10. predavanje

Vladimir Dananić

5. prosinca 2011.

Sadržaj

Magnetski dipol u magnetskom polju

Nabijena čestica u gibanju proizvodi struju. U atomima i molekulama gibanje je elektrona prostorno ograničeno zato što se elektron nalazi u vezanom stanju. Električna će struja, koju elektron proizvodi svojim gibanjem, biti također "ograničena", tj. nalikovat će strujnoj petlji. Ako se čestica naboja q brzinom $\vec{v}$ giba u *statičkom* magnetskom polju $\vec{B}$, tada na nju djeluje sila $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$. Ako imamo razdiobu naboja, onda moramo infinitezimalni naboj dq izraziti s pomoću gustoće naboja $\rho(\vec{r})$ kao $dq = \rho(\vec{r})d^3\vec{r}$, tako da za silu dobijemo izraz

$$\vec{F} = \int \rho(\vec{r})\vec{v} \times \vec{B}(\vec{r})d^3\vec{r} = \int \vec{j}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})d^3\vec{r} \tag{1}$$

Umnožak gustoće naboja i brzine jednak je gustoći struje $\vec{j}(\vec{r})$. Ako je magnetsko polje homogeno, onda ga u jednadžbi (1) možemo izlučiti izvan znaka integriranja, tako da nam ostaje samo integral gustoće struje po cijelome prostoru. No, taj integral iščezava za strujne petlje.

Magnetski dipol u magnetskom polju

Da bi sila $\vec{F}$ u jednadžbi (1) bila različita od 0 mora magnetsko polje biti nehomogeno. To znači da će sila ovisiti samo o derivacijama magnetskoga polja po prostornim koordinatama. Zadržavajući se samo na prvoj derivaciji magnetskoga polja, odnosno zanemarujući sve derivacije više od prve, može se pokazati da sila ima oblik $\vec{F} = -\vec{\nabla}(\vec{\mu}\cdot\vec{B})$, gdje je $\vec{\mu}$ magnetski moment:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\int \vec{r} \times \vec{j}(\vec{r}) d^3\vec{r} \qquad (2)$$

Magnetski se moment može shvatiti kao umnožak struje u petlji s površinom koju ta petlja zatvara. Pri tome mislimo na usmjerenu površinu. Naprimjer, elektron koji se kutnom brzinom ω vrti po kružnici polumjera r imat će magnetski moment jednak
$\mu = IS = -\frac{e}{T}\pi r^2 = -\frac{e\omega}{2\pi}\pi r^2 = -\frac{1}{2m}em\omega r^2 = -\frac{e}{2m}L$, gdje je L kutna količina gibanja elektrona.

Magnetski dipol u magnetskom polju

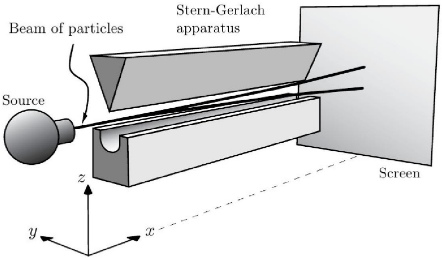
Budući da je kutna količina gibanja kvantizirana i da se mjeri u jedinicama $\hbar$, izraz za magnetski moment napisat ćemo u obliku:

$$\vec{\mu} = -\mu_B \frac{\vec{L}}{\hbar} \tag{3}$$

gdje je $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ Bohrov magneton. Potencijalna energija magnetskoga dipola u magnetskom polju jednaka je $W_m = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Magnetski će se dipol nastojati orijentirati u smjeru magnetskoga polja zato što mu je u tom položaju (tj. pri toj orijentaciji) potencijalna energija najniža. Međutim, samo će nehomogeno magnetsko polje utjecati na stazu čestice koja ima magnetski dipol. Ako snop čestica, koja svaka ima određeni magnetski moment, propustimo kroz područje nehomogenog magnetskog polja, snop će se rasipati. Po klasičnom shvaćanju, kutna količina gibanja može imati kontinuirane vrijednosti, pa bi se prema tome snop čestica trebao "razmazati" nakon prolaska kroz nehomogeno magnetsko polje. Za kvantiziranu količinu gibanja, snop će se rastaviti na neparan broj snopova.

Stern-Gerlachov pokus

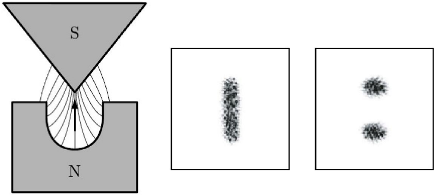
U Stern-Gerlachovu pokusu propuštamo snop atoma srebra kroz nehomogeno magnetsko polje.



Atom srebra ima 47 elektrona, od kojih su 46 elektrona spareni i čine nekakvu sferno simetričnu razdiobu naboja oko jezgre. Njihova ukupna kutna količina gibanja jednaka je 0. Zadnji, 47. elektron, ostaje nesparen, pa je njegova kutna količina gibanja jednaka ukupnoj kutnoj količini gibanja atoma. Jezgra također ima magnetski moment, ali on je znatno manji od magnetskoga momenta elektrona, pa ga možemo zanemariti. Pitanje: kako biste opravdali tvrdnju da je magnetski moment jezgre znatno manji od magnetskoga momenta elektrona?

Stern-Gerlachov pokus

Međutim, rezultati pokusa nisu u skladu s navedenim očekivanjem,



(a)
Magnetsko polje i njegov gradijent

(b)
Klasični rezultat

(c)
Rezultat stvarnog pokusa

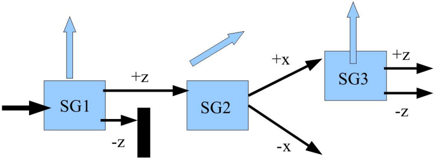
tj. na izlasku snopa iz magnetskoga polja nemamo ni "razmazani" snop niti imamo snop koji bi bio u skladu s kvantiziranom kutnom količinom gibanja. Izlazni se snop sastoji samo od **dvaju** snopova. Razumije se da u izboru osi, bilo da je to os z, x, ili y, nema ničeg posebnog. Jedna os vrijedna je koliko i svaka druga od preostalih dviju. Zato je dobro napraviti pokus u kojem ćemo jedan od snopova, recimo snop $-z$, zaustaviti, a snop $+z$ ćemo propustiti kroz drugo polje orijentirano po x osi. Budući da su te dvije osi međusobno okomite, očekujemo da će drugo magnetsko polje ostaviti ulazni snop, kojem su dipoli svi u smjeru $+z$, neometan. Ali, i to je pogrješno očekivanje!

Stern-Gerlachov pokus

Na izlazu iz drugog magneta opet dobijemo dva snopa. Isto bismo dobili da smo drugi magnet usmjerili po osi y. Kako to objasniti? Izgleda kao da je u propuštenom snopu iz prvog magneta, koji je bio orijentiran kao $+z$, bio podjednak broj atoma s dipolima orijentiranima kao $+x$, $-x$, $+y$ i $-y$. Možda bi treći magnet, orijentiran kao $-z$, jednoga od dvaju snopova iz drugoga magneta, ostavio neometanoga. Dakle, uzmimo snop $+x$, u kojemu nema $-z$ dipola, i propustimo ga kroz treći magnet koji je orijentiran kao $-z$. Na izlazu bi taj snop morao biti neometan, jer u njemu nema $-z$ snopa. Ali, opet dobijemo dva snopa!. Otkuda se je pojavio $-z$ snop, kojega ne bi smjelo biti jer smo ga odstranili na samom početku? Jedino objašnjenje cijele ove priče je da smo mjerenjem u drugom magnetu posve uništili informaciju dobivenu mjerenjem iz prvoga magneta. Na izlasku iz drugoga magneta snop je "zaboravio" što se je s njime dogodilo na izlasku iz prvoga magneta, te je "odlučio" opet imati podjednak broj $+z$ i $-z$ dipola. Budući da se **uvijek** pojavljuju dva snopa, tu dinamiku pojavljivanja i nestajanja, pa opet pojavljivanja određenih dipola

Stern-Gerlachov pokus

ne možemo objasniti prostornim varijablama. Za takav pokušaj morali bismo imati neparan broj snopova.



Kako to opisati matematičkim jednadžbama? Očite su sljedeće stvari:

1. Na izlasku iz $SG1$ snop $+z$ sadrži "linearni spoj" snopova $+x$ i $-x$, a isto tako i "linearni spoj" snopova $+y$ i $-y$.
2. Na izlasku iz $SG2$ snop $+x$, a isto tako i $-x$, sadrži "linearni spoj" snopova $+z$ i $-z$, odnosno $+y$ i $-y$.
3. Izbor jednoga od snopova iz $SG2$ potpuno uništava informaciju o snopovima što izađu iz $SG1$.

Stern-Gerlachov pokus

Pokušajmo to opisati ovakvim jednadžbama:

$$
\begin{aligned}
Snop(+z) &= a\, Snop(+x) + b\, Snop(-x) \\
Snop(-z) &= c\, Snop(+x) + d\, Snop(-x) \\
Snop(+z) &= e\, Snop(+y) + f\, Snop(-y) \\
Snop(-z) &= g\, Snop(+y) + h\, Snop(-y)
\end{aligned}
\tag{4}
$$

U sustav jednadžbi (4) uveli smo osam skalara a, b, c, d, e, f, g, h. Ti brojevi moraju imati **iste iznose**, naime $0,5$. Da bi snopovi, tj. **vektori** na jednoj te istoj osi, kojih imamo dva, bili međusobno linearno nezavisni, ti skalari, barem neki od njih, moraju biti kompleksni brojevi. Naime, ne postoji osam realnih brojeva, istih apsolutnih vrijednosti, s pomoću kojih bismo mogli zadovoljiti i uvjete nezavisnosti snopova i "statističke težine" tih snopova. Dakle, bez kompleksnih brojeva ne ide, pa ne ide. Prostor u kojem opisujemo stanje promatranoga sustava mora biti nekakav apstraktni kompleksni prostor. To je zaista zanimljiva posljedica Stern-Gerlachova pokusa.

Spin elektrona

Na kraju, što je s magnetskim momentom, veličinom s kojom smo započeli ovo razmatranje? Ustanovili smo da se magnetski moment atoma odnosi samo na onaj jedan, nespareni, elektron u atomu srebra? Vidimo da taj magnetski moment ne može biti ni klasična veličina ni kvantnomehanički operator koji bi odgovarao operatoru kutne količine gibanja. Zaključujemo da elektronu pripada nekakva intrisična veličina, algebarski slična kutnoj količini gibanja, ali s vlastitom vrijednošću $l = \frac{1}{2}$. Otkrili smo spin elektrona. Jedno sasvim apstraktno svojstvo algebre operatora kutne količine gibanja, koje se ne može realizirati s nekakvim kutnim varijablama i operatorima napravljenih s pomoću njih, dobilo je svoje najrealnije postojanje. Valna funkcija elektrona mora imati dvije sastavnice, tj. mora se prikazati kao vektor-stupac (ili redak) s dva retka (ili stupca). Njegov je magnetski moment jednak $\mu = -\frac{e\hbar}{2m}\vec{\sigma}$, gdje su $\vec{\sigma}$ Paulijeve matrice 2. reda. Hamiltonijan elektrona u magnetskom polju $\vec{B}$ sadržavat će dio jednak $-\vec{\mu}\cdot \vec{B}$.

Spin

Kažemo da elektron ima spin $\frac{1}{2}$. Valna funkcija elektrona ima oblik:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \Psi_+(\vec{r}, t) \\ \Psi_-(\vec{r}, t) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Ako operator hamiltonijana ne sadržava dio koji bi "pomiješao" sastavnice Ψ_+ i Ψ_-, tada obje sastavnice zadovoljavaju istu jednadžbu. Takav primjer imamo u vodikovu atomu, gdje elektrostatska potencijalna energija ne sadrži ništa što bi pomiješalo te dvije sastavnice. Tada možemo valnu funkciju napisati jednostavno kao umnožak nekakve valne funkcije $\Psi(\vec{r}, t)$ i spinske valne funkcije $\chi = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, gdje su a i b neki kompleksni brojevi. Spin elektrona jednak je $\vec{s} = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}$, tako da za elektron u magnetskom polju imamo dio u hamiltonijanu koji je jednak

$$H_m = -\vec{\mu}\vec{B} = -\frac{g(-e)\hbar}{2m}\frac{\vec{s}}{\hbar} = -\mu_B\vec{\sigma}\vec{B} \tag{6}$$

gdje je $g = 2$ tzv. g-faktor.

Spin elektrona

Rezultat kvantne teorije polja je da g-faktor za elektron nije jednak točno 2, nego je malo različit: $g \approx 2,0023$. Po klasičnoj bi teoriji g-faktor trebao biti točno 1. I ostale čestice u atomu–proton i neutron–imaju također spin $\frac{1}{2}$, ali i sasvim različite g-faktore. K tomu, naboj neutrona jednak je 0. Međutim, proton i neutron imaju strukturu–sastoje se od kvarkova–tako da različitost njihovih g-faktora međusobno i s elektronom dolazi od različitosti njihova sastava. Za elektron ne znamo pouzdano je li to točkasta čestica, ili i on ima nekakvu strukturu. Međutim, njegov je g-faktor vrlo blizak faktoru za točkaste čestice spina $\frac{1}{2}$.

Zadatci

1. Dokažite jednakost $(\vec{\sigma}\vec{a})(\vec{\sigma}\vec{b}) = \vec{a}\vec{b} + i\vec{\sigma}(\vec{a} \times \vec{b})$.
2. Nađite vlastite vrijednosti i vlastite vektore operatora $\vec{s}\vec{n}$, gdje je $\vec{n}^2 = 1$ neki jedinični vektor.
3. Ako je spin elektrona u odnosu na os zadanu jediničnim vektorom $\vec{n}$ jednak $\frac{\hbar}{2}$, kolika je njegova vrijednost u odnosu na os zadanu jediničnim vektorom $\vec{m}$, koji s vektorom $\vec{n}$ zatvara kut θ?
4. Navedite sve vlastite funkcije koje pripadaju drugom pobuđenom stanju vodikova atoma, a spin elektrona je u smjeru jediničnoga vektora $\vec{n}$.