Zadatak 1.

Izračunajte valne funkcije slobodne čestice u jednoj prostornoj dimenziji i normalizirajte ih.

Rješenje:

Stacionarna Schrödingerova jednadžba za slobodnu česticu energije E je:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}=E\psi(x) \quad ,$$

odnosno

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+k^2\psi(x)=0 \quad , \quad E=\frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Rješenja ove jednadžbe su funkcije $e^{\pm i k x}$. Svaka od tih dviju funkcija je i vlastita funkcija operatora zaleta s vlastitom vrijednošću $p=\pm\hbar k$. Budući da te funkcije nisu prostorno ograničene, njihovu normalizaciju moramo provesti s posebnom pozornošću. Naime, naivno uvrštavanje ovih funkcija u normalizacijski integral nam daje

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\psi(x)|^2 dx=N^2\int_{-\infty}^{+\infty}1\, dx=+\infty-(-\infty)=?$$

I što sada?

Umjesto beskonačnog prostornog intervala, uzet ćemo po volji veliki, ali konačni, prostorni interval duljine L.

Sada za normalizacijski integral dobivamo

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} |\psi(x)|^2 dx = N^2(L) \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} 1\, dx = N^2(L)\, L = 1 \Rightarrow N(L) = \frac{1}{\sqrt{L}}$$

Vlastite funkcije su označene kvantnim brojem *k*, kojega zovemo valnim vektorom. Dakle, vlastite valne funkcije su

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \mathrm{e}^{ikx}$$

i vlastite vrijednosti

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Spektar energija je kontinuiran i dvostruko degeneriran—svakoj energiji odgovaraju dvije valne funkcije s valnim vektorima *k* i -*k*.

Jesu li valne funkcije međusobno ortogonalne? Idemo vidjeti.

$$\int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \psi_{k'}^*(x)\, \psi_k(x)\, dx = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{+\frac{L}{2}} \mathrm{e}^{i(k-k')x} dx =$$

$$= \frac{2}{L(k-k')} \sin\left((k-k')\frac{L}{2}\right)$$

U prethodnoj formuli imamo izraz oblika:

$$\lim_{a \to +\infty} \frac{\sin(K\,a)}{K\,a}$$

No, taj izraz zaista je jednak 1 ako je K=0, i jednak 0 inače.
Ali...
Valni vektor k je kontinuirana veličina. Zato bi se u izrazu za skalarni umnožak funkcija morala pojaviti Diracova δ – funkcija.
To nije velika poteškoća. Jednostavno ćemo reći da su naši valovi kvantizirani u jako velikoj "kutiji" duljine L, s **periodičkim rubnim uvjetima**. Iz tih uvjeta dobivamo

$$k = \frac{2\pi n}{L} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

i onda postupamo kao da je riječ o diskretnim vrijednostima valnoga vektora. Vidimo da su te diskretne vrijednosti to gušće posložene što je duljina kutije veća. Možemo govoriti o **kvazikontinuiranim valnim vektorima.**

Zadatak 2.
Dokažite da vrijedi

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dk$$

Rješenje:
Budući da funkcija e^{ikx} nije regularna u beskonačnosti, regularizirat ćemo ju tako da njezinu argumentu dodamo izraz $-\epsilon|k|$ pa ćemo parametar ϵ na kraju računa staviti jednakim 0.

Dakle,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx-\epsilon|k|} dk = \int_{-\infty}^{0} e^{ikx+\epsilon k} dk + \int_{0}^{+\infty} e^{ikx-\epsilon k} dk =$$

$$= \frac{1}{\epsilon + ix} - \frac{1}{-\epsilon + ix} = \frac{2\epsilon}{\epsilon^2 + x^2} = 2\pi \left(\frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + x^2} \right) = 2\pi\,\delta(x)$$

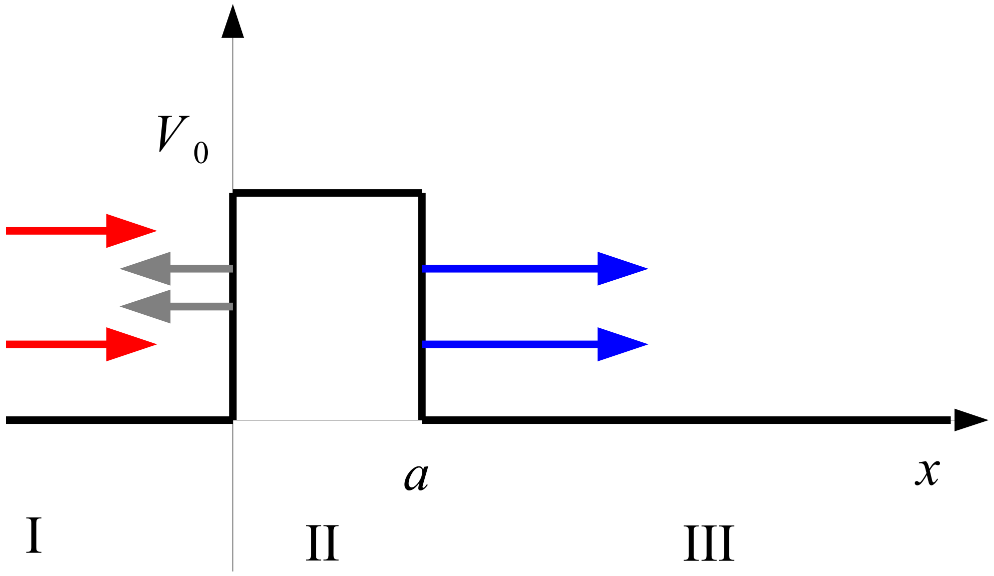
Zadatak 3.
Normalizirajte valne funkcije iz Zadatka 1. na δ-funkciju.

Rješenje:

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*_{k'}(x)\,\psi_k(x)\,dx = \delta(k - k')$$

Zadatak 4.
Nađite vjerojatnost da se čestica energije manje od visine potencijalne barijere, prikazane na slici, nađe iza barijere, tj. da prođe kroz nju.



Rješenje:

$$\psi_I(x) = A\,e^{ikx} + B\,e^{-ikx} \quad , \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\psi_{II}(x) = C\,e^{\kappa x} + D\,e^{-\kappa x} \quad , \quad \kappa = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

$$\psi_{III}(x) = T\,e^{ikx}$$

Uvjeti šivanja valne funkcije su:

$$A + B = C + D$$
$$i k (A - B) = \kappa (C - D)$$
$$C e^{\kappa a} + D e^{-\kappa a} = T e^{i k a}$$
$$\kappa (C e^{\kappa a} - D e^{-\kappa a}) = i k T e^{i k a}$$

Riješiti na ploči!