\Delta x > 0$ i $\Delta y > 0$.

10.3.2 Računanje obujma ispod grafa pozitivne funkcije – dvostruki integral pozitivne funkcije

Kod funkcije jedne varijable imali smo pozitivnu funkciju f, segment $[a, b]$ na x-osi i površinu $\mathcal{P}$ između segmenta i grafa. Veza između tih veličina dana je određenim integralom $\mathcal{P} = \int_a^b f(x)dx$, koji se može pisati kao

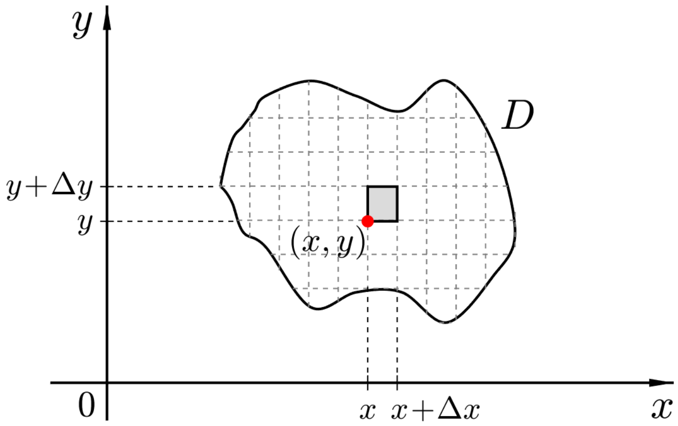
$$\mathcal{P} = \int_{[a,b]} f(x)dx.$$

Čitamo: *integral funkcije* f *po segmentu* $[a, b]$.
Analogno, kod funkcija dviju varijabla imamo pozitivnu funkciju f dviju varijabla, područje D u xy-ravnini i obujam $\mathcal{V}$ između područja D i grafa funkcije f. Imamo, za dovoljno razumne funkcije f, i analognu vezu

$$\mathcal{V} = \int\int_D f(x, y)dxdy.$$

Čitamo: *dvostruki integral funkcije* f *po području* D.
Dvostruki integral ima značenje volumena $\mathcal{V}$. Taj je volumen pri-

bližno suma djelića volumena iznad malih pravokutnika kad područje D podijelimo kao na Slici 10.6.



Slika 10.6: Podjela područja D na male pravokutnike

Intuitivno, zamišljamo da smo integriranjem zbrojili beskonačno mnogo diferencijala površina $f(x,y)dxdy$, kad (x,y) prolazi svim točkama područja D, i tako dobili ukupni obujam $\mathcal{V}$. Područje D naziva se **područjem integracije**, a f **podintegralna funkcija**.

Primjer 10.2. [Dvostruki integral pozitivne funkcije]
U Primjeru 10.1 imamo $f(x,y) := \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, a D je krug u xy-ravnini polumjera R sa središtem u ishodištu. Pripadni dvostruki integral

$$\int\int_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$$

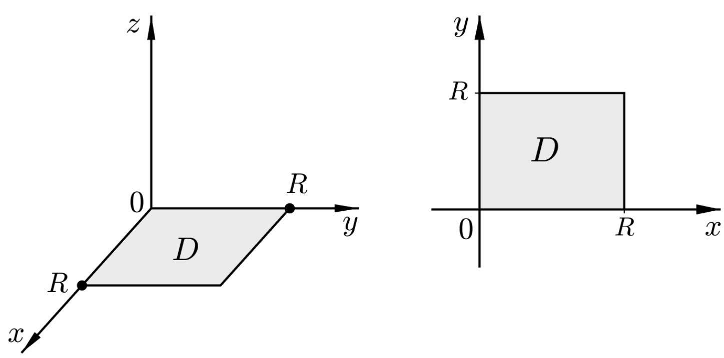
ima značenje obujma polukugle polumjera R. □

Primjer 10.3. [Dvostruki integral pozitivne funkcije]

(i) Dvostruki integral

$$\int\int_D xy\,dxdy,$$

gdje je D kvadrat u prvom kvadrantu (Slika 10.7) zadan s $0 \leqslant x \leqslant R$ i $0 \leqslant y \leqslant R$, ima značenje obujma između tog kvadrata i sedlaste plohe $z = xy$, Slika 9.9.

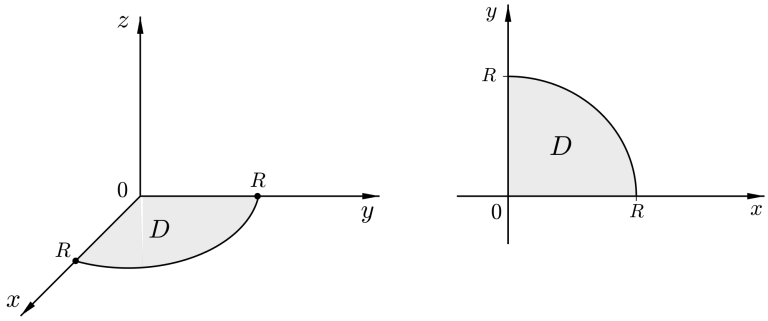


Slika 10.7: Primjer 10.3 (i)

(ii) Dvostruki integral

$$\int\int_D xy\,dx\,dy,$$

gdje je D dio kruga polumjera R u prvom kvadrantu (Slika 10.8) zadana s $0 \leqslant x \leqslant R$ i $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2 - x^2}$, ima značenje obujma između tog dijela kruga i sedlaste plohe.



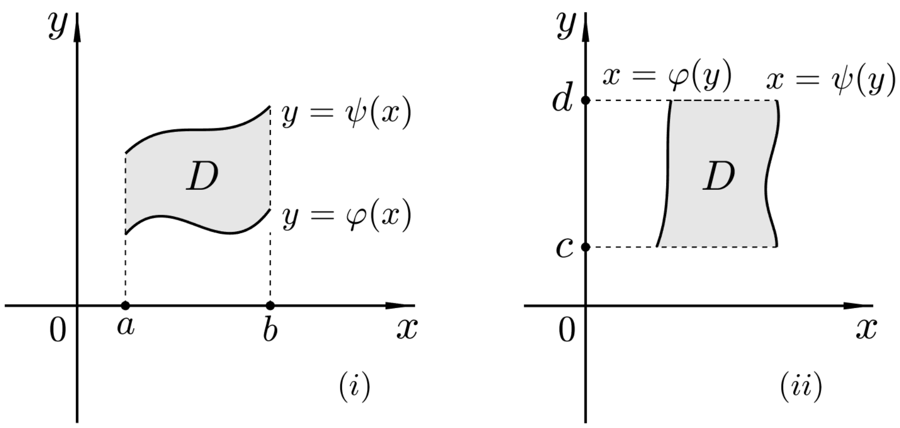
Slika 10.8: Primjer 10.3 (ii)

□

10.3.3 Računanje dvostrukog integrala - uzastopno integriranje

Ne postoji opća metoda za računanje dvostrukog integrala $\int\int_D f(x,y)dxdy$ za svako područje integracije D. Takva metoda postoji ako je područje integracije D kao na Slici 10.9 (i), tj. ako je zadano nejednadžbama

$$\begin{aligned} a &\leqslant x \leqslant b \\ \varphi(x) &\leqslant y \leqslant \psi(x). \end{aligned}$$



Slika 10.9: Područja integracije D zadana nejednadžbama

Tada se dvostruki integral svodi na dva uzastopna jednostruka integrala, prema formuli

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy \right] dx.$$

Slično je pri zamjeni x i y koordinate, tj. ako je područje integracije D zadano nejednadžbama

$$\begin{aligned} c &\leqslant y \leqslant d \\ \varphi(y) &\leqslant x \leqslant \psi(y), \end{aligned}$$

kao na Slici 10.9 (ii). Tada se dvostruki integral svodi na dva uzastopna jednostruka integrala, prema formuli

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,dx\right] dy.$$

Opis postupka uzastopnog integriranja za $\int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$:

1. Računanje integrala
$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$
kao integrala po varijabli y, uz uvjet da je u podintegralnoj funkciji varijabla x konstanta. Rezultat će biti neka funkcija ovisna o x i može se, za svaki konkretni x, interpretirati kao površina presjeka zadanog obujma s ravninom kroz x okomito na os apscisa, a usporedno s yz-ravninom.

2. Integriranje dobivene funkcije iz 1. po x - rezultat će biti broj. Drugi korak zamišljamo kao "zbrajanje" svih tih površina za sve x od a do b i tako dobijemo traženi obujam.

Primjer 10.4. [Primjena uzastopnog integriranja]
Izračunajmo obujme iz Primjera 10.3.

(i) Tu je $f(x,y) := xy$, a D je kvadrat stranice R u prvom kvadrantu (Slika 10.7) pa je $a = 0$, $b = R$, $\varphi(x) = 0$ i $\psi(x) = R$:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_1 &= \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^R \left[\int_0^R xy\,dy\right] dx \\ &= \int_0^R \left[\left(x\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=R}\right] dx = \int_0^R \frac{R^2 x}{2}\,dx \\ &= \frac{R^2x^2}{4}\Big|_0^R = \frac{R^4}{4}. \end{aligned}$$

(ii) Tu je opet $f(x,y) := xy$, ali sad je D dio kruga polumjera R u prvom kvadrantu (Slika 10.8) pa je $a = 0$, $b = R$, $\varphi(x) = 0$ i $\psi(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$:

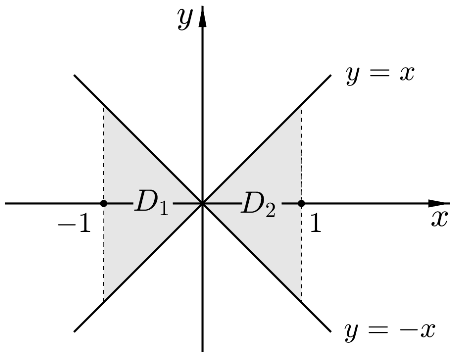
$$\begin{aligned} \mathcal{V}_2 &= \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^R \left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} xy\,dy\right] dx \\ &= \int_0^R \left[\left(x\frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=\sqrt{R^2-x^2}}\right] dx = \int_0^R x\frac{R^2 - x^2}{2}\,dx \\ &= \left(\frac{R^2x^2}{4} - \frac{x^4}{8}\right)\Big|_0^R = \frac{R^4}{8}. \end{aligned}$$

Dakle, $\mathcal{V}_1 = 2\mathcal{V}_2$ (komentirajte). □

Općenito se područje integracije D ne može zadati nejednadžbama gornjeg tipa. Tada ga podijelimo na dijelove $D_1, D_2, \dots, D_n$ koji u presjeku nemaju zajedničkih površina, koji se svaki može zadati nejednadžbama i za koje vrijedi $D = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$. Tada je

$$\begin{aligned} &\int\int_D f(x,y)dxdy \\ &= \int\int_{D_1} f(x,y)dxdy + \int\int_{D_2} f(x,y)dxdy + \cdots + \int\int_{D_n} f(x,y)dxdy. \end{aligned}$$

Primjer 10.5. [Podjela područja integracije]
Neka je D dio ravnine omeđen pravcima $y = x$, $y = -x$, $x = -1$, $x = 1$, Slika 10.10.



Slika 10.10: Primjer 10.5

Tada je $D = D_1 \cup D_2$, gdje je D_1 zadano s:

$$-1 \leqslant x \leqslant 0 \quad i \quad x \leqslant y \leqslant -x,$$

a D_2 s

$$0 \leqslant x \leqslant 1 \quad i \quad -x \leqslant y \leqslant x.$$

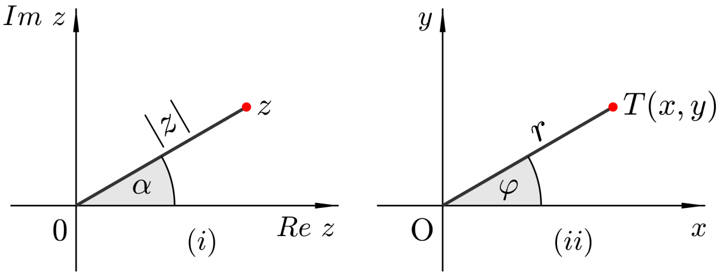
Zato je

$$\begin{aligned} \int\int_D f(x,y)dxdy &= \int\int_{D_1} f(x,y)dxdy + \int\int_{D_2} f(x,y)dxdy \\ &= \int_{-1}^{0} \left[\int_{x}^{-x} f(x,y)dy\right] dx + \int_{0}^{1} \left[\int_{-x}^{x} f(x,y)dy\right] dx. \end{aligned}$$

□

10.3.4 Dvostruki integral u polarnim koordinatama

U primjenama je katkad prirodnije razmatrati polarne koordinate umjesto pravokutnih, kartezijevih. Polarne koordinate analogne su trigonometrijskom prikazu kompleksnog broja: kako je svaki kompleksni broj z različit od nule jednoznačno određen svojom apsolutnom vrijednošću $|z|$ i argumentom (kutom) φ, Slika 10.11 (i), tako je i svaka točka T ravnine različita od ishodišta jednoznačno određena udaljenošću od ishodišta r, i kutom φ što ga spojnica $\overline{OT}$ zatvara s pozitivnom zrakom x-osi (Slika 10.11 (ii)).



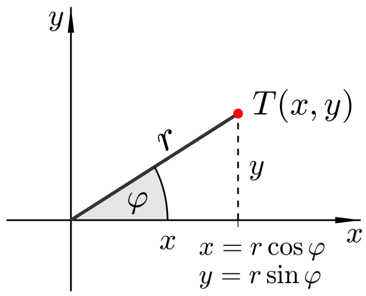
Slika 10.11: Polarne koordinate

Uobičajena je ova terminologija:

- realni brojevi x, y su kartezijeve koordinate točke T, a uređeni par (x, y) prikaz točke T u kartezijevim koordinatama
- pozitivan realan broj r i realan broj φ uz $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, su polarne koordinate točke T, a uređeni par (r, φ) prikaz točke T u polarnim koordinatama

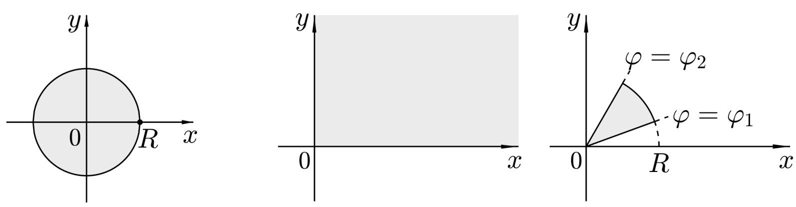
Veza između kartezijevih i polarnih koordinata (Slika 10.12) dana je sljedećim formulama:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi.$$



Slika 10.12: Veza između kartezijevih i polarnih koordinata

Primjer 10.6. [Podskupovi ravnine u polarnim koordinatama]
Na Slici 10.13 predočeni su neki podskupovi ravnine i njihove jednadžbe u polarnim koordinatama.



Kružnica polumjera r *sa središtem u ishodištu*: $r = R$
Pripadni krug: $r \leq R$

Prvi kvadrant: $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

Kružni isječak: $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, $0 < r \leq R$

Slika 10.13: Podskupovi ravnine u polarnim koordinatama

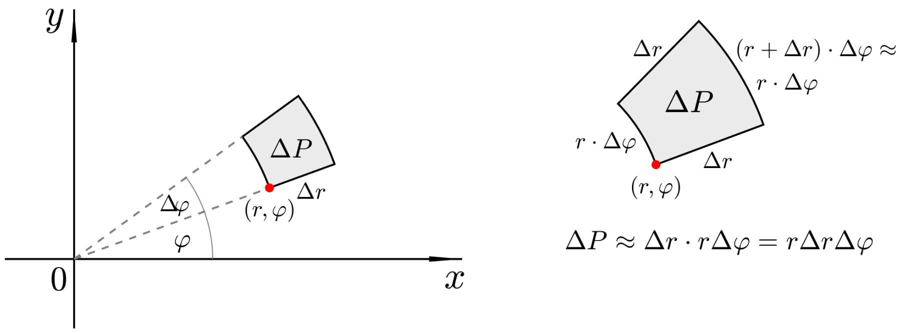
□

Po uzoru na kartezijeve koordinate, računamo djelić površine i obujma te diferencijal površine i obujma u polarnim koordinatama (Slika 10.14). Za djelić površine i diferencijal površine imamo

$$\Delta P(r,\varphi) \approx r\Delta r\Delta\varphi$$
$$dP(r,\varphi) = r\,dr\,d\varphi.$$

Dakle, $dx\,dy$ u kartezijevim koordinatama prelazi u $r\,dr\,d\varphi$ u polarnim koordinatama.
Zato su djelić obujma što ga nad djelićem površine čini pozitivna funkcija f i pripadni diferencijal obujma dani s

$$\Delta V(r,\varphi) \approx f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\Delta r\Delta\varphi$$
$$dV(r,\varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr\,d\varphi.$$



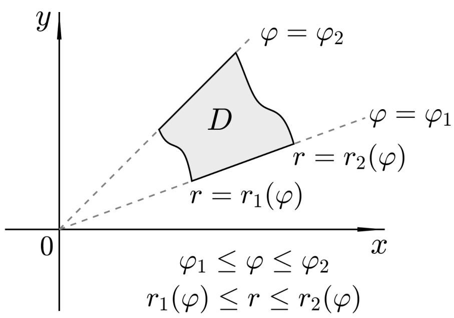
Slika 10.14: Djelić površine $\Delta P(r,\varphi)$

Analogno kao kod kartezijevih koordinata, ovdje treba biti $\Delta r > 0$ i $\Delta\varphi > 0$.
Prelazimo na izvod formule za dvostruki integral u polarnim koordinatama (Slika 10.15): ako je područje D zadano u polarnim koordinatama nejednadžbama

$$\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$$
$$r_1(\varphi) \leqslant r \leqslant r_2(\varphi),$$

onda je

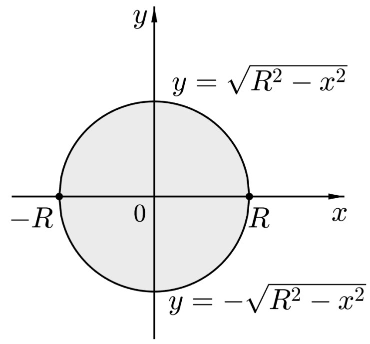
$$\int\!\!\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left[\int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr \right] d\varphi.$$



Slika 10.15: Područje integracije u polarnim koordinatama

Primjer 10.7. [Dvostruki integral u polarnim koordinatama]
Izračunajmo obujam polukugle polumjera R.
Prema Primjerima 10.1 i 10.3 vidimo da tu područje D zadovoljava uvjete za uzastopno integriranje. Naime, krug polumjera R zadan je u pravokutnim koordinatama uvjetima (Slika 10.16):

$$\begin{aligned} &-R \leqslant x \leqslant R \\ &-\sqrt{R^2-x^2} \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2-x^2}. \end{aligned}$$



Slika 10.16: Primjer 10.7

Zato je

$$\mathcal{V} = \int\int_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-R}^{R}\left[\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy\right]dx.$$

Vidimo da se problem svodi na računanje kompliciranih integrala u pravokutnim koordinatama.
Uz pomoć polarnih koordinata račun postaje puno jednostavniji. Naime, u polarnim se koordinatama krug polumjera R zadaje nejednadžbom $r \leqslant R$, dakle područje D zadano je nejednadžbama:

$$\begin{aligned} &0 \leqslant \varphi < 2\pi \\ &0 < r \leqslant R. \end{aligned}$$

Napomenimo da na obujam ne utječe to što je iz područja D isključeno ishodište.
Također, vrijedi $x^2+y^2=r^2$ pa dobijemo

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= \int\int_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\,r\,dr\right]d\varphi = \\ &= \left[R^2-r^2=t^2,\ r\,dr=-t\,dt\right] = \int_0^{2\pi}\left[\int_R^0 (-t^2)\,dt\right]d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{R^3}{3}\,d\varphi = \\ &= \left(\frac{R^3}{3}\varphi\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi R^3}{3}, \end{aligned}$$

što je obujam polukugle polumjera R. □

10.3.5 Dvostruki i trostruki integral bilo koje funkcije dviju varijabla

Analogno interpretaciji jednostrukog integrala prema kojem je integral negativne funkcije suprotan površini između grafa i x-osi, dvostruki integral negativne funkcije suprotan je obujmu između grafa i xy-ravnine.
Također, uzastopno integriranje i zamjena s polarnim koordinatama mogu se primijeniti općenito, a ne samo za pozitivne funkcije.
Analogno dvostrukom definira se trostruki integral, ali tu ga nećemo obrađivati.

10.4 PRIMJENA MATLAB-A

10.4.1 Uzastopno simboličko integriranje. Naredba `int`

Primjenu naredbe `int` na računanje dvostrukih integrala uzastopnim integriranjem ilustriramo na primjeru integrala iz Primjera 10.4. S obzirom na to da `int` računa jednostruki integral, a ovdje je riječ o dvostrukom integralu, potrebno je `int` upotrijebiti dvaput - prvi put integrira se po y, a potom po x (a moguće je i obratno, ovisno o tome što je pogodnije):

```
syms R x y
f(x, y) = x*y
int(int(f, y, 0, R), x, 0, R)                          % R^4/4
int(int(f, y, 0, sqrt(R^2 - x^2)), x, 0, R)            % R^4/8
```

Vidimo da naredba `int` za prvi integral daje rezultat $\frac{R^4}{4}$, a za drugi $\frac{R^4}{8}$, kako smo dobili i ranije.
Slično postupamo kod računanja dvostrukog integrala u polarnim koordinatama gdje, u pravilu, najprije integriramo po r, a potom po φ.

Prednost integriranja naredbom `int` je u tome što se u granicama integracije i u podintegralnoj funkciji mogu pojaviti parametri, a nedostatak taj što podintegralna funkcija mora biti takva da se rezultat može zapisati pomoću elementarnih ili specijalnih funkcija.

10.4.2 Numeričko integriranje. Naredba `integral2`

Naredba `integral2` računa dvostruki integral gdje je podintegralna funkcija konkretna, tj. nema parametara, a područje integracije mora biti zadano nejednakostima $x_{min} \leqslant x \leqslant x_{max}$, $y_{min}(x) \leqslant y \leqslant y_{max}(x)$ i također ne smije sadržavati parametre. Na primjer:

```
f = @(x, y) x.^2.*y
xmin = 0
xmax = 1
ymin = @(x) 2*x
```

```
ymax = @(x) 3*x
integral2(f, xmin, xmax, ymin, ymax)                  % 0.5000
```

10.5 PITANJA I ZADATCI

1. (i) Izračunajte integral iz Primjera 10.6 za $f(x,y) := x^2 + y^2$.

   (ii) Isto kao u (i), samo neka je $f(x,y) := 4$. Možete li rezultat predvidjeti bez računanja?

   Uputa: proučite Primjer 10.6.

2. Neka je D područje određeno grafovima funkcija $g(x) := x^3 - x$ i $h(x) := -x^3 + x$.

   (i) Izračunajte integral po području D ako je $f(x,y) := x^2 + y^2$.

   (ii) Isto kao u (i), samo neka je $f(x,y) := 4$. Možete li rezultat dobiti bez korištenja dvostrukog integrala?

3. Neka je D krug polumjera R sa središtem u ishodištu.

   (i) Izračunajte integral po području D funkcije $f(x,y) := x^2 + y^2$.

   (ii) Podijelite područje D na četiri dijela (svaki u pojedinom kvadrantu). Izračunajte integral funkcije f po svakom od ovih područja. Provjerite je li zbroj tih integrala integral iz (i).

4. (i) Izračunajte integral funkcije $f(x,y) := xy$ po svakom području iz Zadataka 1 i 3 i komentirajte rezultate.

   (ii) Izračunajte integral funkcije $f(x,y) := xy$ po područjima iz Zadatka 3 (ii). Komentirajte rezultate.

   Uputa: vodite računa o tome da u nekim slučajevima f nije pozitivna funkcija na području integriranja.

5. (i) Izračunajte dvostruki integral funkcije

   $$f(x,y) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

   po području D omeđenom elipsom $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, gdje su a i b pozitivni realni brojevi. O kojem je tijelu, odnosno obujmu riječ?

   (ii) Komentirajte slučaj $a = b$.

   Uputa: koristite zamjenu $x = au$, $y = bv$, gdje su u i v nove varijable pa povežite s Primjerom 10.7. Kontrolirajte što se događa s dx, dy i nejednadžbama područja D u novim koordinatama. Mogu li se ove zamjene izbjeći u slučaju (ii)?

6. Integral $\int\int_D f(x,y)dxdy$ prevedite na polarni oblik ako je D:
   (i) krug polumjera R sa središtem u ishodištu
   (ii) krug polumjera R sa središtem u točki (a,b). Geometrijski predočite značenje izraza $x-a$ i $y-b$.

   Uputa: nakon zamjene $x-a=u$, $y-b=v$ integral iz (ii) prelazi u integral iz (i), samo sad u varijablama u i v.

7. Integral $\int\int_D f(x,y)dxdy$ prevedite na polarni oblik ako je D:
   (i) kružni isječak polumjera R između zraka $\varphi=\varphi_1$ i $\varphi=\varphi_2$ sa središtem u ishodištu
   (ii) kružni isječak polumjera R između zraka $\varphi=\varphi_1$ i $\varphi=\varphi_2$ sa središtem u točki (a,b).

   Postupak posebno provedite i geometrijski predočite ako je $\varphi_1=30°$, $\varphi_2=120°$.
   Uputa: za (ii) postupite analogno kao u Zadatku 6.

8. Integral $\int\int_D f(x,y)dxdy$ prevedite na polarni oblik ako je D:
   (i) kružni isječak manjeg polumjera R_1, a većega R_2, između zraka $\varphi=\varphi_1$ i $\varphi=\varphi_2$ sa središtem u ishodištu
   (ii) kružni odsječak manjeg polumjera R_1, a većega R_2, između zraka $\varphi=\varphi_1$ i $\varphi=\varphi_2$ sa središtem u točki (a,b).

   Postupak posebno provedite i geometrijski predočite ako je $R_1=2$, $R_2=5$, $\varphi_1=30°$, $\varphi_2=120°$.

11 PRIMJENA VIŠESTRUKOG INTEGRALA U INŽENJERSTVU

U lekciji se ilustriraju dvije primjene dvostrukog integrala u inženjerstvu. Prva je u rješavanju problema mase nehomogenog područja u ravnini, a druga u određivanju njegova težišta, što je ujedno i primjena u vjerojatnosti i statistici, za dvodimenzionalne razdiobe. Napominju se i analogne primjene trostrukog integrala.

11.1 PRIPADNI PROBLEM

Problem mase i težišta ravne nehomogene tanke ploče ili tijela, vrlo je čest u primjenama. Taj se problem može riješiti pomoću dvostrukog integrala, odnosno pomoću trostrukog integrala, pod uvjetom da poznajemo gustoću ploče, odnosno gustoću tijela.

11.2 POTREBNO PREDZNANJE

Potrebno je poznavati pojam dvostrukog integrala i metode računanja uzastopnim integriranjem i u polarnim koordinatama. Također je potrebno poznavati sljedeće fizikalne pojmove:

1. Pojam mase i funkcije gustoće mase.
2. Pojam težišta nehomogenog segmenta.

11.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

11.3.1 Funkcija gustoće mase područja u ravnini

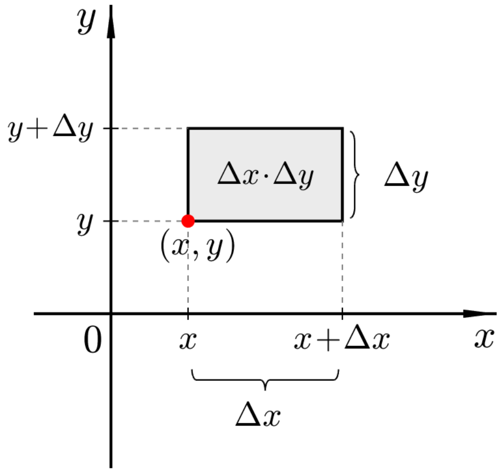
Zamislimo da je masa m tanko razmazana po području D u ravnini. Postoje dvije bitno različite mogućnosti. Prva je da je masa razmazana jednoliko - tada kažemo da je područje homogeno, tj. govorimo o **homogenoj ploči**. Druga je mogućnost da je masa razmazana nejednoliko - govorimo o **nehomogenom području ili ploči**.
Tada se karakter razmazivanja opisuje funkcijom gustoće mase f. Prosječna gustoća mase na malom pravokutniku sa stranicama $\Delta x > 0$ i $\Delta y > 0$ prema definiciji je omjer mase i površine (Slika 11.1):

$$\overline{f(x,y)} := \frac{\Delta m}{\Delta x \cdot \Delta y}.$$

Prelaskom na limes dolazimo do pojma gustoće u točki (x, y):

$$f(x, y) := \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta m}{\Delta x \cdot \Delta y}.$$

Uočimo da je formula analogna onoj za gustoću mase (nehomogenog) segmenta iz Lekcije 6.



Slika 11.1: Pravokutnik sa stranicama duljina Δx i Δy

11.3.2 Masa područja u ravnini

Iz diferencijalne relacije za masu dobijemo izraz za diferencijal mase, a potom i za masu:

$$\begin{aligned} \Delta m &\approx f(x, y)\Delta x \Delta y \\ dm &= f(x, y)dxdy \\ m &= \int\int_D f(x, y)dxdy. \end{aligned}$$

Uočimo da je i ova formula analogna onoj za masu (nehomogenog) segmenta iz Lekcije 6, samo što je ovdje dvostruki, umjesto jednostrukog integrala. Vidimo da se korištenje dvostrukog integrala općenito ne može izbjeći čak niti u slučaju homogenog područja, tj. u slučaju kad je funkcija gustoće $f(x, y)$ konstanta.

Primjer 11.1. [Primjena formule za masu područja]
Neka je D pravokutnik zadan relacijama

$$\begin{aligned} 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 \leqslant y \leqslant b \end{aligned}$$

i neka je, redom, funkcija gustoće mase:

(i) $f(x, y) := 3$

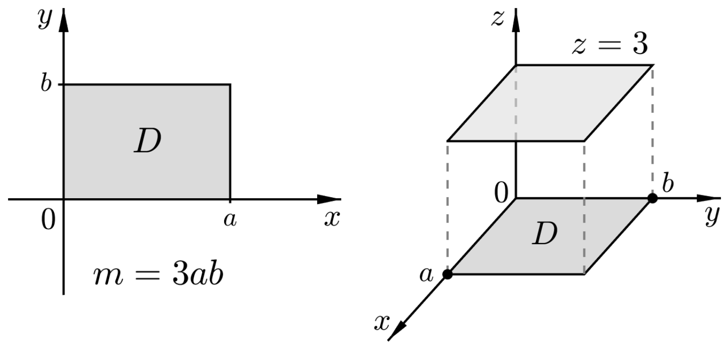
(ii) $f(x, y) := x$

(iii) $f(x, y) := xy$.

Predočimo grafički raspored mase i interpretirajmo rezultat. Odredimo ukupnu masu m. Podijelimo područje D vertikalnim pravcem (ili drukčije) na dva dijela jednakih masa te procijenimo položaj težišta područja D u odnosu na sjecište dijagonala.

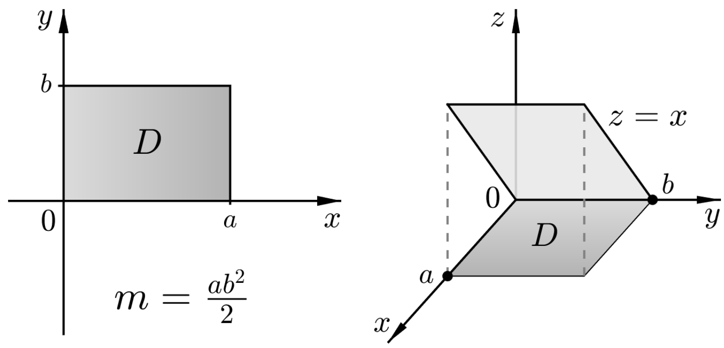
(1) Predočimo grafički raspored mase i interpretirajmo.

(i) Graf je pravokutnik - dio ravnine usporedne s xy-ravninom iznad zadanog pravokutnika D, Slika 11.2.
Masa je jednoliko razmazana pa na jedinicu površine dolaze 3 jedinice mase.



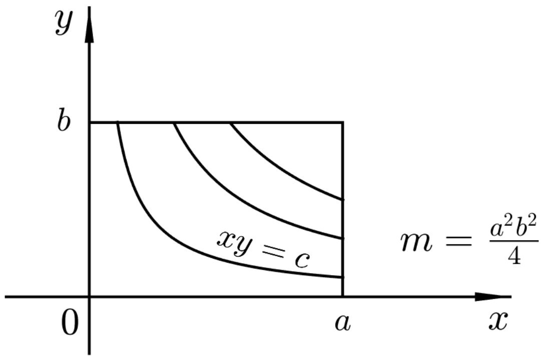
Slika 11.2: Primjer 11.1 (i) - prikaz rasporeda mase

(ii) Graf je dio kose ravnine iznad pravokutnika D, a zadan je jednadžbom $z = x$, Slika 11.3.
Možemo zamisliti da je masa razmazana po pravokutniku D nekim valjkom kojeg smo postavili na vertikalnu stranicu b, i gurajući valjak horizontalno (uzduž x-osi), količinu namaza pojačavamo jediničnom brzinom. Vertikalne linije, tj. dijelovi pravaca s jednadžbom $x = c$, za $0 \leqslant c \leqslant a$, imaju stalnu gustoću namaza.



Slika 11.3: Primjer 11.1 (ii) - prikaz rasporeda mase

(iii) Graf je dio sedlaste plohe iznad pravokutnika D.
Da dočaramo promjenu gustoće namaza, nacrtamo dijelove hiperbola s jednadžbom $xy = c$, za $c > 0$. Te hiperbole imaju stalnu gustoću namaza c za svaki fiksirani c, a gustoća se povećava povećavanjem parametra c, Slika 11.4.



Slika 11.4: Primjer 11.1 (iii) - prikaz rasporeda mase

(2) Odredimo ukupnu masu m.

(i) $m = 3 \cdot ab$ jer je, pri jednolikom namazu, masa jednaka umnošku površine i gustoće, što se može potvrditi i integriranjem.

(ii)

$$m = \int\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^a \left[\int_0^b xdy\right] dx = \int_0^a \left[xy\Big|_{y=0}^{y=b}\right] dx$$
$$= \int_0^a bxdx = \frac{a^2b}{2}.$$

Vidimo da je masa proporcionalna b, i kvadratno proporcionalna a. Objasnite!

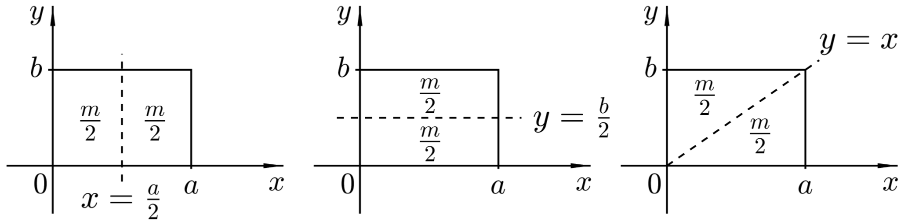
(iii)

$$m = \int\int_D f(x,y)dxdy = \int_0^a \left[\int_0^b xydy\right] dx = \int_0^a \left[x\frac{y^2}{2}\Big|_{y=0}^{y=b}\right] dx$$
$$= \int_0^a \frac{b^2}{2}xdx = \frac{a^2b^2}{4}.$$

Vidimo da je masa kvadratno proporcionalna i a i b. Objasnite!

(3) Podijelimo područje D vertikalnim pravcem (ili drukčije) na dva dijela jednakih masa.

(i) Rješenje je pravac s jednadžbom $x = \frac{a}{2}$. Na Slici 11.5 predočeno je to i neka druga rješenja.

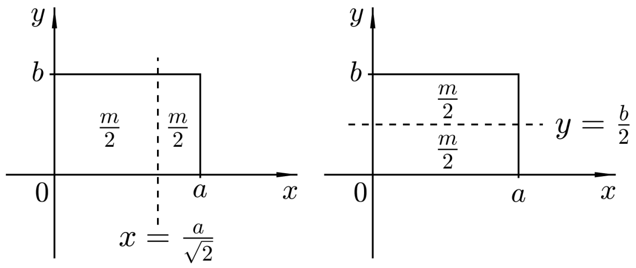


Slika 11.5: Primjer 11.1 (i) - podjela područja D na dva dijela jednakih masa

(ii) Treba biti

$$\int_0^c \left[\int_0^b x\,dy\right] dx = \frac{a^2 b}{4}$$
$$\frac{c^2 b}{2} = \frac{a^2 b}{4}$$
$$c = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

To je rješenje predočeno na Slici 11.6 lijevo, a desno još jedno. Pokušajte naći još neko.



Slika 11.6: Primjer 11.1 (ii) - podjela područja D na dva dijela jednakih masa

(iii) Treba biti

$$\int_0^c \left[\int_0^b xy\,dy\right] dx = \frac{a^2 b^2}{8}$$
$$\frac{c^2 b^2}{4} = \frac{a^2 b^2}{8}$$
$$c = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

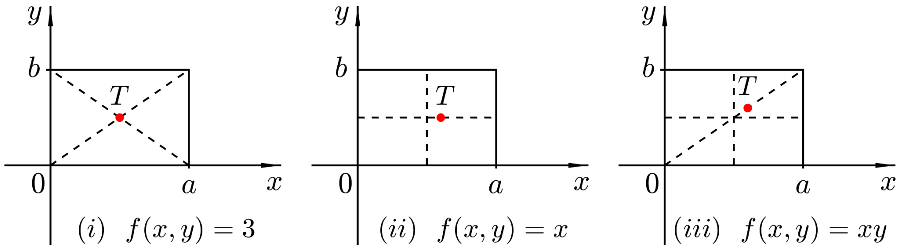
kao i u (ii). Komentirajte!

(4) Procijenimo položaj težišta područja D u odnosu na sjecište dijagonala.

(i) Težište je u sjecištu dijagonala (Slika 11.7 (i)).

(ii) Težište je u točki $(c, \frac{b}{2})$, gdje je $c > \frac{a}{2}$, Slika 11.7 (ii).

(iii) Težište je u točki (c, d), gdje je $c > \frac{a}{2}$ i $d > \frac{b}{2}$, Slika 11.7 (iii).



Slika 11.7: Primjer 11.1 - procjena položaja težišta T

□

Primjer 11.2. [Primjer gustoće pri kojoj je masa ravnine konačna]
Neka je masa razmazana po cijeloj ravnini prema pravilu za gustoću $f(x,y) := e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$. Odredimo masu.
Koristit ćemo se polarnim koordinatama:

$$m = \int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr\right] d\varphi,$$

što, nakon zamjene $\frac{r^2}{2} = t$, odakle je i $rdr = dt$, postaje:

$$m = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\infty} e^{-t}dt\right] d\varphi = \int_0^{2\pi}\left[\left(-e^{-t}\right)\Big|_0^{\infty}\right] d\varphi = \int_0^{2\pi} 1 \cdot d\varphi = 2\pi.$$

□

11.3.3 Težište područja u ravnini

Na osnovi formule za težište segmenta $[a,b]$ s funkcijom gustoće mase $f(x)$:

$$x_T = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}$$

i definicije težišta, dobijemo prvu i drugu koordinatu težišta područja D s funkcijom gustoće mase $f(x,y)$:

$$x_T = \frac{\int\int_D xf(x,y)dxdy}{\int\int_D f(x,y)dxdy} = \frac{\int\int_D xf(x,y)dxdy}{m}$$
$$y_T = \frac{\int\int_D yf(x,y)dxdy}{\int\int_D f(x,y)dxdy} = \frac{\int\int_D yf(x,y)dxdy}{m}.$$

Podsjetimo da je težište homogenog segmenta u njegovu polovištu, što je jasno i bez korištenja integrala. Iz gornjih formula vidimo da se dvostruki integral ne može izbjeći ako želimo odrediti težište homogenog područja u ravnini, a kamoli nehomogenog.

Primjer 11.3. [Primjena formula za težište]
Odredimo koordinate težišta područja iz Primjera 11.1.

(i)

$$x_T = \frac{\int\int_D xf(x,y)dxdy}{m} = \frac{\int_0^a \left[\int_0^b x \cdot 3 \cdot dy\right] dx}{3ab} = \frac{3\frac{a^2b}{2}}{3ab} = \frac{a}{2}.$$

Slično se dobije $y_T = \frac{b}{2}$, kako smo i predvidjeli u Primjeru 11.1 (iv).

(ii)

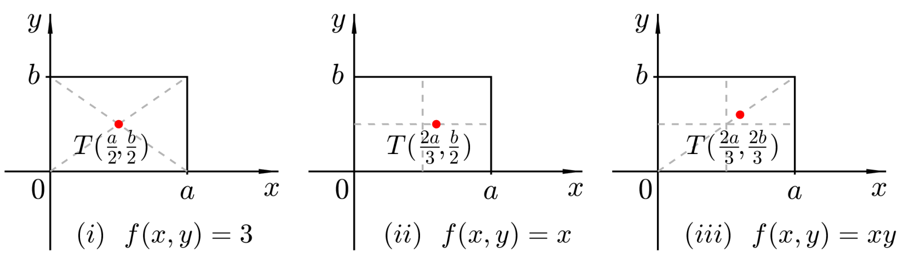
$$x_T = \frac{\int\int_D xf(x,y)dxdy}{m} = \frac{\int_0^a [\int_0^b x \cdot x \cdot dy]dx}{\frac{a^2b}{2}} = \frac{\int_0^a [x^2y \mid_{y=0}^{y=b}]dx}{\frac{a^2b}{2}}$$
$$= \frac{\int_0^a bx^2 dx}{\frac{a^2b}{2}} = \frac{\frac{a^3b}{3}}{\frac{a^2b}{2}} = \frac{2a}{3}$$
$$y_T = \frac{\int\int_D yf(x,y)dxdy}{m} = \frac{\int_0^a [\int_0^b x \cdot y \cdot dy]dx}{\frac{a^2b}{2}} = \frac{\int_0^a [\frac{xy^2}{2} \mid_{y=0}^{y=b}]dx}{\frac{a^2b}{2}}$$
$$= \frac{\int_0^a \frac{b^2x}{2} dx}{\frac{a^2b}{2}} = \frac{\frac{b^2a^2}{2}}{\frac{a^2b}{2}} = \frac{b}{2}.$$

Vidimo da je rezultat u skladu s predviđanjima iz Primjera 11.1 (4) jer je $\frac{2a}{3} > \frac{a}{2}$.

(iii)

$$x_T = \frac{\int\int_D xf(x,y)dxdy}{m} = \frac{\int_0^a [\int_0^b x \cdot xy \cdot dy]dx}{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{\int_0^a [x^2\frac{y^2}{2} \mid_{y=0}^{y=b}]dx}{\frac{a^2b^2}{4}}$$
$$= \frac{\int_0^a \frac{b^2}{2}x^2 dx}{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{\frac{a^3b^2}{6}}{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{2a}{3}$$
$$y_T = \frac{\int\int_D yf(x,y)dxdy}{m} = \frac{\int_0^a [\int_0^b y \cdot xy \cdot dy]dx}{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{\int_0^a [x\frac{y^3}{3} \mid_{y=0}^{y=b}]dx}{\frac{a^2b^2}{4}}$$
$$= \frac{\int_0^a \frac{b^3}{3} x dx}{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{\frac{a^2b^3}{6}}{\frac{a^2b^2}{4}} = \frac{2b}{3}.$$

Rezultati su predočeni na Slici 11.8. Prokomentirajte te rezultate.



Slika 11.8: Primjer 11.3 - položaj težišta T

□

Analogne formule vrijede kako za masu tako i za težište područja u prostoru omeđenog zatvorenom plohom (poput kugle, elipsoida i sl.). Razlika je u tome što umjesto dvostrukog treba koristiti trostruki integral, a težište ima tri koordinate. To ovdje nećemo provoditi.

11.4 PRIMJENA MATLAB-A

11.4.1 Računanje mase i težišta nehomogenog područja u ravnini

Pomoću naredbe `int` riješit ćemo Primjer 11.2 s time da ćemo, osim mase, izračunati i težište (Zadatak 7 iz 11.5):

```
syms x y
f(x, y) = exp(-(x^2 + y^2)/2)
m = int(int(f(x, y), x, -Inf, Inf), y, -Inf, Inf)     % 2*pi
x_T = int(int(x*f(x, y), x, -Inf, Inf), y, -Inf, Inf)    % 0
y_T = int(int(y*f(x, y), x, -Inf, Inf), y, -Inf, Inf)    % 0
```

Vidimo da se rezultat za masu podudara s onima iz Primjera 11.2, dok je rezultat da se težište nalazi u $(0, 0)$ očekivan.

11.5 PITANJA I ZADATCI

1. Na krugu polumjera R sa središtem u ishodištu raspoređena je masa s funkcijom gustoće $f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}$.
   (i) Detektirajte krivulje po kojima funkcija gustoće stalna.
   (ii) Odredite ukupnu masu.
2. Odredite težište mase iz Zadatka 1:
   (i) koristeći se fizikalnom intuicijom (bez računanja)
   (ii) analizirajući funkcije $xf(x, y)$ i $yf(x, y)$ na području D, ali bez računanja integrala
   (iii) računanjem pripadnih integrala.

   Uputa: za (ii) se sjetite značenja dvostrukog integrala, kako za pozitivne, tako i za negativne funkcije. Za (iii) je dovoljno računati integrale u brojniku.
3. Neka je D kružni odsječak zadan nejednadžbama: $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$ i $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$, s funkcijom gustoće mase kao u Zadatku 1.
   (i) Odredite masu i težište područja D. Težište najprije procijenite.
   (ii) Koristeći (i), napišite izraze za masu i težište ako je D zadano nejednadžbama $0 < r \leqslant R$ i $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$.

Uputa: kod procjene procjenjujte polarne koordinate.

4. Bez daljnjeg računanja, koristeći se samo Zadatkom 3 (i), napišite izraze za masu i za težište područja D zadanog nejednadžbama $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$ i $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$.

5. Koja je prosječna gustoća pojedinih područja iz prethodnih zadataka? Drugim riječima, koju gustoću ima pojedino područje uz pretpostavku da je homogeno, a da mu ukupna masa bude jednaka kao i prije?

6. Područje D jednom ima funkciju gustoće $f(x, y)$, a drugi put $g(x, y) := cf(x, y)$ za neku pozitivnu konstantu c. Odredite vezu, kako između masa, tako i između težišta tih područja. Najprije odgovorite na osnovi fizikalne intuicije, a poslije provjerite računanjem. Komentirajte.

7. Odredite težište područja D iz Primjera 11.2 na načine kako je postupljeno u Zadatku 2.

8. Iz fizikalnih pokusa naslućuje se da je težište tankog homogenog trokuta u matematičkom težištu (sjecištu težišnica). Potvrdite to računanjem.
   Uputa: stavite $A(0, 0)$, $B(b, 0)$ i $C(c, d)$ za vrhove trokuta, uz $b, d \neq 0$. Nacrtajte sliku za $b, c, d > 0$ i $c < b$. Pri integriranju trokut treba rastaviti na dva trokuta.

12 OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE PRVOG REDA

U lekciji se sustavno rješavaju obične linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda i komentira njihova uloga u primjenama. Podsjeća se na diferencijalne jednadžbe koje smo obrađivali u Lekciji 2, koje su poseban slučaj ovakvih jednadžba:

1. jednadžbu radioaktivnog raspada
2. jednadžbu hlađenja (odnosno zagrijavanja) tijela.

Pojam *diferencijalna* naznačuje da je riječ o jednadžbi u kojoj se pojavljuje derivacija, pojam *obična* da je derivacija funkcije jedne varijable (za razliku od parcijalne), a *prvog reda* da se ne pojavljuju druge derivacije niti derivacije višeg reda.

12.1 PRIPADNI PROBLEM

Ako imamo dvije zavisne varijable, recimo x i y, onda je temeljni problem određivanje analitičke veze među njima. U prirodnim znanostima i u inženjerstvu, tom se problemu pristupa eksperimentalno. Često se iz eksperimentalnih podataka ne može naslutiti izravna veza među tim veličinama, ali se može naslutiti veza između x, y i y', gdje je y' brzina promjene veličine y s obzirom na promjenu veličine x, $y' := \frac{dy}{dx}$.
Na primjer, kako smo već vidjeli u Lekciji 2, eksperimentalno se da naslutiti veza $y' = -ky$, gdje je t vrijeme, y količina radioaktivne materije i $y' := \frac{dy}{dt}$. Tu je kao nezavisna varijabla, umjesto x, varijabla t.
Vidjeli smo kako se iz diferencijalne jednadžbe može odrediti količina radioaktivne materije $y(t)$ za svaki t, uz uvjet da znamo početnu količinu $y(0)$ i koeficijent k koji je karakteristika materije. Općenito, sve se odvija prema shemi iz Slike 12.1.

12.2 POTREBNO PREDZNANJE

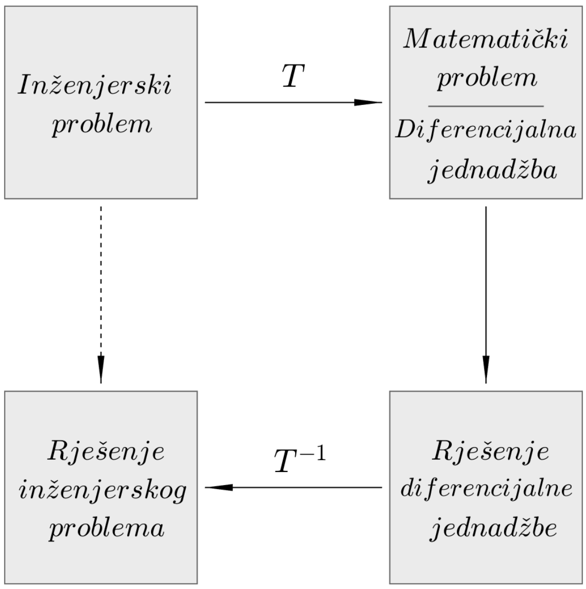
Potrebno je poznavati pojam derivacije prvog reda i pojam neodređenog integrala.
Također je potrebno poznavati fizikalnu interpretaciju prve derivacije kao brzine. Dakle, ako su dvije veličine x i y povezane relacijom $y = f(x)$, onda se brzina promjene veličine y s obzirom na promjenu veličine x opisuje derivacijom $f'(x)$ funkcije f po x, odnosno s $\frac{df}{dx}$. To

se kratko zapisuje i kao y', odnosno $\frac{dy}{dx}$. Ako s $v(x)$ označimo brzinu promjene od y s obzirom na promjenu x, onda je

$$v(x) := y'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Za razumijevanje te fizikalne interpretacije treba poznavati činjenicu da je

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$



Slika 12.1: Veze između inženjerskog i matematičkog problema

12.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

12.3.1 Pojam obične diferencijalne jednadžbe prvog reda

Pojam obične diferencijalne jednadžbe prvog reda djelomično smo upoznali u Lekciji 2. Polazi se od dviju zavisnih veličina x i y te brzine od y s obzirom na x, tj. $y' := \frac{dy}{dx}$. Ako gledamo promjenu veličine y u vremenu t, onda se koriste oznake t, y i $y' := \frac{dy}{dt}$, ili, za promjenu veličine x u vremenu t, oznake t, x i $x' := \frac{dx}{dt}$, itd.
Obična diferencijalna jednadžba prvog reda je analitička veza između x, y i y', što zapisujemo kao

$$F(x, y, y') = 0.$$

Primjer 12.1. [Primjeri običnih diferencijalnih jednadžba prvog reda]

(i) $y' = -ky, \quad k \in \mathbb{R}$

(ii) $y' = -k(y - g(x)), \quad k \in \mathbb{R}$, g funkcija

(iii) $g(y)y' = -k\sqrt{y}, \quad k \in \mathbb{R}$, g funkcija

(iv) $\frac{dy}{dt} = ky(M - y), \quad k, M \in \mathbb{R}$

(v) $y' - 3(x^2 + 1)y = e^x$

(vi) $y'^2 y - x \sin y + e^{y'} = 0$

(vii) $2yy' = 1$.

Napomenimo:

(i) ako je parametar k pozitivan, to je diferencijalna jednadžba raspada (ali i genetske mutacije)

(ii) ako je k pozitivan, to je tipa diferencijalne jednadžbe hlađenja

(iii) ako je k pozitivan, to je tipa diferencijalne jednadžbe istjecanja tekućine

(iv) ako su k i M pozitivni, to je tipa diferencijalne jednadžbe logističkog rasta

(v)-(vii) nemaju neko jasno fizikalno značenje.

Uočimo da se y' pojavljuje u svim jednadžbama, dok se y i x (odnosno t) ne moraju pojaviti. □

Riješiti običnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda znači iz jednadžbe eliminirati derivaciju y' tako da ostanu samo x i y, što nam i treba jer tražimo vezu između njih.

Primjer 12.2. [Rješenje diferencijalne jednadžbe]
Riješimo diferencijalnu jednadžbu

$$(x^2 + 1)y' - 2xy = 0.$$

Rješenje provodimo tzv. metodom **separacije varijabla**, tj. odjeljivanjem y i x:

(1) Umjesto y' stavljamo $\frac{dy}{dx}$:

$$(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

(2) Varijablu y stavljamo na lijevu stranu, a x na desnu:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x}{x^2 + 1} dx$$

(3) Integriramo posebno lijevu, a posebno desnu stranu:

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx$$
$$\ln |y| = \ln(x^2 + 1) + \ln C,$$

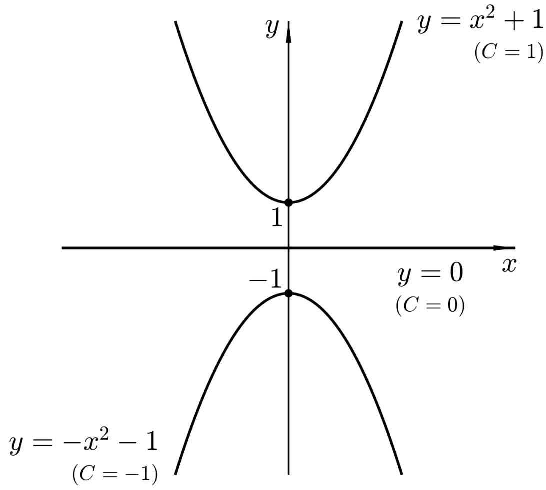
uz $C > 0$. Tu smo konstantu zapisali kao $\ln C$ jer će nam tako konačni zapis biti skladniji. Time je derivacija eliminirana i ovo možemo smatrati rješenjem, ali poželjno je rješenje pojednostaviti.

(4)

$$\begin{aligned} \ln|y| &= \ln[C(x^2+1)] \\ |y| &= C(x^2+1) \\ y &= \pm C(x^2+1) \\ y &= C(x^2+1). \end{aligned}$$

U posljednjoj smo jednadžbi $\pm C$ zamijenili s C, s tim da je sad C bilo koji realan broj. Naime, dodali smo i $C = 0$ jer je $y = 0$ rješenje početne jednadžbe, što se može provjeriti uvrštavanjem.
□

Rješenje $y = C(x^2+1)$, $C \in \mathbb{R}$ iz Primjera 12.2 zovemo **općim rješenjem** jer se u njemu pojavljuje neodređena konstanta C. **Partikularno rješenje** jest svako konkretno rješenje, tj. rješenje u kojemu je specificirana vrijednost konstante C. Na primjer, uvrštavanjem redom $C = 0$, $C = 1$, $C = -1$, dobiju se partikularna rješenja $y = 0$, $y = x^2+1$, $y = -x^2-1$, prikazana na Slici 12.2.



Slika 12.2: Primjer 12.2 - prikaz nekih partikularnih rješenja

Cauchyjev problem prvog reda je sustav diferencijalne jednadžbe prvog reda i početnog uvjeta, tj. vrijednosti veličine y za $x = 0$ ili za neku drugu konkretnu vrijednost x_0 veličine x:

$$\begin{aligned} F(x, y, y') &= 0 \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Cauchyjev problem, uz određene prirodne uvjete, ima *jedinstveno* rješenje. Naime, iz početnog uvjeta možemo odrediti konstantu C.

Primjer 12.3. [Cauchyjev problem prvog reda]
Riješimo Cauchyjev problem

$$\begin{aligned} (x^2+1)y' - 2xy &= 0 \\ y(0) &= 2. \end{aligned}$$

Vidjeli smo da je opće rješenje gornje diferencijalne jednadžbe

$$y = C(x^2+1),\ C \in \mathbb{R}.$$

Uvrštavajući početni uvjet, dobijemo $2 = C(0^2+1)$, dakle $C = 2$, pa je konačno rješenje

$$y = 2x^2+2.$$

□

12.3.2 Obična linearna diferencijalna jednadžba prvog reda

To je takva jednadžba u kojoj se y' i y pojavljuju kao *linearne* funkcije odvojeno jedna od druge. Dakle, pojam *linearan* odnosi se na y i y' a ne na x.

Općenito, **linearna diferencijalna jednadžba prvog reda** može se zapisati kao

$$y' - h(x)y = g(x),$$

gdje su h i g realne funkcije. Ako je $g = 0$, jednadžba je **homogena**, inače je nehomogena.

Primjer 12.4. [Primjeri običnih linearnih diferencijalnih jednadžba prvog reda]
U Primjeru 12.1 linearne su diferencijalne jednadžbe (i), (ii), (iv) i (v). Pritom su (i) i (iv) homogene, dok su (v) i (ii) nehomogene (osim ako je $k = 0$).
Jednadžba (iii) nije linearna jer se pojavljuje $\sqrt{y}$ dok (vi) nije linearna iz više razloga: pojavljuje se $\sin y$, ali i $e^{y'}$ te y'^2. Jednadžba (vii) nije linearna iako se, naizgled y i y' javljaju kao linearne. Naime, kad se razdvoje, dobije se $y' = \frac{1}{2y}$. □

Primjer 12.5. [Primjer obične linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda]
Jednadžba iz Primjera 12.2 može se napisati u ekvivalentnom obliku

$$y' - \frac{2x}{x^2+1}y = 0.$$

Zato je ona linearna, uz $h(x) := \frac{2x}{x^2+1}$. □

Opće rješenje homogene jednadžbe $y' - h(x)y = 0$

Homogenu jednadžbu iz Primjera 12.2 riješili smo metodom separacije, a tako možemo riješiti i bilo koju homogenu jednadžbu:

$$\begin{aligned} y' - h(x)y &= 0 \\ \frac{dy}{y} &= h(x)dx \\ y &= Ce^{H(x)}, \end{aligned}$$

gdje je $C \in \mathbb{R}$, a H je neka primitivna funkcija funkcije h, tj. $H' = h$.

Opće rješenje nehomogene jednadžbe $y' - h(x)y = g(x)$

Nehomogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda

$$y' - h(x)y = g(x)$$

rješavamo u koracima:

(1) Riješi se pripadna homogena jednadžba

$$y' - h(x)y = 0.$$

Dobije se

$$y = Ce^{H(x)}, \ C \in \mathbb{R},$$

gdje je H primitivna funkcija funkcije h.

(2) Rješenje nehomogene jednadžbe traži se u obliku

$$y = C(x)e^{H(x)},$$

dakle tako da se u rješenju homogene jednadžbe umjesto konstante C uvrsti *funkcija* $C(x)$. Daljnji postupak objašnjavamo primjerom.

Primjer 12.6. [Rješenje nehomogene linearne diferencijalne jednadžbe] Riješimo diferencijalnu jednadžbu

$$(x^2 + 1)y' - 2xy = 2x(x^2 + 1)^2.$$

Jednadžba se može zapisati kao

$$y' - \frac{2x}{x^2 + 1}y = 2x(x^2 + 1),$$

koja je nehomogena linearna diferencijalna jednadžba.

(1) Pripadna je homogena jednadžba

$$y' - \frac{2x}{x^2 + 1}y = 0,$$

što je samo drukčije zapisana jednadžba iz Primjera 12.2. Zato joj je rješenje $y = C(x^2 + 1)$, $C \in \mathbb{R}$.

(2) Rješenje nehomogene jednadžbe tražimo u obliku

$$y = C(x)(x^2 + 1).$$

Deriviranjem dobijemo

$$y' = C'(x)(x^2 + 1) + 2xC(x).$$

Uvrštavanjem tih dviju relacija u nehomogenu jednadžbu dobijemo

$$C'(x)(x^2+1) + 2xC(x) - \frac{2x}{x^2+1} \cdot C(x)(x^2+1) = 2x(x^2+1)$$
$$C'(x)(x^2+1) = 2x(x^2+1)$$
$$C'(x) = 2x$$
$$C(x) = x^2 + K, \ K \in \mathbb{R}.$$

Uvrštavajući dobiveni izraz za $C(x)$ u $y = C(x)(x^2+1)$, dobijemo konačno rješenje

$$y = (x^2+K)(x^2+1), \ K \in \mathbb{R}.$$

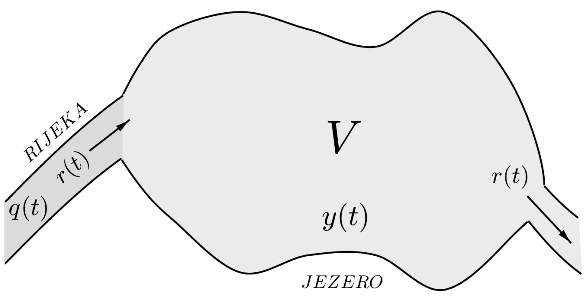
Izravna provjera pokazuje da je to zaista rješenje. □

Diferencijalne jednadžbe prvog reda imaju važnu ulogu u modeliranju prirodnih fenomena. To ćemo ilustrirati primjerom matematičkog modeliranja zagađivanja (primjer modeliranja *linearnom* diferencijalnom jednadžbom) te modeliranja dinamike neke populacije u izoliranom staništu (primjer modeliranja *nelinearnom* diferencijalnom jednadžbom).

12.3.3 Modeliranje prirodnih fenomena pomoću običnih linearnih diferencijalnih jednadžba prvog reda

Primjer 12.7. [Modeliranje zagađivanja]
Zagađena voda iz rijeke utječe u jezero (Slika 12.3). Treba modelirati promjenu koncentracije zagađivača u jezerskoj vodi. To ćemo provesti uz neke idealizacije i pojednostavljenja. Neka je t vrijeme i:

- y koncentracija zagađivača u jezeru, tj. količina zagađivača na jedinicu obujma. Ona ovisi o vremenu, ali nam je ta ovisnost nepoznata.
- $q(t)$ koncentracija zagađivača u rijeci u trenutku t
- $r(t)$ brzina protoka vode u jezero u trenutku t, a ujedno i brzina istjecanja iz jezera
- V stalni volumen vode u jezeru. Volumen je stalan jer smo pretpostavili da jednakim brzinama voda utječe u jezero kao i što istječe iz njega.



Slika 12.3: Primjer 12.7

Razmotrimo brzinu promjene $\frac{dy}{dt}$ koncentracije zagađivača u jezerskoj vodi. Ako je $\frac{dy}{dt} > 0$ u nekom trenutku t, zagađenje se povećava, a ako je $\frac{dy}{dt} < 0$, ono se smanjuje. Intuitivno je jasno da dva puta veća koncentracija $q(t)$ uzrokuje dva puta brže zagađivanje. Također, dva puta veće brzina $r(t)$ uzrokuje dva puta brže zagađivanje. Analognim razmišljanjem dolazimo do toga da bi diferencijalna jednadžba

$$\frac{dy}{dt} = \frac{r(t)}{V}q(t) - \frac{r(t)}{V}y$$

bila prikladna za modeliranje ovog fenomena. Prvi je pribrojnik utjecaj ulaska, a drugi izlaska vode iz jezera. Dijelili smo s V da bi izraz imao značenje koncentracije. Ta se diferencijalna jednadžba može napisati u obliku

$$\frac{dy}{dt} + \frac{r(t)}{V}y = \frac{r(t)}{V}q(t).$$

Vidimo da je riječ o običnoj linearnoj diferencijalnoj jednadžbi prvog reda, gdje je $h(t) := -\frac{r(t)}{V}$ i $g(t) = \frac{r(t}{V}q(t)$.
Da bi se ovom diferencijalnom jednadžbom mogao modelirati konkretan problem, sama jednadžba mora biti konkretna, što znači da bi trebalo znati, odnosno procijeniti funkcije $r(t)$, $q(t)$ i konstantu V. Također, potrebno je poznavanje koncentracije zagađivača u nekom trenutku - početnog uvjeta $y(0)$. To i jesu najvažniji i najizazovniji, kako matematički tako i inženjerski, problemi.
Napomenimo još da smo pri modeliranju pretpostavili da koncentracija y zagađivača u jezeru ovisi samo o t, a ne i o položaju u jezeru (dobra izmiješanost). To je nerealna pretpostavka u nekontroliranim uvjetima. Ipak, ovo je idealiziranje osnova drugih, realnijih modeliranja fenomena zagađivanja. □

12.3.4 Modeliranje prirodnih fenomena pomoću običnih nelinearnih diferencijalnih jednadžba prvog reda

Neka y označava količinu ili, kako je uobičajenije, koncentraciju jedinki u staništu. Tu veličinu također smatramo kontinuiranom kao i vrijeme t. Polazi se od idealne situacije pri kojoj se pretpostavlja da su resursi staništa neograničeni. Tada će se populacija razvijati uz stalnu prirodnu stopu rasta $k > 0$. To znači da će biti

$$\frac{dy}{dt} = ky.$$

Ta se jednadžba opravdava analogno kao i diferencijalna jednadžba radioaktivnog raspada iz Lekcije 2, samo što je tamo k bio koeficijent raspadljivosti i predznak negativan. Ona bi mogla, bar približno, dobro opisivati brzinu procesa na početku, ako bi se u prazno stanište nasadilo mali broj jedinki. Došlo bi do ubrzanog rasta, a nakon nekog vremena ponestalo bi resursa (prostora i hrane) pa bi rast postao usporen i konačno se zaustavio. Zato treba korigirati gornju diferencijalnu jednadžbu uključujući limitirajući parametar $K > 0$. Tako se dolazi do tzv. **logističke diferencijalne jednadžbe**

$$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

Parametar K zove se *nosivi kapacitet* (granica preko koje veličina y ne može rasti). Korigirajući faktor $1 - \frac{y}{K}$ usporava brzinu $\frac{dy}{dt}$ jer se približava nuli kako se y približava K.

Primjer 12.8. [Rješenje logističke diferencijalne jednadžbe]
Separacijom varijabla dolazi se do

$$\frac{K dy}{y(K-y)} = k dt$$
$$\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-K}\right) dy = k dt.$$

Veličina y po definiciji je pozitivna pa se integriranjem dobije

$$\ln y - \ln|y-K| = kt + \ln C,$$

gdje je C pozitivna konstanta. Uz dodatnu pretpostavku $y < K$ vrijedi $|y-K| = K - y$ pa se dobije

$$\ln\frac{y}{K-y} = kt + C.$$

Djelovanjem eksponencijalne funkcije, sad se dobije

$$\frac{y}{K-y} = Ce^{kt},$$

a rješavanjem te jednadžbe po y

$$y(t) = \frac{KCe^{kt}}{1+Ce^{kt}}.$$

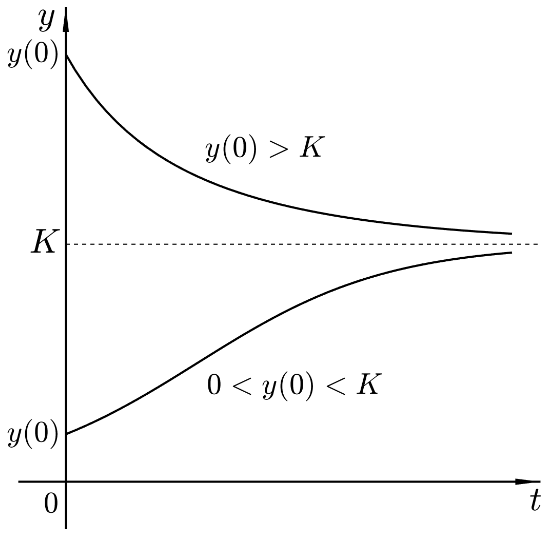
Tu smo stavili $y(t)$ da naglasimo da y ovisi o t. Uvrštavanjem $t = 0$ u $\frac{y}{K-y} = Ce^{kt}$, dobije se

$$C = \frac{y(0)}{K - y(0)}.$$

Graf (Slika 12.4) pokazuje da y raste od $y(0)$ prema nosivom kapacitetu K.
Logističku jednadžbu ima smisla razmatrati i za $y > K$, kada intuitivno očekujemo da će y padati prema nosivom kapacitetu K. Sad se iz $\ln y - \ln|y-K| = kt + \ln C$ dobije $\ln\frac{y}{y-K} = kt + C$, odnosno $\frac{y}{y-K} = Ce^{kt}$, a odavde $y(t) = \frac{-KCe^{kt}}{1-Ce^{kt}}$. Ako C zamijenimo s $-C$, opet dolazimo do formule

$$y(t) = \frac{KCe^{kt}}{1+Ce^{kt}}.$$

Zaključujemo da je to rješenje diferencijalne jednadžbe kako za $0 < y(0) < K$, tako i za $y(0) > K$, samo što je za prvi slučaj $C > 0$, za drugi $C < 0$, a za oba slučaja vrijedi jedinstvena formula $C = \frac{y(0)}{K-y(0)}$, Slika 12.4.



Slika 12.4: Primjer 12.8 - prikaz rješenja logističke diferencijalne jednadžbe

□

12.4 PRIMJENA MATLAB-A

12.4.1 Rješavanje običnih linearnih diferencijalnih jednadžba prvog reda. Naredba `dsolve`

U Lekciji 2 već smo upoznali naredbu `dsolve` za rješavanje diferencijalnih jednadžba. Pokažimo kako se pomoću `dsolve` rješava diferencijalna jednadžba iz Primjera 12.2:

```
syms y(x)
jednadzba = (x^2 + 1)*diff(y) - 2*x*y == 0
dsolve(jednadzba)                              % C1*(x^2 + 1)
```

U rješenju se pojavljuje neodređena konstanta, oznaka C1, kako i treba biti. Pomoću `dsolve` može se riješiti i pripadni Cauchyjev problem, kao u Primjeru 12.3:

```
syms y(x)
jednadzba = (x^2 + 1)*diff(y) - 2*x*y == 0
uvjet = y(0) == 2
dsolve(jednadzba, uvjet)                         % 2*x^2 + 2
```

Naredba `dsolve` rješava i mnoge nehomogene diferencijalne jednadžbe, kao u slučaju diferencijalne jednadžbe iz Primjera 12.6:

```
syms y(x)
```

```
jednadzba = (x^2 + 1)*diff(y) - 2*x*y == 2*x*(x^2 + 1)^2
dsolve(jednadzba)            % x^2*(x^2 + 1) + C1*(x^2 + 1)
simplify(dsolve(jednadzba))          % (x^2 + 1)*(x^2 + C1)
```

12.4.2 Rješavanje običnih diferencijalnih jednadžba prvog reda koje sadrže parametre

Pokažimo kako se pomoću `dsolve` rješava logistička diferencijalna jednadžba iz Primjera 12.8. To je *nelinearna* diferencijalna jednadžba s parametrima. Kod rješenja se pretpostavlja da je $y > 0$:

```
syms k K y0 y(t)
jednadzba = diff(y) == k*y*(1 - y/K)
rjesenje = simplify(dsolve(jednadzba))
```

```
rjesenje = (K*exp(k*t + C1*K))/(exp(k*t + C1*K) + 1)
```

Naredbom `dsolve` može se riješiti i pripadni Cauchyjev problem:

```
jednadzba = diff(y) == k*y*(1 - y/K)
uvjet = y(0) == y0
rjesenje_Cauchy = simplify(dsolve(jednadzba, uvjet))
```

```
rjesenje_Cauchy = (K*y0*exp(k*t))/(K - y0 + y0*exp(k*t))
```

Nije teško provjeriti da je rješenje dobiveno pomoću `dsolve` ekvivalentno onome kojeg smo naveli u Primjeru 12.8.

12.5 PITANJA I ZADATCI

1. (i) Riješite diferencijalnu jednadžbu $\frac{dy}{dt} = ky$ za $k > 0$ i predočite rješenje za razne k. Usporedite s rješenjem jednadžbe radioaktivnog raspada $\frac{dy}{dt} = -ky$ za $k > 0$.

   (ii) Obrazložite zašto je ova prva jednadžba eksponencijalnog rasta i zašto se k zove stopa rasta.

   Uputa: intuitivno, stopa rasta $k = 0.1$ znači da se količina y u jedinici vremena približno povećala za $0.1 \cdot y$, odnosno za 10 posto.

2. (i) Analogno vremenu poluraspada definira se vrijeme udvostručenja T kod eksponencijalnog rasta iz Zadatka 1. Odredite T u ovisnosti o stopi rasta k.
   Uputa: pođite od rješenja diferencijalne jednadžbe eksponencijalnog rasta: $y = y(0)e^{kt}$.

   (ii) Izračunajte vrijeme udvostručenja za bakteriju ako joj je stopa rasta $k = 60$, kao i za virus, ako mu je stopa rasta $k = 300$. Ove stope odnose se na vrijeme u danima. Rezultate izrazite u minutama.

3. (i) Obrazložite kako se u diferencijalnu jednadžbu $\frac{dy}{dt} - ay = 0$, gdje je a realan parametar, uklapaju diferencijalne jednadžbe iz Zadatka 1. Za kakve a nastaje pojedina od njih? Je li ova diferencijalna jednadžba linearna? Je li homogena?
   Uputa: parametar a može se shvatiti kao stopa rasta, odnosno stopa raspada, ovisno o predznaku. Posebno razmotrite $a = 0$.

   (ii) Što dobijete ako u (i) umjesto parametra a stavite funkciju $h(t)$? Komentirajte to u smislu da ovdje, umjesto stalne stope rasta/raspada, imate promjenjivu.

4. (i) Komentirajte diferencijalnu jednadžbu iz Primjera 12.7 ako je funkcija $q(t) := 0$. Što to znači u terminima zagađenja?

   (ii) Slično pitanje kao u (i), samo sad uz uvjet $r(t) := 0$.

5. (i) Prema analogiji s Primjerom 12.7 formirajte diferencijalnu jednadžbu zagađivanja u slučaju kad jednom brzinom voda utječe, a drugom istječe iz jezera.
   Uputa: umjesto $r(t)$, sad su funkcije $r_1(t)$ i $r_2(t)$ utjecanja, odnosno istjecanja iz jezera. Treba paziti gdje će se koja staviti, a također, da umjesto konstante V, treba biti funkcija $V(t)$. Komentirajte jednadžbu.

   (ii) Uz koje će uvjete jednadžba iz (i) biti homogena?

6. Generalizirajte jednadžbu iz Zadatka 3 (i) tako da umjesto parametra a stavite neku funkciju ovisnu o y, a ne o t (kao u Zadatku 3 (ii)). Pokušajte obrazložiti kakve bi prirodne fenomene mogli modelirati takvim diferencijalnim jednadžbama.

7. (i) Razmotrite diferencijalnu jednadžbu $\frac{dy}{dt} = ay\left(1 - \frac{y}{L}\right)$, gdje su a i L realni parametri. Uklapa li se ta jednadžba u prethodni zadatak?

   (ii) Riješite jednadžbu iz (i) i nacrtajte sliku za $a = 0.05$ i $L = 10$, uz početni uvjet $y(0) = 1$.
   Uputa: jednadžbu riješite separacijom varijabla. Ovdje je riječ o logističkoj jednadžbi pa se o njoj možete informirati iz drugih izvora.

13 OBIČNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE DRUGOG REDA

U lekciji se sustavno rješavaju obične linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima i komentira njihova uloga u primjenama. Posebno se podsjeća na diferencijalne jednadžbe gibanja po pravcu pri djelovanju stalne sile (vertikalni hitac) i titranja (gibanje po pravcu uz djelovanje sile usmjerene prema ishodištu i po intenzitetu proporcionalne udaljenosti od ishodišta).
Pojam *drugog reda* odnosi se na to da se pojavljuju druge derivacije, ali ne derivacije trećeg ili višeg reda.

13.1 PRIPADNI PROBLEM

Ako imamo dvije zavisne varijable, recimo x i y, onda je temeljni problem određivanje analitičke veze među njima. U prirodnim znanostima i u inženjerstvu, tom se problemu pristupa eksperimentalno. Često se iz eksperimentalnih podataka ne može naslutiti izravna veza među tim veličinama, ali se može naslutiti veza između x, y, y' i y'', gdje je y' brzina promjene veličine y s obzirom na promjenu veličine x, dakle $y' := \frac{dy}{dx}$, a y'' akceleracija te promjene, dakle $y'' := \frac{d^2y}{dx^2}$.
Ako razmatramo vremenski proces onda obično imamo varijable t (za vrijeme) i y ili x (za položaj, količinu i sl.). Tada je $y' := \frac{dy}{dt}$ itd.

13.2 POTREBNO PREDZNANJE

Potrebno je poznavati pojam derivacije prvog i drugog reda i pojam neodređenog integrala. Također je potrebno poznavati fizikalnu interpretaciju prve derivacije kao brzine i druge derivacije kao akceleracije te vezu sile i akceleracije.
Podsjetimo, ako su dvije veličine x i y povezane relacijom $y = f(x)$, onda se brzina promjene veličine y s obzirom na promjenu veličine x opisuje derivacijom $f'(x)$ funkcije f po x, tj. s $\frac{df}{dx}$, što se zapisuje kratko i kao y' odnosno $\frac{dy}{dx}$.
Akceleracija (ubrzanje) te promjene opisuje se drugom derivacijom $f''(x)$ funkcije f po x, tj. s $\frac{d^2f}{dx^2}$, što se zapisuje kratko i kao y'' odnosno $\frac{d^2y}{dx^2}$. Dalje, sila je proporcionalna akceleraciji, pri čemu je masa koeficijent proporcionalnosti (nakon usklađivanja jedinica).

13.3 NOVE DEFINICIJE I TVRDNJE S PRIMJERIMA

13.3.1 Pojam obične diferencijalne jednadžbe drugog reda

Pojam smo djelomično upoznali u Lekciji 2. Polazi se od dviju zavisnih veličina x i y, brzine od y s obzirom na x, tj. $y' := \frac{dy}{dx}$ te akceleracije od y s obzirom na x, tj. $y'' := \frac{d^2y}{dx^2}$.
Umjesto x i y često se, pri vremenskim procesima, koriste oznake t, y, y' i y'', gdje je $y' := \frac{dy}{dt}$ i $y'' := \frac{d^2y}{dt^2}$.

Obična diferencijalna jednadžba drugog reda je analitička veza između x, y, y' i y'', što zapisujemo kao

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

Primjer 13.1. [Primjeri običnih diferencijalnih jednadžba drugog reda]

(i) $y'' = a, \quad a \in \mathbb{R}$

(ii) $y'' + \omega^2 y = 0, \quad \omega > 0$

(iii) $y'' + py' + qy = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}$

(iv) $y'' + py' + qy = g(x), \quad p, q \in \mathbb{R}$, g funkcija

(v) $y'' - 3(x^2 + 1)y' + xy = e^x$

(vi) $y''^2 y - x \sin y + e^{y'} = 0$

(vii) $2yy'' = 1$.

Napomenimo:

(i) je diferencijalna jednadžba gibanja po pravcu pri djelovanju stalne sile

(ii) je diferencijalna jednadžba titranja uz uvjet $\omega \neq 0$. Ako je $\omega = 0$, onda je to diferencijalna jednadžba iz skupine (i)

(iii)-(iv) su opća homogena i nehomogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima, a mnoge od njih imaju jasna fizikalna značenja

(v)-(vii) nemaju jasna fizikalna značenja.

Uočite da se u jednadžbama ne mora pojaviti ni x ni y ni y', ali y'' mora. $\square$

Riješiti diferencijalnu jednadžbu drugog reda znači iz jednadžbe eliminirati derivacije y' i y'' tako da ostanu samo x i y, što nam i treba jer tražimo vezu između njih.

Primjer 13.2. [Rješenje diferencijalne jednadžbe]
Riješimo diferencijalnu jednadžbu

$$y'' = a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Rješenje provodimo uzastopnim integriranjem, tj. tako da najprije odredimo y' a potom y. Neka je varijabla po kojoj se derivira t:

(1) Integriranjem jednadžbe $y'' = a$, tj. $(y')' = a$, dobijemo $y' = at + C_1$ za neodređenu realnu konstantu C_1.

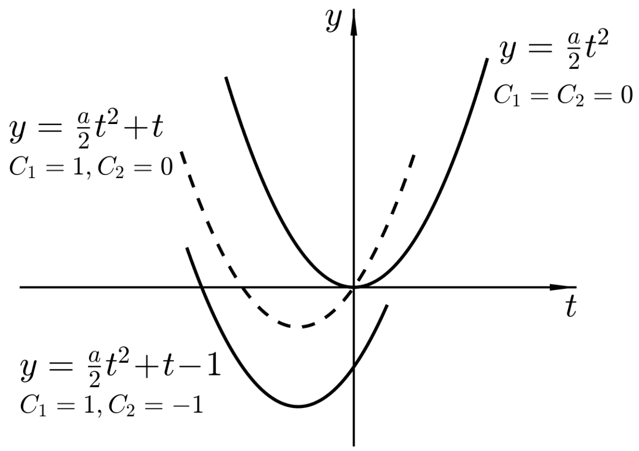
(2) Integriranjem jednadžbe $y' = at + C_1$ dobijemo

$$y = \frac{a}{2}t^2 + C_1 t + C_2$$

za neodređenu realnu konstantu C_2. To je **opće rješenje** početne diferencijalne jednadžbe. □

Uočimo dvije neodređene konstante C_1 i C_2 u općem rješenju, koje možemo birati po volji. Tako je i općenito za opće rješenje svake obične diferencijalne jednadžbe drugog reda (za one prvog reda je jedna neodređena konstanta, za one trećeg reda su tri konstante itd.).

Partikularno rješenje jest svako konkretno rješenje, tj. rješenje u kojemu su specificirane konstante C_1, C_2. Na primjer, za redom $C_1 = C_2 = 0$, $C_1 = 1$ i $C_2 = 0$, $C_1 = 1$ i $C_2 = -1$, dobiju se partikularna rješenja $y = \frac{a}{2}t^2$, $y = \frac{a}{2}t^2 + t$ i $y = \frac{a}{2}t^2 + t - 1$, prikazana na Slici 13.1.



Slika 13.1: Primjer 13.2 - prikaz nekih partikularnih rješenja za $a > 0$

Cauchyjev problem drugog reda jest sustav diferencijalne jednadžbe drugog reda i dvaju početnih uvjeta, tj. vrijednosti veličina y i y' za $x = 0$ ili za neku drugu konkretnu vrijednost veličine x:

$$\begin{aligned} F(x, y, y', y'') &= 0 \\ y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= v_0. \end{aligned}$$

Cauchyjev problem, uz neke prirodne uvjete, ima *jedinstveno* rješenje. Naime, iz početnih uvjeta možemo odrediti konstante C_1 i C_2. To ćemo ilustrirati primjerom povezanim s prethodnim.

Primjer 13.3. [Cauchyjev problem drugog reda]
Riješimo Cauchyjev problem

$$\begin{aligned} y'' &= a \\ y(0) &= y_0 \\ y'(0) &= v_0. \end{aligned}$$

Vidjeli smo u Primjeru 13.2 da je opće rješenje $y = \frac{a}{2}t^2 + C_1 t + C_2$, gdje su C_1 i C_2 realne konstante. Uvrštavajući početni uvjet $y(0) = y_0$ u izraz za y, dobijemo

$$y_0 = \frac{a}{2} \cdot 0^2 + C_1 \cdot 0 + C_2,$$

dakle $C_2 = y_0$. Slično, uvrštavajući početni uvjet $y'(0) = v_0$ u izraz $y' = at + C_1$, dobijemo

$$v_0 = a \cdot 0 + C_1,$$

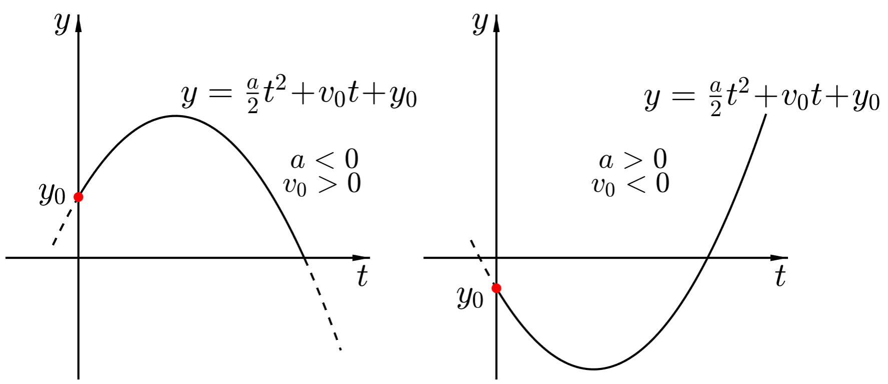
dakle $C_1 = v_0$ pa je konačno rješenje Cauchyjeva problema dano s

$$y = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + y_0.$$

Deriviranjem te relacije dobije se

$$y' = at + v_0.$$

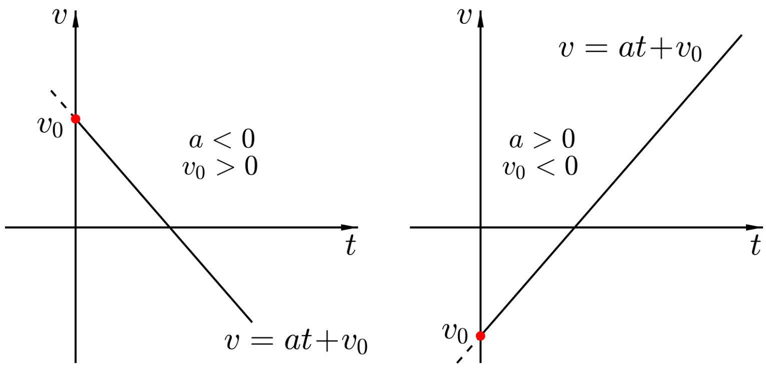
Tim formulama opisani su položaj i brzina čestice u svakom trenutku t.
Rješenje problema predočeno je t-y dijagramima na Slici 13.2, u slučajevima kad su početna brzina v_0 i akceleracija a različitih predznaka.



Slika 13.2: Primjer 13.3 - t-y dijagrami

Napomenimo da je gibanje po y-osi na lijevoj slici usporeno, jer je $a < 0$, a na desnoj ubrzano, jer je $a > 0$. U terminima rasta i pada, na

lijevoj slici prvo je usporeni rast, potom ubrzani pad, dok je na desnoj prvo usporeni pad, potom ubrzani rast.
Na Slici 13.3 dani su t-v dijagrami za brzine čestica koji odgovaraju situacijama sa Slike 2.

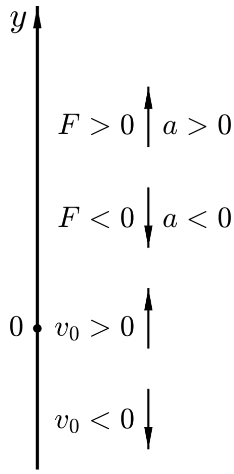


Slika 13.3: Primjer 13.3 - t-v dijagrami

□

Fizikalna interpretacija Cauchyjeva problema iz Primjera 13.3 - gibanje po pravcu pri djelovanje stalne sile

Na Slici 13.4 predočena je y-os, tj. pravac s uvedenim koordinatnim sustavom, s koordinatom y.



Slika 13.4: Djelovanje stalne sile uzduž y-osi

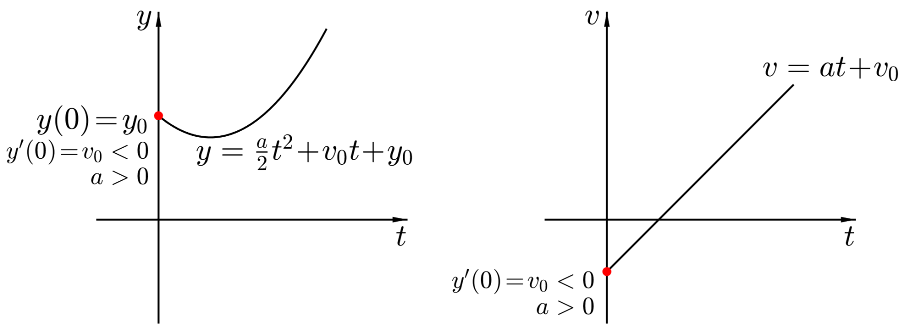
Uzduž pravca djeluje stalna sila koja uzrokuje stalnu akceleraciju a. Napomenimo da za $a > 0$ sila djeluje u pozitivnom smjeru (prema gore), a za $a < 0$ u negativnom smjeru (prema dolje), dok za $a = 0$ nema sile, pa je eventualno gibanje jednoliko (sa stalnom brzinom).
Jednadžba $y'' = a$ je upravo diferencijalna jednadžba gibanja po pravcu uz djelovanje stalne sile. Iz nje ne možemo u potpunosti rekonstruirati gibanje, tj. položaj u svakom trenutku i brzinu u svakom trenutku.

Međutim, to možemo iz početnih uvjeta. Naime (Slika 13.2 i Slika 13.5):

- $y(0) = y_0$ znači da se čestica koja se giba u trenutku $t = 0$ nalazi u točki s koordinatom y_0

- $y'(0) = v_0$ znači da čestica koja se giba u trenutku $t = 0$ ima brzinu v_0.

Općenito, navedeni Cauchyjev problem opisuje gibanje čestice po pravcu pod djelovanjem stalne sile s akceleracijom a, pri čemu čestica ima **početni položaj** y_0 i **početnu brzinu** v_0. Kako smo već vidjeli u Primjeru 13.3, položaj čestice u svakom trenutku t rekonstruiran je relacijom $y(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + y_0$, dok je brzina rekonstruirana relacijom $v(t) = at + v_0$, Slika 13.5.



Slika 13.5: t-y i t-v dijagrami za gibanje po pravcu pod djelovanjem stalne sile

Napomenimo da smo u Lekciji 2 obradili ovaj primjer za $a := -g$, što je matematički model za vertikalni hitac, tj. za gibanje u polju sile teže, uz zanemarivanje otpora zraka i pretpostavku o stalnosti gravitacije u blizini površine Zemlje. Tu je y_0 visina na kojoj se čestica nalazi u početku, a v_0 brzina kojom smo tu česticu izbacili u vis ili prema dolje.

13.3.2 Obična linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima

To je jednadžba oblika

$$y'' + py' + qy = g(x)$$

gdje su p i q realni brojevi, a g funkcija. Ako je $g = 0$, jednadžba se zove **homogenom**, inače je nehomogena.

Primjer 13.4. [Primjeri običnih linearnih diferencijalnih jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima]
Jednadžbe (i)-(iv) iz Primjera 13.1 jesu, a ostale nisu linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima. Homogene su (ii) i (iii), dok su (i) i (iv) općenito nehomogene (homogene

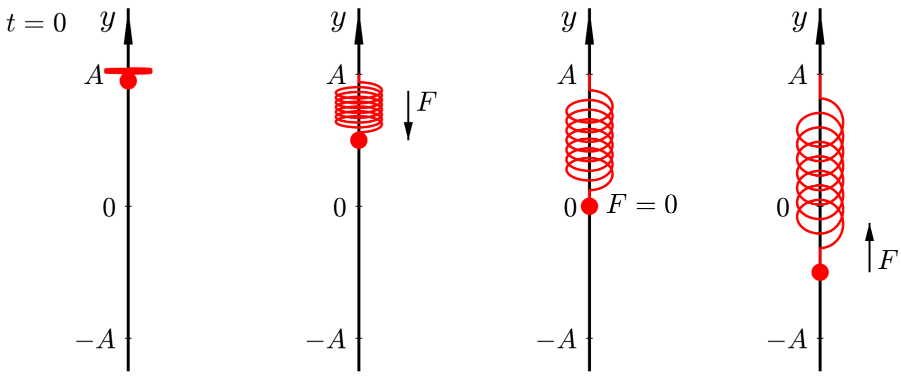
su samo za $a = 0$, odnosno za $g = 0$). Linearna je i jednadžba (v), ali nema konstantne koeficijente, dok su (vi) i (vii) nelinearne. □

Općenito, ovakve diferencijalne jednadžbe fizikalno opisuju tzv. *prigušeni harmonijski oscilator*, što tu nećemo detaljno obrazlagati već dati tipičan primjer.

Primjer 13.5. [Cauchyjev problem titranja po pravcu]
Cauchyjev problem

$$\begin{aligned} y'' + \omega^2 y &= 0, \quad \omega > 0 \\ y(0) &= A \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

opisuje titranje po y-osi između točaka A i $-A$, tj. s *amplitudom* A i *periodom* $\frac{2\pi}{\omega}$, tj. s *frekvencijom* $\frac{\omega}{2\pi}$.
Zamišljamo (Slika 13.6) da smo vrlo elastičnu oprugu stisnuli u točku A, a onda je u $t = 0$ pustili da titra, te gledamo položaj $y(t)$ vrha opruge u vremenu t. Da situaciju učinimo realnijom, na vrhu opruge možemo zamišljati kuglicu mase m.
U Primjeru 13.9 vidjet ćemo da je rješenje problema $y = A\cos(\omega t)$.



Slika 13.6: Primjer 13.5 - Cauchyjev problem titranja po pravcu

□

Opće rješenje homogene jednadžbe $y'' + py' + qy = 0$

Rješavanje obične homogene linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda $y'' + py' + qy = 0$ s konstantnim koeficijentima provodi se u dva koraka:

(1) Postavljanje i rješavanje pripadne **karakteristične jednadžbe**

$$r^2 + pr + q = 0$$

(2) Ispisivanje općeg rješenja - rješenje se može zapisati eksplicitno, ali taj zapis ovisi o tome kakva su rješenja r_1 i r_2 karakteristične jednadžbe:

(i) ako su r_1 i r_2 *različita realna* rješenja, onda je opće rješenje

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

(ii) ako je $r_1 = r_2 = r$ *dvostruko realno* rješenje, onda je opće rješenje

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

(iii) ako su $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ *kompleksno-konjugirana* rješenja, onda je opće rješenje

$$y = e^{\alpha x} \left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x) \right), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ovaj postupak ilustrirat ćemo na primjerima, uz napomenu da u zapisu rješenja u pravilu nećemo posebno isticati da su C_1 i C_2 realne konstante.

Primjer 13.6. [Homogena jednadžba]
Riješimo diferencijalnu jednadžbu $y'' - 7y' + 10y = 0$.
Pripadna karakteristična jednadžba $r^2 - 7r + 10 = 0$ ima različita realna rješenja $r_1 = 2$ i $r_2 = 5$. Zato je opće rješenje

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}.$$

□

Primjer 13.7. [Homogena jednadžba]
Riješimo diferencijalnu jednadžbu $y'' - 4y' + 4y = 0$.
Pripadna karakteristična jednadžba $r^2 - 4r + 4 = 0$ ima dvostruko realno rješenje $r_1 = r_2 = 2$. Zato je opće rješenje

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

□

Primjer 13.8. [Homogena jednadžba]
Riješimo diferencijalnu jednadžbu $y'' - 4y' + 7y = 0$.
Pripadna karakteristična jednadžba $r^2 - 4r + 7 = 0$ ima kompleksno-konjugirana rješenja $r_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}i$ pa je $\alpha = 2$ i $\beta = \sqrt{3}$. Zato je opće rješenje

$$y = e^{2x}(C_1 \cos(\sqrt{3}x) + C_2 \sin(\sqrt{3}x)).$$

□

Primjer 13.9. [Rješenje Cauchyjevog problema titranja po pravcu]
Riješimo Cauchyjev problem titranja iz Primjera 13.5. Diferencijalna jednadžba titranja

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

ima karakterističnu jednadžbu

$$r^2 + \omega^2 = 0,$$

kojoj su rješenja $r = \pm\omega i$. Stoga je $\alpha = 0$ i $\beta = \omega$ i zato je opće rješenje

$$y = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t).$$

Deriviranjem te relacije dobije se

$$y' = -\omega C_1 \sin(\omega t) + \omega C_2 \cos(\omega t).$$

Uvrštavanjem početnog uvjeta $y(0) = A$ u izraz za y dobijemo

$$\begin{aligned} A &= C_1 \cos(\omega \cdot 0) + C_2 \sin(\omega \cdot 0) = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 \\ &= C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = C_1, \end{aligned}$$

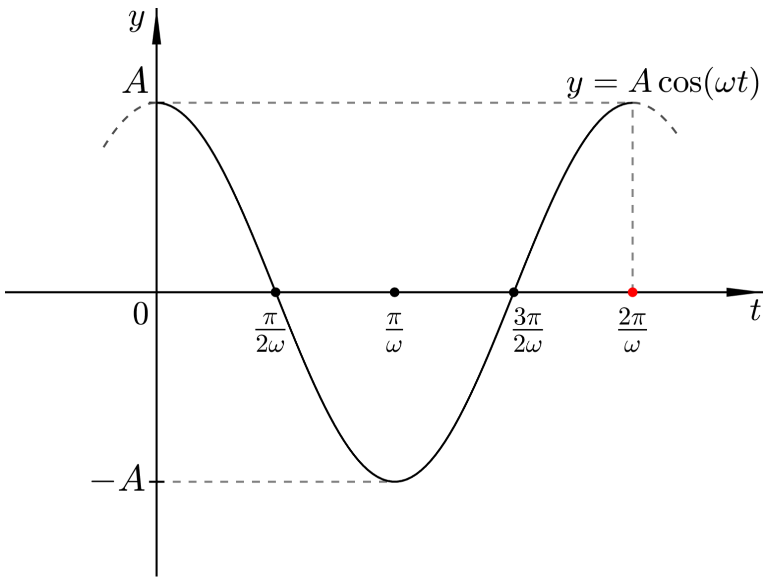
dok uvrštavanje početnog uvjeta $y'(0) = 0$ u izraz za y' daje

$$0 = -\omega C_1 \cdot 0 + \omega C_2 \cdot 1.$$

Kako je $\omega \neq 0$, mora biti $C_2 = 0$. Dakle, konačno je rješenje (Slika 13.7)

$$y = A \cos(\omega t).$$

Rješenje je dano periodnom funkcijom, što je i logično jer je titranje periodno. Iz formule se vidi da je temeljni period $T = \frac{2\pi}{\omega}$. To nismo mogli izravno zaključiti iz diferencijalne jednadžbe titranja niti iz početnih uvjeta. Amplituda titranja jednaka je A, što smo i očekivali.



Slika 13.7: Primjer 13.9 - graf funkcije $y(t) = A\cos(\omega t)$

□

13.4 PRIMJENA MATLAB-A

13.4.1 Rješavanje običnih linearnih diferencijalnih jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima. Naredba dsolve

Pokažimo na Primjerima 13.6 - 13.8 kako se pomoću naredbe dsolve rješavaju homogene obične diferencijalne jednadžbe drugog reda s konstantnim koeficijentima:

```
syms y(x)
jednadzba1 = diff(y, 2) - 7*diff(y) + 10*y == 0
jednadzba2 = diff(y, 2) - 4*diff(y) + 4*y == 0
jednadzba3 = diff(y, 2) - 4*diff(y) + 7*y == 0
dsolve(jednadzba1)                 % exp(2*x)*C1 + exp(5*x)*C2
dsolve(jednadzba2)               % C1*exp(2*x) + C2*x*exp(2*x)
dsolve(jednadzba3)
   % exp(2*x)*cos(3^(1/2)*x)*C1 - exp(2*x)*sin(3^(1/2)*x)*C2
simplify(dsolve(jednadzba3))
          % exp(2*x)*(cos(3^(1/2)*x)*C1 - sin(3^(1/2)*x)*C2)
```

Uočimo da se u rješenjima pojavljuju dvije neodređene konstante C1 i C2, kako i treba biti. Pri rješavanju posljednje jednadžbe koristili smo naredbu simplify kako bismo faktor e^{2x} dobili ispred zagrade. Također, gornje se rješenje, usprkos negativnom predznaku ispred funkcije sinus, ne razlikuje od onog u Primjeru 13.8 jer se i ovako dobiva isti skup rješenja kao i u 13.8.

Kod rješavanja Cauchyjevog problema drugoga reda

$$\begin{aligned} y'' - 4y' + 7y &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y' &= 2 \end{aligned}$$

postupamo slično kao u 2.4.1, tj. najprije definiramo derivaciju y' kao zasebnu funkciju:

```
syms y(x)
jednadzba = diff(y, 2) - 4*diff(y) + 7*y == 0
Dy = diff(y)
uvjeti = [y(0) == 1, Dy(0) == 2]
dsolve(jednadzba, uvjeti)          % exp(2*x)*cos(3^(1/2)*x)
```

Slično se postupa kod rješavanja nehomogenih diferencijalnih jednadžba pomoću naredbe dsolve:

```
syms y(x)
jednadzba = diff(y, 2) - 7*diff(y) + 10*y == exp(x)
dsolve(jednadzba)     % exp(x)/4 + C1*exp(2*x) + C2*exp(5*x)
```

Naredba dsolve može se koristiti i za rješavanje običnih linearnih diferencijalnih jednadžba trećeg reda ili viših redova s konstantnim koeficijentima. Na primjer:

```
syms y(x)
jednadzba = diff(y,3) - 7*diff(y,2) + 11*diff(y) - 5*y == 0
dsolve(jednadzba)    % C1*exp(x) + C3*exp(5*x) + C2*x*exp(x)
```

Uočimo da se ovdje pojavljuju tri neodređene konstante C1, C2 i C3.

13.4.2 Rješavanje običnih diferencijalnih jednadžba drugog reda koje sadrže parametre

U 2.4.1 već smo pokazali kako se rješava Cauchyjev problem drugog reda iz Primjera 13.3. Riješimo pomoću dsolve i Cauchyjev problem titranja po pravcu iz Primjera 13.5 i 13.9. Uvjet $\omega > 0$ postavljamo pomoću naredbe assume:

```
syms omega A y(t)
assume(omega > 0)
jednadzba = diff(y, 2) + omega^2*y == 0
Dy = diff(y, 1)
uvjeti = [y(0) == A, Dy(0) == 0]
dsolve(jednadzba, uvjeti)                    % A*cos(omega*t)
```

13.5 PITANJA I ZADATCI

1. (i) Grafički predočite rješenje iz Primjera 13.3 u slučaju kad su a i v_0 istog predznaka.
   Uputa: analizirajte Sliku 13.2 iz Primjera 13.3.

   (ii) Postupite analogno kao u (i) u slučaju kad je $v_0 = 0$.

2. U kakvoj su vezi područja rasta (pada) funkcija na Slici 13.2 s područjima u kojima su odgovarajuće funkcije na Slici 13.3 pozitivne (negativne)? Obrazložite u terminima funkcija i njihovih derivacija, potom u terminima brzine gibanja.

3. (i) Pažljivo promotrite Sliku 13.5 pa procijenite u kakvom su odnosu vrijednosti vremena t u kojem parabola $y = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t + y_0$ ima tjeme i ona za koju pravac $v = at + v_0$ siječe $t-$os.

   (ii) Fizikalnim argumentima obrazložite zašto su dvije t-vrijednosti iz (i) jednake.

   (iii) Strogo matematički pokažite da su te dvije vrijednosti jednake. Odredite tu jedinstvenu vrijednost.

   Uputa: konzultirajte Zadatak 2.

4. Odredite brzinu kojom se odvija titranje iz Primjera 13.5. Nacrtajte graf i protumačite da je u skladu s grafom funkcije koja opisuje titranje.
   Uputa: brzina je derivacija funkcije položaja po vremenu. Koristite Primjer 13.9.

5. Izvedite diferencijalnu jednadžbu titranja po pravcu iz Primjera 13.5.
   Uputa: pođite od sile F koja djeluje na y-osi prema pravilu $F(y) = -ky$, za pozitivnu konstantu k (Hookeov zakon) i od toga da je u svakom trenutku $F = my''$ jer je y'' akceleracija (druga derivacija položaja y po vremenu t). Povežite te dvije relacije i oslobodite se mase m i koeficijenta elastičnosti k uvođenjem novog parametra ω.

6. (i) Riješite diferencijalnu jednadžbu titranja uz početne uvjete $y(0) = 0$ i $y'(0) = 0$. Objasnite fizikalno zašto ste dobili takvo rješenje.
   Uputa: analizirajte Primjer 13.9 i na opće rješenje primijenite ove početne uvjete.

   (ii) Ponovite postupak iz (i) uz početne uvjete $y(0) = 0$ i $y'(0) = -A\omega$. Protumačite fizikalno rezultat.

7. (i) Provjerite opća rješenja iz Primjera 13.6 - 13.8.
   Uputa: dva puta derivirajte rješenje i uvrstite u početnu diferencijalnu jednadžbu.

   (ii) Provjerite rješenje iz Primjera 13.9.

8. Riješite Primjere 13.6 - 13.8 uz početne uvjete $y(0) = 1$ i $y'(0) = 0$.
   Uputa: koristite opća rješenja tih primjera.

MATLAB NAREDBE