ALGEBRA OPERATORA ZAMAHA

Svaki operator predočiv je kao matrica konačnog ili beskonačnog reda. Operator zamaha predočiv je i kao diferencijalni operator. Slično smo imali i za harmonički oscilator—beskonačne matrice kao diferencijalne operatore, i obrnuto, a spektar vlastitih vrijednosti hamiltonijana izveden je iz same algebre. S operatorom zamaha provest ćemo sličan postupak i otkriti da se te dvije predočivosti—matrice i diferencijalni operatori—ne slažu u potpunosti, tj. da postoje vlastite vrijednosti koje **ne odgovaraju nikakvim diferencijalnim operatorima.** Drugačije rečeno, postoje stanja i svojstva **fizičke veličine** koja nisu predočiva nikakvim prostornim koordinatama. Stern-Gerlachov pokus dao je rezultate koji nagovještavaju takve mogućnosti.

U prikladno izabranoj bazi, tri sastavnice operatora zamaha čine sljedeću algebru

$$[L_z, L_+] = +L_+$$
$$[L_z, L_-] = -L_-$$
$$[L_+, L_-] = 2L_z$$

$$\vec{L}^2 = \frac{1}{2}\left(L_+ L_- + L_- L_+\right) + L_z^2$$

$$[\vec{L}^2, L_i] = 0 \quad , i = +, -, z$$

Ovdje su svi operatori izraženi u jedinicama $\hbar$ odnosno $\hbar^2$. I sada ćemo iz same algebre naći matrice koje predočuju te operatore.

Kako izabrati bazu vektorskog (Hilbertovog) prostora u kojem ćemo proučiti djelovanje navedenih operatora? Uvijek je pogodno izabrati bazu koja je vlastita baza barem jednoga od navedenih operatora. Budući da operatori L_+, L_-, L_z međusobno ne komutiraju, takva baza može biti vlastitom bazom samo jednoga od **tih** operatora. No, operator $\vec{L}^2$ komutira sa svim navedenim operatorima, pa zato ta baza može biti **i njegova** vlastita baza. Dakle, baza Hilbertovoga prostora označena je s dvama realnim brojevima—jedan je vlastita vrijednost operatora L_z a jedan je vlastita vrijednost operatora $\vec{L}^2$. Označimo te vlastite vrijednosti kao a i b. Vlastite vektore ćemo označavati kao $|b, a\rangle$ i za njih po definiciji imamo jednakosti

$$L_z|b,a\rangle = a|b,a\rangle \quad , \quad \vec{L}^2|b,a\rangle = b|b,a\rangle$$

Sada ćemo proučiti djelovanje ostalih operatora u toj bazi. Imamo

$$\left[L_z, L_+\right]|b,a\rangle = L_+|b,a\rangle \Rightarrow \left(L_z - a\right) L_+|b,a\rangle = L_+|b,a\rangle \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L_z\left(L_+|b,a\rangle\right) = (a+1)\, L_+|b,a\rangle \Rightarrow L_+|b,a\rangle = N_+(a,b)|b,a+1\rangle$$

$$\left[L_z, L_-\right]|b,a\rangle = -L_-|b,a\rangle \Rightarrow \left(L_z - a\right) L_-|b,a\rangle = -L_-|b,a\rangle \Rightarrow$$
$$\Rightarrow L_z\left(L_-|b,a\rangle\right) = (a-1)\, L_-|b,a\rangle \Rightarrow L_-|b,a\rangle = N_-(a,b)|b,a-1\rangle$$

$$\left[L_+, L_-\right]|b,a\rangle = L_z|b,a\rangle \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N_-(a,b)\, N_+(a-1,b) - N_+(a,b)\, N_-(a+1,b) = 2a$$

$$\vec{L}^2 \left| b\,,a \right\rangle = b \left| b\,,a \right\rangle \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{2} \left[N_+(a-1,b) N_-(a\,,b) + N_-(a+1,b) N_+(a\,,b) \right] + a^2$$

Sada moramo iskoristiti činjenicu da su operatori L_+, L_- jedan drugome hermitski konjugirani, tj. da vrijedi:

$$L_-^+ = L_+$$

Tada iz definicije djelovanja ovih operatora slijedi:

$$\left\langle b\,,a-1 \right| L_- \left| b\,,a \right\rangle = N_-(a\,,b) = \left(L_+ \left| b\,,a-1 \right\rangle \right)^+ \left| b\,,a \right\rangle = N_+^*(a-1,b) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow N_-(a\,,b) = N_+^*(a-1,b)$$

S pomoću ovoga uvjeta možemo postaviti dvije jednadžbe:

$$\left| N_+(a\,,b) \right|^2 = \left| N_+(a-1,b) \right|^2 - 2a$$

$$b = \left| N_+(a\,,b) \right|^2 + a(a+1)$$

Prva od ovih dviju jednadžbi je rekurzivna i opisuje smanjivanje iznosa od N_+ kada se pod djelovanjem operatora L_+ vlastita vrijednost *a* poveća za točno 1 (ni manje ni više). Uzastopnim djelovanjem toga operatora došli bismo do točka kada bi iznos od N_+ postao negativan, a što se ne smije dogoditi. Iz toga moramo izvesti zaključak da nakon konačnog broja *n* "koraka udesno" iznos od N_+ mora biti točno 0 (ni manje ni više). Ako smo pošli od nekog broja $a = a_0$ i napravili *n* pomaka duljine 1 udesno, došli smo do vrijednosti $a_d = a_0 + n$ gdje mora vrijediti

$$N_+(a_0+n,b)=0 \quad , \quad b=(a_0+n)(a_0+n+1)$$

Slično tomu imamo djelovanje operatora L_- koji smanjuje vlastitu vrijednost *a* za točno 1 (ni manje ni više). Zato ćemo prethodne dvije jednadžbe prepisati s pomoću N_-

$$|N_-(a-1,b)|^2=|N_-(a,b)|^2+2(a-1)$$

$$b=|N_-(a,b)|^2+a(a-1)$$

Ove dvije jednadžbe opisuju pomicanje ulijevo (prema "dolje"). Ako se pomaknemo *m* koraka ulijevo od točke $a=a_0$, doći ćemo do točke $a_l=a_0-m$ gdje mora vrijediti

$$N_-(a,b)=0 \quad , \quad b=(a_0-m)(a_0-m-1)$$

Budući da je vlastita vrijednost *b* ista u oba slučaja, mora vrijediti

$$a_0=\frac{m-n}{2}$$

$$b=l(l+1) \quad , \quad l=\frac{m+n}{2} \quad , \quad m,n=0,1,2...$$

Odavde također slijedi

$$a_l=-a_d=-l$$

Sve u svemu....
Vlastita vrijednost operatora $\vec{L}^2$ može imati samo diskretne vrijednosti $\hbar^2 l(l+1)$, pri čemu je *l* nenegativni cijeli ili polucijeli broj, a pri odabranom *l*, vlastite vrijednosti operatora L_z mogu biti samo $m\hbar$, gdje je *m* = -*l*, -*l* +1,....,*l*-1, *l*. Dakle, za dani *l* postoji 2*l* +1 vlastitih vektora. Tada vrijedi:

$$L_+|l,m\rangle=\hbar\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}|l,m+1\rangle$$

$$L_-|l,m\rangle=\hbar\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}|l,m-1\rangle$$

$$L_z|l,m\rangle=\hbar m|l,m\rangle$$

$$\vec{L}^2|l,m\rangle=\hbar^2 l(l+1)|l,m\rangle$$

Idemo vidjeti prvih nekoliko slučajeva:

1.) *l* = 0
   Hilbertov prostor se sastoji od samo jednog vektora. To je trivijalan slučaj.

2.) *l*=1/2
   Hilbertov prostor se sastoji od dvaju vektora:

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle,\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$$

   koje možemo kraće označiti kao $|+\rangle,|-\rangle$ ili kao $|\uparrow\rangle,|\downarrow\rangle$. Za njih vrijedi

$$L_+|\uparrow\rangle=0 \quad , \quad L_+|\downarrow\rangle=\hbar|\uparrow\rangle$$

$$L_-|\uparrow\rangle=\hbar|\downarrow\rangle \quad , \quad L_-|\downarrow\rangle=0$$

$$L_z|\uparrow\rangle=\frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle \quad , \quad L_z|\downarrow\rangle=-\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle$$

Kada bismo ove vektore i operatore predočili matricama onda bismo imali

$$|\uparrow\rangle=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad , \quad |\downarrow\rangle=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$L_+=\hbar\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad L_-=\hbar\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad L_z=\frac{1}{2}\hbar\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\vec{L}^2=\frac{3}{4}\hbar^2\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$$

U polaznoj bazi, gdje imamo operatore L_x, L_y, L_z , te matrice ćemo označiti kao $\frac{1}{2}\hbar\sigma_x, \frac{1}{2}\hbar\sigma_y, \frac{1}{2}\hbar\sigma_z$:

$$\sigma_x=\frac{2}{\hbar}(L_++L_-)=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad \sigma_y=\frac{2}{\hbar i}(L_+-L_-)=\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}$$

$$\sigma_z=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

Matrice $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ zovu se **Paulijeve matrice** i služe za opis čestice sa spinom ½ . Dakle, čestici spina ½ pridružujemo operator zamaha

$$\vec{L} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$$

Pokažimo da se ovaj operator **ne može** prikazati kao operator diferenciranja po nekim prostornim kutevima. Imamo

$$L_+ = \hbar\, \mathrm{e}^{i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$L_- = -\hbar\, \mathrm{e}^{-i\phi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\cot(\theta)\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$

$$L_z = -i\hbar\frac{\partial}{\partial\phi}$$

Pretpostavimo da postoje "gornja" i "donja" funkcije kuteva takve da vrijedi:

$$L_+ g(\theta,\phi) = 0 \quad , \quad L_+ d(\theta,\phi) = \hbar\, g(\theta,\phi)$$
$$L_- g(\theta,\phi) = \hbar\, d(\theta,\phi) \quad , \quad L_- d(\theta,\phi) = 0$$
$$L_z g(\theta,\phi) = \frac{1}{2}\hbar\, g(\theta,\phi) \quad , \quad L_z d(\theta,\phi) = -\frac{1}{2}\hbar\, d(\theta,\phi)$$

Iz ovoga slijedi:

$$g(\theta,\phi) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}i\phi}G(\theta) \quad , \quad d(\theta,\phi) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}i\phi}D(\theta)$$

$$L_+ g = 0 \Rightarrow G' - \frac{1}{2}\cot(\theta) G = 0$$

$$L_- e^{\frac{1}{2} i\phi} G = \hbar e^{-\frac{1}{2} i\phi} D \Rightarrow G' + \frac{1}{2}\cot(\theta) G = -D$$

Oduzimanjem ovih dviju jednadžbi dobivamo

$$D = -\cot(\theta) G \qquad (*)$$

Nadalje imamo

$$L_- d = 0 \Rightarrow D' - \frac{1}{2}\cot(\theta) D = 0$$

$$L_+ e^{-\frac{1}{2} i\phi} D = \hbar e^{\frac{1}{2} i\phi} G \Rightarrow D' + \frac{1}{2}\cot(\theta) D = G$$

Oduzimanjem ovih dviju jednadžbi dobivamo

$$G = \cot(\theta) D \qquad (**)$$

Iz jednadžbi (*) i (**) slijedi

$$\cot^2(\theta) = -1$$

a to je nemoguće za realne kuteve. Dakle, mora biti $G=D=0$. Time smo dokazali da se spin, tj vrijednost zamaha koja odgovara polovičnom cijelom broju, ne može prikazati s pomoću funkcija kuteva.

Spin je unutarnje svojstvo čestice koje svojim algebarskim izgledom podsjeća na vrtnju tijela, ali nikako ne može biti istovjetno s vrtnjom tijela oko svoje osi.

3.) $l=1$

Hilbertov prostor ima dimenziju 3. Operatori zamaha se mogu predočiti matricama

$$L_+ = \hbar \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad L_- = \hbar \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad L_z = \hbar \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Na ploči, za vježbu, naći vlastite funkcije kuteva. Prodiskutirati hermitsku konjugaciju operatora zamaha prikazanih u diferencijalnom obliku.

SCHRÖDINGEROVA JEDNADŽBA ZA CENTRALNO SIMETRIČNE POTENCIJALE