



Sveučilište u Zagrebu  
Fakultet kemijskog  
inženjerstva i tehnologije

*Zavod za mehaničko i toplinsko procesno inženjerstvo*

# ***Procesi prijenosa i separacija***

III. PREDAVANJE

## Transport Phenomena and Separation Processes

*Ak. god. 2019./2020.*

**Zagreb, 12. ožujka 2020.**

## Optjecanje

Optjecanje jest relativno gibanje čvrstog tijela i fluida (postoji relativna brzina između čvrstog tijela i fluida).

Optjecanjem nazivamo gibanje čvrstog tijela u mirujućem fluidu poradi gravitacije ili druge sile, ali i opstrujavanje fluida oko čvrstih tijela koja miruju.

Svakom fenomenu, tako i ovom protive se određeni otpori.

**SVEPRISUTNOST ODREĐENIH  
OTPORA U HIDRODINAMSKIM  
SUSTAVIMA!!!**

*Hidrodinamički režim u ovakvim se sustavima definira primjenom Reynoldsove bezdimenzijske značajke za optjecanje:*

$$Re = \frac{vd_{\check{c}}\rho_f}{\eta_f}$$

U slučaju prisutnosti *nesferičnih tijela*  
hidrodinamički režim definiran je s:

$$Re = \frac{vd_{\text{ekv.}}\rho_f}{\eta_f}$$

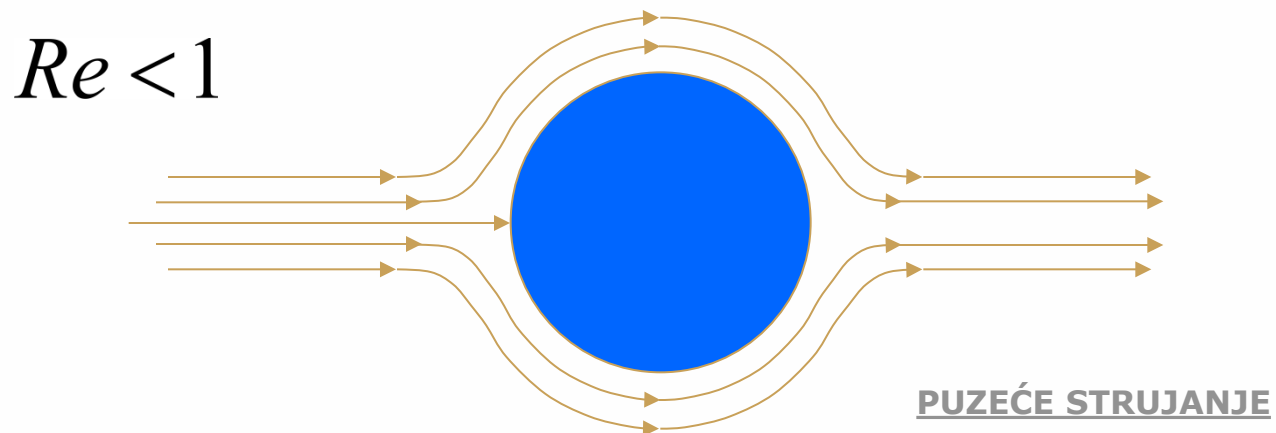
$$V_{\text{kugle}} = \frac{d_{\text{ekv.}}^3 \pi}{6} = V_{\text{tijela}}$$

$$d_{\text{ekv.}} = \sqrt[3]{\frac{6V_{\text{tijela}}}{\pi}}$$

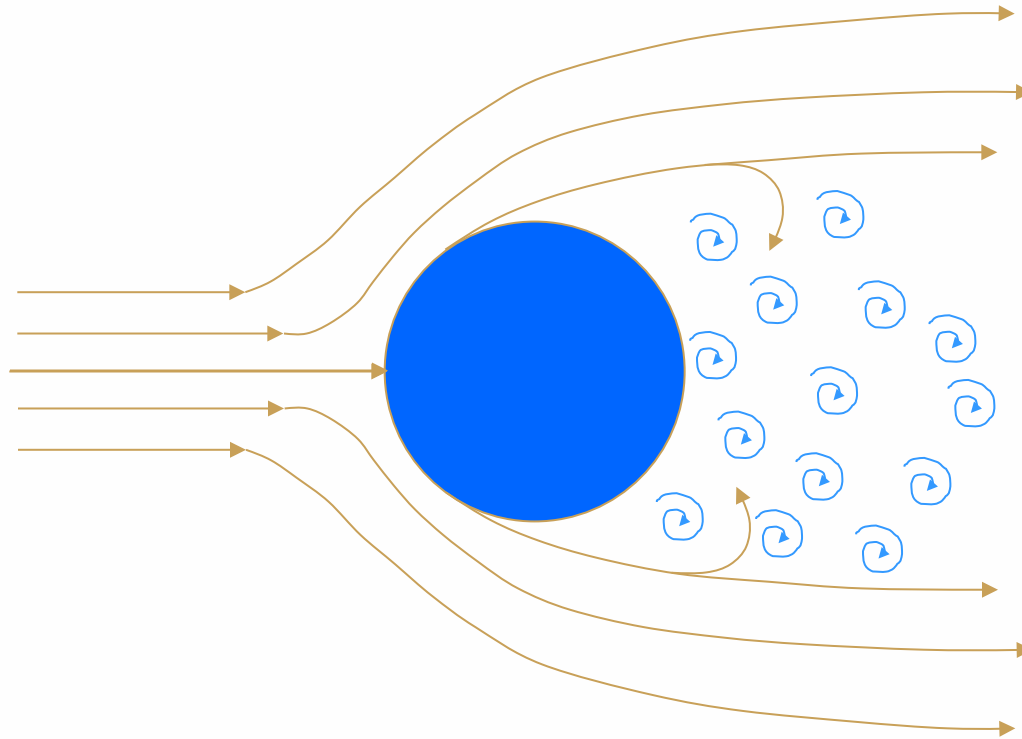
**EKVIVALENTNI PROMJER**  
PROMJER ONE KUGLE KOJA  
IMA *ISTI VOLUMEN* KAO I  
PROMATRANO TIJELO  
NEPRAVILNOG OBLIKA

Pri optjecanju prisutna su dva granična slučaja:

- i. Isti oblik čvrstog tijela, različite brzine strujanja fluida (različiti hidrodinamički uvjeti iskazani  $Re$  značajkom),

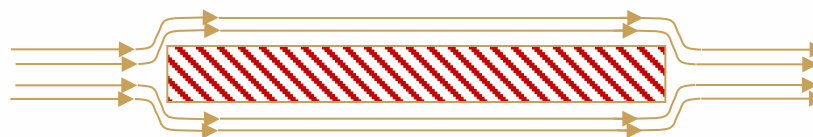


$Re > 1$



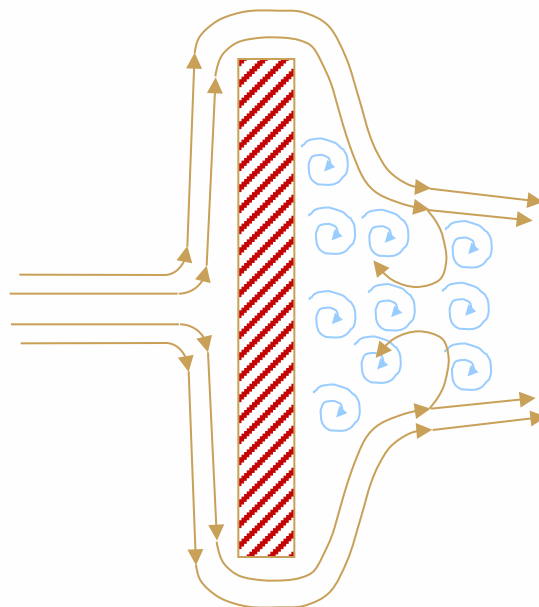
INTENZIVNO  
KOVITLANJE FLUIDA  
DOLAZI DO POJAVE  
VRTLOŽENJA

- ii. Ista brzina strujanja (isti hidrodinamički uvjeti odnosno isti  $Re$ ), različit oblik čvrstog tijela.



**PUZEĆE STRUJANJE  
U SLUČAJU POGODNIH  
OBLIKA TIJELA**

## U SLUČAJU NEPOGODNIH OBLIKA





Kod malih  $Re$  i pogodnog oblika čvrstog tijela egzistira *puzeće strujanje* (podsjeća na slojevito strujanje fluida pri fenomenu protjecanja). Dominira otpor viskoznog trenja. Međutim, uvijek je prisutan i otpor oblika – bitna razlika u odnosu na fenomen protjecanja.

Kod velikih  $Re$  i nepogodnih oblika egzistira naglo skretanje strujnica fluida te pojava vrtloženja. Dominira otpor oblika.

Pri optjecanju također dolazi do nepovratnog gubitka energije poradi prisutnosti određenih otpora u ovakvom hidrodinamskom sustavu. To su: viskozno trenje (viskoznost) te otpor oblika.

Pri iskazivanju nepovratnog gubitka energije pri optjecanju koristimo se izračunom sile otpora,  $F_D$ .

$$F_D = F_{tr.} + F_i$$

**UKUPNA SILA OTPORA**  
ISKAZ NEPOVRATNOG  
GUBITKA ENERGIJE U  
OVAKOVIM SUSTAVIMA

**SILA TRENJA**  
UGRAĐEN DOPRINOS  
OTPORA VISKOZNOG  
TRENJA ODNOSNO  
GUBITKA *TLAČNE*  
*ENERGIJE* U SUSTAVU  
PORADI POSTOJANJA  
VISKOZNOSTI FLUIDA

**SILA INERCIJE (SILA  
OTPORA OBLIKA)**  
UGRAĐEN DOPRINOS  
INERCIJSKOG OTPORA  
ODNOSNO GUBITKA  
*KINETIČKE ENERGIJE*  
PROMATRANOG  
SUSTAVA PORADI  
POSTOJANJA OTPORA  
OBLIKA

Laminarno područje

$$Re < 1$$

Vrijedi *Stokesov* izraz za silu otpora:

$$F_D = 3\pi\eta d_{\check{c}} v$$

2/3 SILA TRENJA  
DOPRINOS OTPORA  
VISKOZNOG TRENJA

1/3 SILA INERCIJE  
DOPRINOS OTPORA  
OBLIKA

Za sva područja (bilo koji  $Re$ )

$$F_D = f(v, \rho_f, \eta_f, d_{\check{c}}, \psi)$$

NJIHOV DOPRINOS UGRAĐEN U  
REYNOLDSOV BEZDIMENZIJSKI  
ODNOS

$$\psi = \frac{S_{\text{kugle}}}{S_{\text{tijela nepr. oblika istog volumena}}}$$

OBLIK PROMATRANOG TIJELA  
ISKAZUJEMO PRIPADAJUĆIM  
SFERICITETOM (NJEHOVOM  
SFERIČNOŠĆU)

Za sva područja (bilo koji  $Re$ ) vrijedi:

IZRAZ DOBIVEN RAYLEIGHOVOM METODOM  
DIMENZIJSKE ANALIZE

$$f(Re, \psi) = \frac{C_D}{2}$$

$$F_D = C_D A \frac{v^2 \rho_f}{2}$$

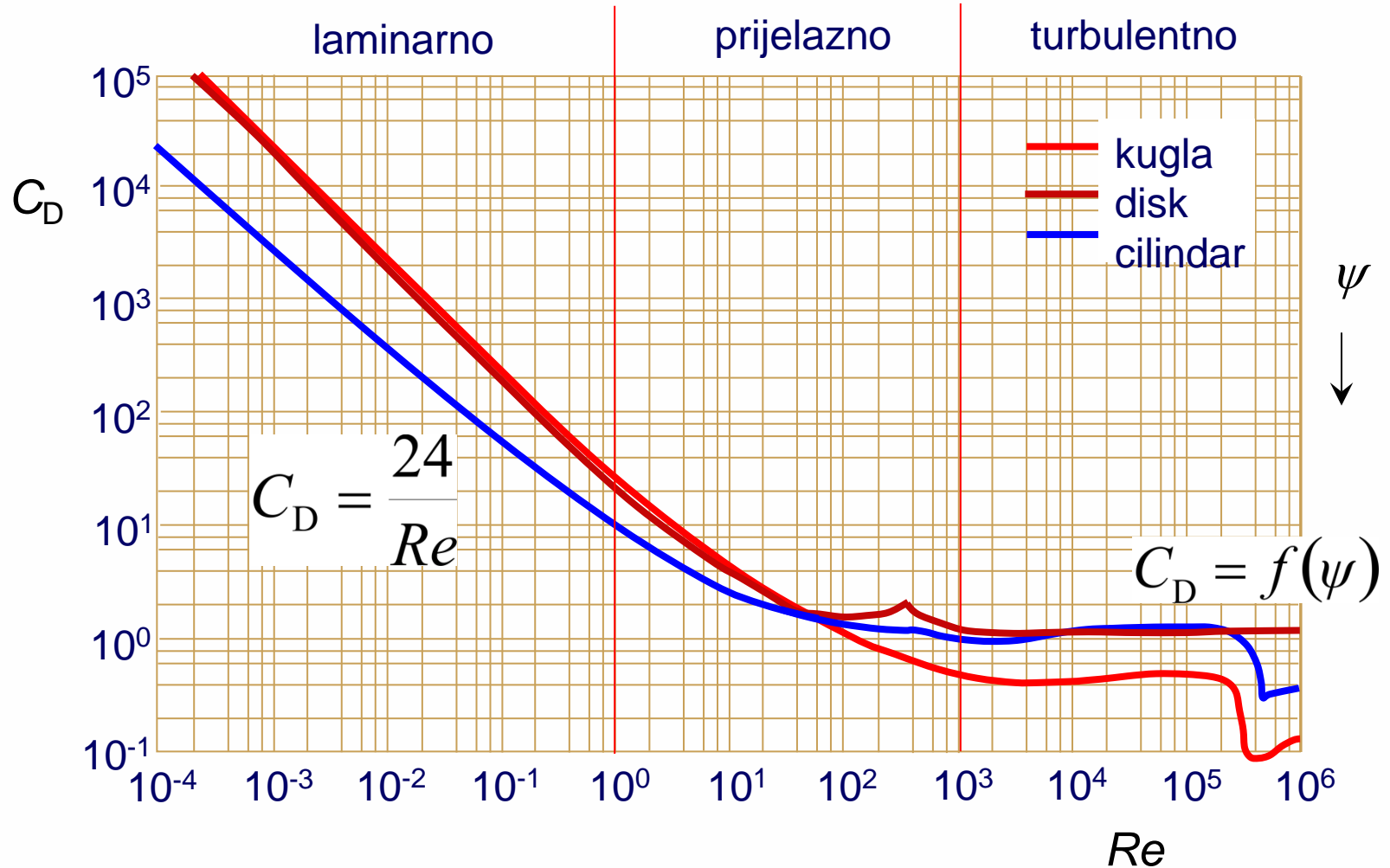
DINAMIČKI TLAK KAPLJEVINE  
ODNOSNO KINETIČKA ENERGIJA  
SUSTAVA I SKAZANA PO JEDINICI  
VOLUMENA PROCESNOG PROSTORA

FAKTOR OTPORA PRI OPTJECANJU  
UKUPNOST OTPORA PRI  
OPTJECANJU

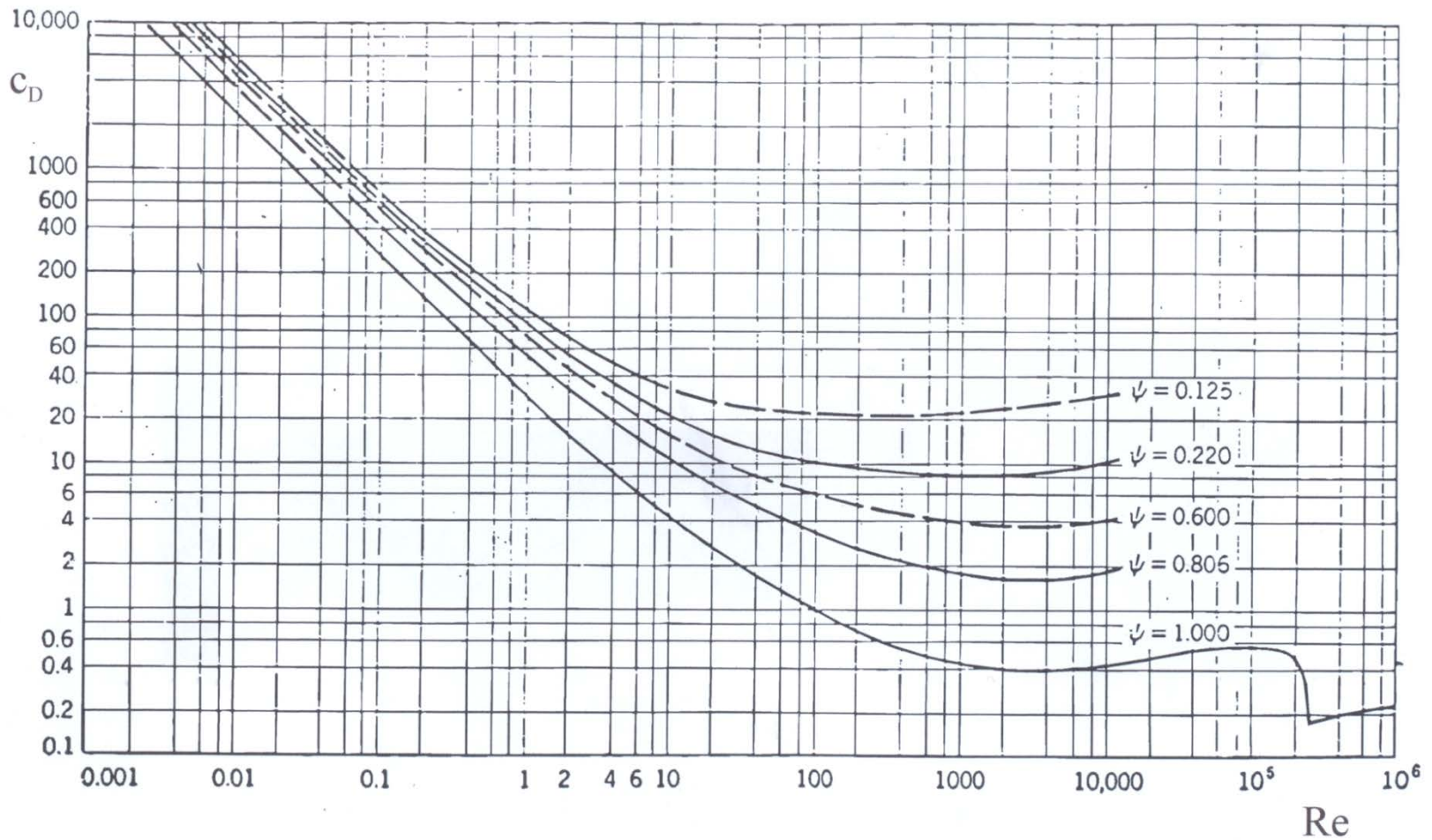
GEOMETRIJSKA KARAKTERISTIKA  
PROMATRANOG SUSTAVA

$$C_D = f(Re, \psi)$$

$$C_D = f(Re, \psi)$$



$$C_D = f(Re, \psi)$$



Laminarno područje

$$Re < 1$$

$$3\pi\eta d_{\check{c}}v = C_D \frac{d_{\check{c}}^2 \pi v^2 \rho_f}{4 \cdot 2}$$

$$C_D = \frac{24\eta_f}{vd_{\check{c}}\rho_f}$$

$$C_D = \frac{24}{Re}$$



Pri laminarnom hidrodinamičkom režimu:  $Re < 1$

- i. *količina gibanja* prenosi se molekularnim mehanizmom,
- ii. nepovratni gubitak energije jest posljedica postojanja viskoznog trenja ( $\eta$ ) s  $2/3$  doprinosom i prisutnosti otpora oblika ( $\psi$ ) s  $1/3$  doprinosom.

Pri prijelaznom hidrodinamičkom režimu:  $1 < Re < 10^3$

- i. *količina gibanja* prenosi se molekularnim i vrtložnim mehanizmom,
- ii. nepovratni gubitak energije jest posljedica postojanja viskoznog trenja ( $\eta$ ) i otpora oblika ( $\psi$ ) s znatno većim doprinosom.

Pri području razvijene turbulencije:  $Re > 10^3$

- i. *količina gibanja* prenosi se isključivo vrtložnim mehanizmom,
- ii. nepovratni gubitak energije jest posljedica isključivo otpora oblika ( $\psi$ ).

$$C_D = f(\psi)$$

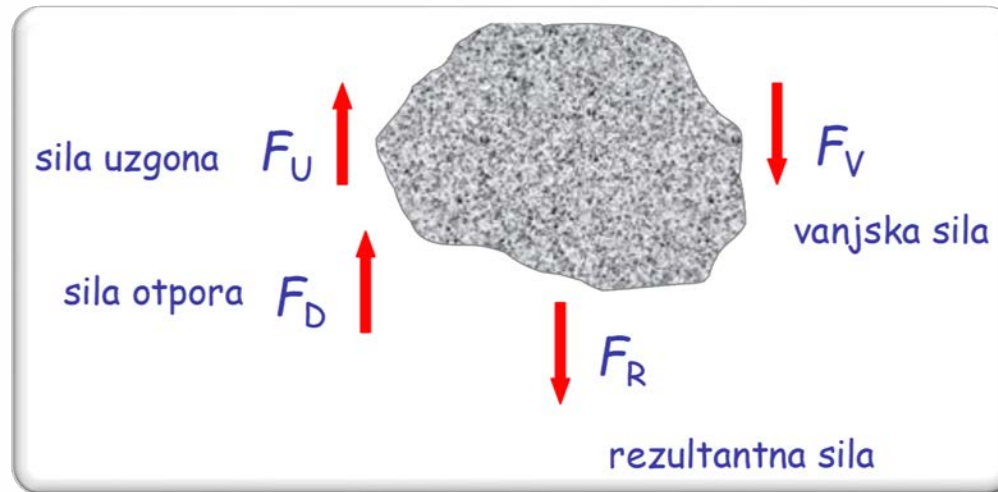
**OTPOR OBLIKA JEST PRISUTAN U ČITAVOM PODRUČJU  $Re$  (PRI SVIM HIDRODINAMIČKIM UVJETIMA U SUSTAVU)!**

**OBA UZROKA GUBITKA ENERGIJE SU ISTOVREMENO PRISUTNI U LAMINARNOM I PRIJELAZNOM PODRUČJU!**

**BITNA JE TO DIFERENCIJA U ODNOSU NA MOODYEV DIJAGRAM!**

<u>FENOMEN PRIJENOSA</u>	<u>MOLEKULARNI MEHANIZAM PRIJENOSA</u>	<u>MOLEKULARNI &amp; VRTLOŽNI MEHANIZAM PRIJENOSA</u>	<u>VRTLOŽNI MEHANIZAM PRIJENOSA</u>
<b><i><u>PRIJENOS KOLIČINE GIBANJA U FLUIDIMA</u></i></b>	<b>Laminarno strujanje (laminarni hidrodinamički režim)</b>	<b>Prijelazno i turbulentno strujanje</b>	<b>Izrazito turbulentno strujanje (razvijena turbulencija)</b>

Promotrimo *nesmetano* taloženje čvrste čestice u fluidu:



$$F_R = m \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$F_u = m_{\text{fluida}} \cdot a = \frac{m_{\text{čestice}} \cdot \rho_{\text{fluida}}}{\rho_{\text{čestice}}} \cdot a$$

$$F_v = m \cdot a$$

$$F_D = C_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} = C_D \cdot \underbrace{\frac{d^2 \cdot \pi}{4}}_{\text{za kuglu}} \cdot \frac{v^2 \rho}{2}$$

$$\sum_{i=1}^N F_i = 0$$

$$m_{\check{c}} \cdot \frac{dv}{dt} = m_{\check{c}} \cdot a - \frac{m_{\check{c}}}{\rho_{\check{c}}} \cdot \rho_f \cdot a - C_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \cdot \rho_f}{2} / \div m_{\check{c}}$$

$$\frac{dv}{dt} = a - \frac{\rho_f}{\rho_{\check{c}}} \cdot a - C_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \cdot \rho_f}{2 \cdot m_{\check{c}}} \quad \frac{dv}{dt} = a \cdot \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_{\check{c}}}\right) - C_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \cdot \rho_f}{2 \cdot m_{\check{c}}}$$

$$\left(1 - \frac{\rho_f}{\rho_{\check{c}}}\right) \cdot g = C_D \cdot A \cdot \frac{v^2 \cdot \rho_f}{2 \cdot m_{\check{c}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{4 \cdot d_{\check{c}} \cdot (\rho_{\check{c}} - \rho_f) \cdot g}{3 \cdot \rho_f \cdot C_D}}$$

Za sva područja (bilo koji  $Re$ )

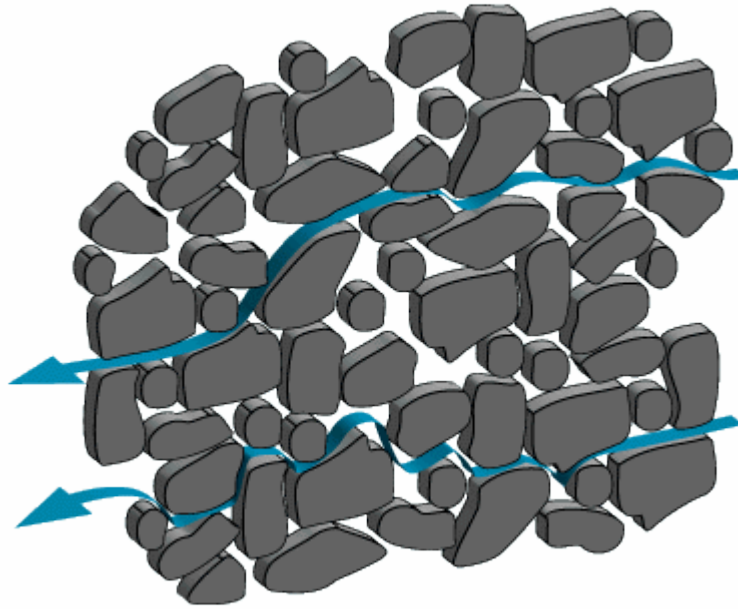
$$C_D = \frac{24}{Re} = \frac{24 \cdot \eta}{v \cdot d_{\check{c}} \cdot \rho_f}$$

$$v = \frac{d_{\check{c}}^2 \cdot (\rho_{\check{c}} - \rho_f) \cdot g}{18 \cdot \eta}$$

*Stokesov* zakon za brzinu padanja čvrstih čestica u laminarnom području pod djelovanjem grav. polja

## Strujanje kroz poroznu sredinu (strukturu) odnosno sloj čestica

POKRETAČKA SILA  
FENOMENA  
(Razlika tlaka,  $\Delta p$ )



SLIKOVITI PRIMJER

Ovaj fenomen jest osnova raznih jediničnih operacija:  
i.operacije separacije u sustavima čvrsto–kapljevito (filtracija),  
ii.operacije kontaktiranja čvrsto–fluid (fluidizacija).

Svakom fenomenu, tako i ovom protive se određeni otpori.

Pri strujanju fluida kroz sloj čestica također dolazi do nepovratnog gubitka energije poradi prisutnosti određenih otpora u ovakvom hidrodinamskom sustavu.

To su: viskozno trenje (viskoznost fluida) te otpor čestica pakiranih u promatranom sloju, a iskazan gustinom njihova pakovanja u sloju i geometrijom takove porozne strukture.

Pri iskazivanju nepovratnog gubitka energije pri ovom fenomenu koristimo se izračunom pada tlaka,  $\Delta p$ .

*Hidrodinamički režim* u ovakvim se sustavima također definira primjenom *Reynoldsove bezdimenzijske značajke*:

$$Re = \frac{2}{3} \frac{v_a d_{\check{c}} \rho_f}{(1 - \varepsilon_{sl.}) \eta_f}$$





Ovakav sustav (sloj čestica – višeslojni porozni medij) jest uistinu kompleksan za svoje geometrijsko opisivanje budući:

- i. se sastoji od čestica različitih veličina i oblika,
- ii. u njemu egzistira veliki broj pora nepravilnih oblika (to nisu cilindrični međuprostori), različitih dužina i promjera.

*Geometrija ovakvih poroznih struktura utječe na hidrodinamički režim u sustavu!*

Prema tome, geometriju ovakvog kompleksnog sustava i pripadajuće brzine fluida valja definirati/determinirati mjerodavnim (relevantnim) veličinama:

poroznošću sloja, brojem čestica u sloju, prikladnim promjerom pora, specifičnom površinom pora te površinskom brzinom fluida.

## Poroznost sloja

– vol. udio pora (šupljina)/međučestičnog prostora u poroznom sloju/poroznoj strukturi

$$\varepsilon_{\text{sloja}} = \frac{V_{\text{pora}}}{V_{\text{sloja}}}$$

$$V_{\text{uk. sloja}} - V_{\text{uk. sloja}} \varepsilon_{\text{sloja}} = V_{\text{uk. sloja}} (1 - \varepsilon_{\text{sloja}}) = V_{\text{svih čestica u poroznoj strukturi}}$$

  
**GUSTINA PAKOVANJA ČESTICA U SLOJU**

## Promjer pora

– budući su pore nepravilnog oblika uvodi se ekvivalentni promjer pora

**HIDRAULIČKI RADIJUS**

$$d_{\text{ekv.}} = 4 \frac{A_p}{O} = 4 \frac{A_p l}{O l} = 4 \frac{V_p}{S_{\text{uk.}}} = 4 \frac{\frac{V_p}{V_{\text{sl.}}}}{\frac{S_{\text{uk.}}}{S_V}} = 4 \frac{\varepsilon_{\text{sloja}}}{S_V}$$

**POVRŠINA POPREČNOG PRESJEKA PORA**

*Broj čestica u sloju čvrstoga*

$$n = \frac{V_{\text{sloja}} (1 - \varepsilon_{\text{sloja}})}{V_{\text{jedne čestice}}} = \frac{A_{\text{sloja}} l (1 - \varepsilon_{\text{sloja}})}{\frac{d_{\check{c}}^3 \pi}{6}}$$

### Specifična površina pora

- jest *cjelokupna slobodna površina unutar sloja* iskazana po jedinici volumena ukupnog sloja
- slobodna površina unutar sloja jest ekvivalentna *vanjskoj površini svih čestica/jedinki* koje tvore dani sloj/poroznu strukturu

$$S_V = \frac{S_{\text{svih čestica u sloju}}}{V_{\text{sloja}}} = \frac{nS_{\text{jedne čestice}}}{V_{\text{sloja}}} = \frac{\frac{A_{\text{sloja}} l (1 - \varepsilon_{\text{sloja}})}{d_{\check{c}}^3 \pi} d_{\check{c}}^2 \pi}{A_{\text{sloja}} l}$$

### *Površinska brzina fluida ( $v_A$ )*

- jest brzina kojom fluid nastrujava na površinu poroznog medija
- brzina kojom fluid struji kroz pore ( $v_p$ ) jest bitno različita od one kojom nastrujava na porozni medij ( $v_A$ )

$$v_A A_{\text{sloja}} = A_p v_p$$

$$v_A = v_p \frac{A_p}{A_{\text{sloja}}} \frac{l}{l} = v_p \frac{V_p}{V_{\text{sloja}}} = v_p \varepsilon_{\text{sloja}}$$

$$\Delta p \cdot A_p = n \cdot F_D$$

$$\Delta p \cdot A_{\text{sloja}} \cdot \varepsilon_{\text{sloja}} = \frac{A_{\text{sloja}} l (1 - \varepsilon_{\text{sloja}})}{\frac{d_{\check{c}}^3 \pi}{6}} C_D \frac{d_{\check{c}}^2 \pi}{4} \frac{v_p^2 \rho_f}{2}$$

$$\Delta p = \frac{3}{2} C_D \frac{1 - \varepsilon_{\text{sloja}}}{\varepsilon_{\text{sloja}}^3} \frac{l}{d_{\check{c}}} \frac{v_A^2 \rho_f}{2}$$

FAKTOR OTPORA STRUJANJU KROZ  
POROZNI SLOJ

$$C_D' = f(Re')$$

DANI IZRAZ VRIJEDI ZA BILO KOJI  
HIDRODINAMIČKI REŽIM U  
SUSTAVU

ODNOSNO ZA ŠIROKE I USKE PORE  
U DANOM SLOJU ČVRSOGA



Geometrija poroznih struktura utječe na hidrodinamički režim u sustavu!

Pri prolazu fluida kroz uske pore strujanje jest laminarno.

*Carman-Kozenyjeva jednadžba*

$$C_D' = \frac{160}{Re'}$$

$$\frac{\Delta p}{l} = 180 \frac{(1 - \varepsilon_{\text{sloja}})^2}{\varepsilon_{\text{sloja}}^3} \frac{v_A \eta_f}{d_{\check{c}}^2}$$

Predložena: Kozeny (1927)<sup>1</sup>

Modificirana: Carman (1937)<sup>2</sup>, (1956)<sup>3</sup>

1. J. Kozeny, Ueber kapillare Leitung des Wassers im Boden, Sitzungsber Akad. Wiss., Wien, **136(2a)** (1927) 271–306.
2. P.C. Carman, Fluid flow through granular beds, Transactions, Institution of Chemical Engineers, London, **15** (1937) 150–166.
3. P.C. Carman, Flow of gases through porous media, Butterworths, London (1956).

Pri prolazu fluida kroz široke pore strujanje jest turbulentno.

*Burke-Plummerov izraz:*

$$C_D' = 2,3$$

$$\frac{\Delta p}{l} = 1,75 \frac{(1 - \varepsilon_{\text{sloja}}) v_A^2 \rho_f}{\varepsilon_{\text{sloja}}^3 d_{\check{c}}}$$

*Ergunova jednadžba*

$$\frac{\Delta p}{l} = 180 \frac{(1 - \varepsilon_{\text{sloja}})^2}{\varepsilon_{\text{sloja}}^3} \frac{v_A \eta_f}{d_{\check{c}}^2} + 1,75 \frac{(1 - \varepsilon_{\text{sloja}}) v_A^2 \rho_f}{\varepsilon_{\text{sloja}}^3 d_{\check{c}}}$$

**OVISNOST FAKTORA OTPORA O REYNOLDSOVOJ ZNAČAJCI PRI STRUJANJU FLUIDA KROZ SLOJ ČESTICA**

