Zadatak 1.

Dokažite da vlastiti vektori stanja harmoničkog oscilatora tvore ortonormiranu bazu.

Rješenje:

a) Linearna nezavisnost

Prvo moramo dokazati linearnu nezavisnost vektora .
Pretpostavimo da postoje skalari $c_0, c_1, c_2, ...$ od kojih je barem jedan različit od 0, takvi da vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle = 0 \qquad (1)$$

Djelujući operatorom *N* na obje strane ove jednadžbe, dobivamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\, c_n |n\rangle = 0 \qquad (2)$$

Jednadžba (2) je iste vrste kao i jednadžba (1), samo s promijenjenim skalarima. Označimo te skalare ovako:

$$c_n^{(1)} = n\, c_n \quad , \quad n = 0, 1, 2....$$

To znači da je $c_0^{(1)} = 0$ i da vektor $|0\rangle$ "ispada iz igre", tj. da ga nema u jednadžbi linearne zavisnosti. Sada možemo na jednadžbu (2) djelovati operatorom *N*-1, i zaključit ćemo da i vektor $|1\rangle$ "ispada iz igre". Postupak možemo nastaviti u beskonačnost pa ćemo zaključiti da svi vektori "ispadaju iz igre", tj. da ne postoji linearna zavisnost među njima.

b) Okomitost (ortogonalnost)
Sada ćemo dokazati da su dva različita vektora, $|n\rangle$ i $|m\rangle$ okomita. Pri tome ćemo iskoristiti svojstvo hermitičnosti operatora *N*.

$$N|n\rangle = n|n\rangle \quad , \quad \langle m|N = m\langle m|$$

Odavde slijedi:

$$\langle m|N|n\rangle = n\langle m|n\rangle$$

$$\langle m|N|n\rangle = m\langle m|n\rangle$$

Oduzimanjem ovih dviju jednadžbi dobivamo:

$$(n-m)\langle m|n\rangle = 0$$

Budući da je $n \neq m$, slijedi :

$$\langle m|n\rangle = 0$$

To znači da su bilo koja dva različita vektora međusobno okomita.
c) Normiranost
Budući da vrijedi,

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(A^{+})^{n}|0\rangle \quad , \quad \langle n| = \langle 0|A^{n}\frac{1}{\sqrt{n!}}$$

vrijedi i

$$\langle n|n\rangle = \frac{1}{n!}\langle 0|A^n(A^+)^n|0\rangle$$

Uvedimo pokratu

$$D_n = \langle 0|A^n(A^+)^n|0\rangle$$

Naš zadatak je dovesti operator A skroz na lijevo, tako da djeluje na vektor osnovnog stanja i poništi ga. Za to će nam trebati sljedeće komutacijsko pravilo:

$$\begin{aligned}\left[A,(A^+)^n\right] &= \left[A, A^+(A^+)^{n-1}\right] = A^+\left[A,(A^+)^{n-1}\right] + \left[A, A^+\right](A^+)^{n-1} = \\ &= (A^+)^{n-1} + A^+\left(A^+\left[A,(A^+)^{n-2}\right] + (A^+)^{n-2}\right) = \\ &= 2(A^+)^{n-1} + (A^+)^2\left[A,(A^+)^{n-2}\right] = ... = n(A^+)^{n-1}\end{aligned}$$

Primjenom ovog pravila u definiciji veličine D_n i relacije

$$A|0\rangle = 0$$

dobivamo rekurzivnu relaciju:

$$D_n = n\, D_{n-1}$$

No, iz ove relacije slijedi

$$D_n = n!\langle 0|0\rangle$$

Iz svega ovoga dobivamo

$$\langle n|n\rangle = \langle 0|0\rangle$$

Prema tome, ako je vektor osnovnog stanja oscilatora normiran na 1, onda su i vektori svih ostalih stanja također normirani na 1. Time je u potpunosti dokazana ortonormiranost vlastitih vektora harmoničkog oscilatora.

Zadatak 2.

Izračunajte umnožak neodređenost položaja i zaleta za određeno stanje harmoničkog oscilatora.

Rješenje:

Izrazit ćemo operatore položaja i zaleta s pomoću operatora stvaranja i poništenja:

$$x = \frac{x_0}{2}\left(A + A^+\right) \quad , \quad p = \frac{p_0}{2i}\left(A^+ - A\right)$$

Budući da operatori stvaranja i poništenja povisuju odnosno snizuju vrijednost *n,* koja označava stanje, i zato što su različiti vektori stanja međusobno okomiti, zaključujemo da su srednje vrijednosti operatora položaja i zaleta u bilo kojem vlastitom stanju hamiltonijana harmoničkog oscilatora jednaki 0. To znači da nas zanimaju samo srednje vrijednosti kvadrata tih operatora. Imamo:

$$x^2 = \frac{x_0^2}{4}\left(A^2 + (A^+)^2 + A\,A^+ + A^+\,A\right)$$

$$p^2 = -\frac{p_0^2}{4}\left(A^2 + (A^+)^2 - A\,A^+ - A^+\,A\right)$$

Srednje vrijednosti kvadrata operatora stvaranja i poništenja jednake su 0 (zašto?). Iskorištavanjem komutacijskog pravila za operatore stvaranja i poništenja i definicije operatora *N* dobivamo

$$\langle n | x^2 | n \rangle = \frac{x_0^2}{4}(2n+1) \quad , \quad \langle n | p^2 | n \rangle = \frac{p_0^2}{4}(2n+1)$$

Konačno za umnožak neodređenosti dobivamo:

$$\Delta p \Delta x = \sqrt{\left(\frac{p_0^2}{4}(2n+1)\right)\left(\frac{x_0^2}{4}(2n+1)\right)} = \frac{p_0 x_0}{4}(2n+1) = \frac{\hbar}{2}(2n+1)$$

Primijetimo važnu činjenicu: umnožak neodređenosti za osnovno stanje je najmanji mogući.

Zadatak 3.

Izračunajte kako operator zaleta *P* djeluje u vlastitoj bazi operatora položaja *X*. (ovdje su operatori označeni velikim slovima da bismo ih razlikovali od njihovih vlastitih vrijednosti)

Rješenje:

Za operatore *P* i *X* vrijedi komutacijsko pravilo

$$[P, X] = -i\hbar \quad ,$$

a za vlastite vektore operatora *X* vrijedi

$$X|x\rangle = x|x\rangle \quad .$$

Djelujmo komutatorom na određeni vlastiti vektor operatora *X*.

$$[P, X]|x\rangle = -i\hbar|x\rangle$$

Dobivamo:

$$(x - X) P|x\rangle = -i\hbar|x\rangle \quad .$$

Iz ove jednadžbe trebamo izračunati vektor $P|x\rangle$. To nije moguće učiniti jednostavno tako da na obje strane jednadžbe djelujemo operatorom $(x-X)^{-1}$ zato što operator $x - X$

poništava vektor $|x\rangle$, tj. vrijedi

$$(x-X)|x\rangle=0 \quad ,$$

i zato **ne postoji** vektor $(x-X)^{-1}|x\rangle$. Zato ćemo uzeti vektor koji je jako blizu vektoru $|x\rangle$, naime vektor $|x+\Delta x\rangle$. Za njega vrijedi

$$(x-X)|x+\Delta x\rangle=-\Delta x|x+\Delta x\rangle$$

Ako uzmemo

$$P|x\rangle=i\hbar\frac{|x+\Delta x\rangle-|x\rangle}{\Delta x}$$

iz komutacijskog pravila ćemo dobiti jednadžbu

$$|x+\Delta x\rangle=|x\rangle \quad ,$$

tj. morali bismo staviti $\Delta x=0$. No, to nije ništa drugo nego operacija deriviranja

$$P|x\rangle=i\hbar\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x+\Delta x\rangle-|x\rangle}{\Delta x}=i\hbar\frac{d}{dx}|x\rangle$$

Primijetite ovdje predznak + ispred imaginarne jedinice. Mi ne gledamo kako operator zaleta djeluje na funkciju od vlastite vrijednosti operatora položaja nego gledamo kako on djeluje na vlastiti vektor operatora položaja.

Idemo vidjeti kako operator zaleta djeluje na opći vektor $|\psi\rangle$ u Hilbertovom prostoru. Takav vektor ćemo prikazati u vlastitoj bazi operatora položaja *X*.

$$|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} c(x)|x\rangle\, dx$$

Ovdje su $c(x)$ **koordinate** vektora $|\psi\rangle$ u vlastitoj bazi operatora *X*. Mi znamo kako operator *P* djeluje na **vektore** te baze. Dakle,

$$P|\psi\rangle = i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} c(x)\frac{d}{dx}|x\rangle\, dx = i\hbar\, c(x)|x\rangle|_{-\infty}^{+\infty} + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty}\left(-i\hbar\frac{dc(x)}{dx}\right)|x\rangle\, dx$$

Ovdje smo iskoristili parcijalnu integraciju i tako smo operaciju deriviranja "prebacili" na koordinate $c(x)$. Prvi član u ovoj jednadžbi iščezava, ako zahtjevamo konačnu normu vektora $|\psi\rangle$. Dakle, operator zaleta je

$$P\,c(x) = -i\hbar\frac{dc(x)}{dx}$$

kada djeluje na koordinate vektora, odnosno na funkcije realne varijable x.