

Zadatak 1.

Koji su od sljedećih operatora linearni, ako $-\infty < x < +\infty$?

a) Operator pomaka $T_a \Psi(x) = \Psi(x+a)$, $a \in \mathbb{R}$

b) Operator skaliranja $S_c \Psi(x) = \sqrt{c} \Psi(cx)$, $c > 0$

c) Operator zrcaljenja $Z \Psi(x) = \Psi(-x)$

d) Operator kompleksne konjugacije $K \Psi(x) = \Psi^*(x)$

e) Operator premjestbe (permutacije) koordinata čestica

$$P_{12} \Psi(x_1, x_2) = \Psi(x_2, x_1)$$

Rješenje:

a) $T_a(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha f(x+a) + \beta g(x+a) =$
 $= \alpha T_a f(x) + \beta T_a g(x)$ linearan

b) $S_c(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \sqrt{c}(\alpha f(cx) + \beta g(cx)) =$
 $= \alpha \sqrt{c} f(cx) + \beta \sqrt{c} g(cx) = \alpha S_c f(x) + \beta S_c g(x)$
 linearan

c) $Z(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha f(-x) + \beta g(-x) =$
 $= \alpha Z f(x) + \beta Z g(x)$ linearan

d) $K(\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha^* f^*(x) + \beta^* g^*(x) =$
 $= \alpha^* K f(x) + \beta^* K g(x)$ nije linearan

$$d) P_{12}(\alpha f(x_1, x_2) + \beta g(x_1, x_2)) = \alpha f(x_2, x_1) + \beta g(x_2, x_1) = \\ = \alpha P_{12} f(x_1, x_2) + \beta P_{12} g(x_1, x_2) \quad \text{linearan}$$

Zadatak 2.

Za operatore navedene u Zadatku 1. nađite njima hermitski konjugirane operatore, a također i inverzne operatore.

Rješenje:

$$a) T_a^+ = T_{-a} \quad , \quad T_a^{-1} = T_{-a}$$

$$b) S_c^+ = S_{\frac{1}{c}} \quad , \quad S_c^{-1} = S_{\frac{1}{c}}$$

$$c) Z^+ = Z \quad , \quad Z^{-1} = Z$$

d) Za operator K ne postoji hermitski konjugiran operator, budući da K nije linearan operator. Međutim, postoji inverzni $K^{-1} = K$

$$e) P_{12}^+ = P_{12} \quad , \quad P_{12}^{-1} = P_{12}$$

Zadatak 3.

Operator B oblika $B = f(A)$, gdje je A neki drugi operator, a f je funkcija koja se može prikazati Taylorovim redom

$$f(z) = \sum c_n z^n \quad ,$$

možemo shvatiti kao operator

$$B = \sum c_n A^n$$

- a) Izrazite operator pomaka kao funkciju operatora deriviranja
 b) Izračunajte

$$Z_a = e^{iaZ} \quad , \quad a \in \mathbb{R}$$

gdje Z operator zrcaljenja, a i imaginarna jedinica.

- c) Izračunajte vlastite funkcije i vlastite vrijednosti operatora Z_a

11. listopada 2011.