Zadatak 1.
Izračunajte $\vec{L}^2$ i izrazite ga s pomoću operatora zaleta $\vec{p}$.

Rješenje:
Upotrijebit ćemo oblik vektorskog umnoška $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ takav da vodimo računa o nekomutativnosti operatora položaja i zaleta. Pri tome ćemo iskoristiti simbol Levi-Civita $\epsilon_{ijk}, i, j, k=1,2,3$ koji ima sljedeća svojstva:

$\epsilon_{ijk}=1$ za parnu permutaciju od 1,2,3
$\epsilon_{ijk}=-1$ za neparnu permutaciju od 1,2,3
$\epsilon_{ijk}=0$ ako su bilo koja dva indeksa ista

Naprimjer, $\epsilon_{213}=-1$ zato što smo polazeći od početnog poretka 123 do poretka 213 došli samo jednim premetanjem, naime samo smo međusobno zamijenili 1 i 2. Slično tomu $\epsilon_{231}=1$ zato što su potrebna dva (ili općenito paran broj) premetanja da bismo od poretka 123 došli do poretka 231.
Još ćemo iskoristiti dogovor da u izrazu gdje se jedan indeks nalazi na dva mjesta to znači zbrajanje po tom indeksu.
Naprimjer,

$$\epsilon_{ijk}a_k \equiv \sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}a_k$$

(tzv. Einsteinova konvencija)

Uza sve ovo, operator zamaha $\vec{L}$ (i općenito bilo koji vektorski umnožak) može se napisati kao

$$L_i=\epsilon_{ijk}x_j p_k$$

Nadalje imamo

$$\vec{L}^2 = L_i L_i = \epsilon_{ijk} x_j p_k \epsilon_{ilm} x_l p_m = \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} x_j p_k x_l p_m$$

Sada ćemo iskoristiti sljedeće svojstvo simbola Levi-Civita:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$$

Dobivamo

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 &= x_j p_k x_j p_k - x_j p_k x_k p_j = \\ &= x_j (x_j p_k - (i\hbar)\delta_{jk}) p_k - x_j p_k (p_j x_k + (i\hbar)\delta_{jk}) = \\ &= \vec{r}^2 \vec{p}^2 - (i\hbar)\vec{r}\cdot\vec{p} - x_j p_j (x_k p_k - (i\hbar)\delta_{kk}) - (i\hbar)\vec{r}\cdot\vec{p} = \\ &= \vec{r}^2 \vec{p}^2 - (\vec{r}\cdot\vec{p})^2 + (i\hbar)\vec{r}\cdot\vec{p} \end{aligned}$$

Ovdje smo upotrijebili komutacijsko pravilo

$$p_i x_j - x_j p_i = -(i\hbar)\delta_{ij}$$

i jednakost $\delta_{kk} = 3$

Nadalje vrijedi

$$\vec{r}\cdot\vec{p} = -(i\hbar) r \frac{\partial}{\partial r}$$

tako da dobivamo konačni izraz

$$\begin{aligned} \vec{L}^2 &= -\hbar^2 r^2 \vec{\nabla}^2 + \hbar^2 r \frac{\partial}{\partial r} + \hbar^2 \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 = \\ &= -\hbar^2 r^2 \vec{\nabla}^2 + \hbar^2 r^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \end{aligned}$$

Time smo dokazali sljedeći identitet

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\vec{L}^2}{\hbar^2 r^2}$$

Zadatak 2.
Napišite Schrödingerovu jednadžbu za česticu u sferno simetričnom potencijalnom polju.

Rješenje:
Rabeći prethodni rezultat, Schrödingerovu jednadžbu u polju *V*(*r*)

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^2 + V(r)\right]\psi(\vec{r}) = E\,\psi(\vec{r})$$

možemo napisati kao

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\vec{L}^2}{2mr^2} + V(r)\right]\psi(\vec{r}) = E\,\psi(\vec{r})$$

Budući da operator zamaha djeluje samo na kutne koordinate, valnu funkciju možemo prikazati u obliku umnoška

$$\psi(\vec{r}) = R(r)\,Y_l^m(\theta, \phi)$$

Tada radijalni dio valne funkcije, $R(r)$, zadovoljava jednadžbu:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}+V(r)\right]R(r)=E\,R(r)$$

Uvedemo li novu funkciju

$$u(r)=r\,R(r)$$

ova jednadžba dobiva konačni oblik

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dr^2}+\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}+V(r)\right]u(r)=E\,u(r)$$

Dobili smo jednodimenzijsku Schrödingerovu jednadžbu za česticu u potencijalu

$$V_{ef}(r)=V(r)+\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}$$

Dodatak potencijalu $V(r)$ je **centrifugalna barijera.**

Zadatak 3.
Rabeći svojstvo Paulijevih matrica

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij}$$
$$\sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$$

dokažite jednakost

$$(\vec{\sigma}\cdot\vec{a})(\vec{\sigma}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$$

Zadatak 4.
Dokažite da su srednje vrijednosti vektora $\vec{L}, \vec{r}, \vec{p}$ u stanju s valnom funkcijom

$$\psi(\vec{r}) = \mathrm{e}^{\frac{i\vec{p}_0\cdot\vec{r}}{\hbar}}\phi(\vec{r})$$

gdje je $\vec{p}_0$ obični realni vektor i $\phi(\vec{r})$ realna funkcija, povezani klasičnom jednadžbom

$$\langle\vec{L}\rangle = \langle\vec{r}\rangle\times\langle\vec{p}\rangle$$