



Sveučilište u Zagrebu
Fakultet kemijskog
inženjerstva i tehnologije

Zavod za mehaničko i toplinsko procesno inženjerstvo

Procesi prijenosa i separacija

II. PREDAVANJE

Transport Phenomena and Separation Processes

Ak. god. 2019./2020.

Zagreb, 5. ožujka 2020.

Fenomen prijenosa količine gibanja

U okviru ovog kolegija,
bit će sagledana
isključivo tematika

**prijenosa količine gibanja u fluidima
odnosno pri gibanju fluida
(u *hidrodinamskim sustavima*).**

Mehanika fluida

Kada se govori o prijenosu količine gibanja u *hidrodinamskim sustavima* uobičajeno jest razmatrati četiri karakteristična slučaja gibanja fluida:

- i. PROTJECANJE,
- ii. OPTJECANJE,
- iii. STRUJANJE FLUIDA U MIJEŠALICI,
- iv. STRUJANJE FLUIDA KROZ POROZNU SREDINU (STRUKTURU) ODNOSNO KROZ SLOJ ČVRSTOGA.

Fenomen prijenosa količine gibanja

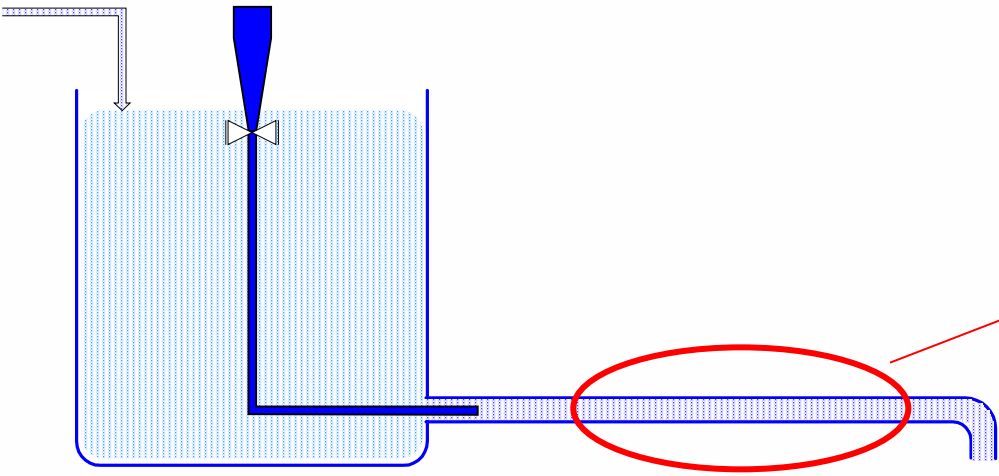
Protjecanje

Protjecanje jest strujanje fluida kroz cijev ili uređaj uslijed razlike tlakova.
Svakom strujanju fluida protive se određeni otpori.

**SVEPRISUTNOST ODREĐENIH
OTPORA U HIDRODINAMSKIM
SUSTAVIMA!!!**

Fenomen prijenosa količine gibanja

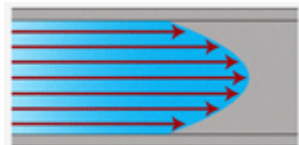
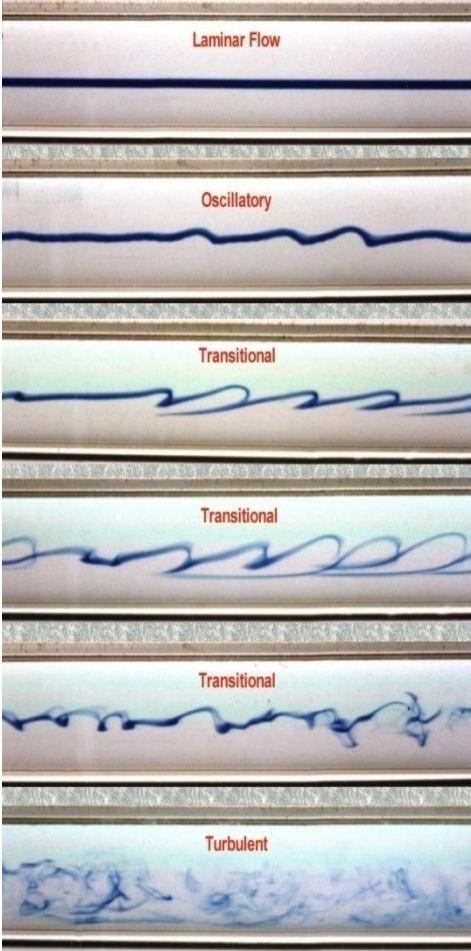
Osborne Reynolds



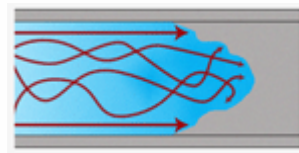
LAMINARNO

PRIJELAZNO

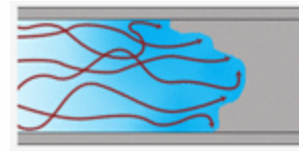
TURBULENTNO



LAMINARNO



PRIJELAZNO



TURBULENTNO

Vrste strujanja

Laminarno strujanje

- slojevito strujanje
- pri malim brzinama strujanja fluida
- nema miješanja među slojevima

Prijelazno strujanje

- djelomično remećenje slojevitog strujanja te posljedično miješanje među slojevima

Turbulentno strujanje

- vrtložno strujanje
- pri velikim brzinama strujanja fluida dolazi do miješanja među slojevima
- egzistira *neravnomjerno pulzacijsko gibanje jedinki fluida*

<u>FENOMEN PRIJENOSA</u>	<u>MOLEKULARNI MEHANIZAM PRIJENOSA</u>	<u>MOLEKULARNI & VRTLOŽNI MEHANIZAM PRIJENOSA</u>	<u>VRTLOŽNI MEHANIZAM PRIJENOSA</u>
<i>PRIJENOS KOLIČINE GIBANJA U FLUIDIMA</i>	Laminarno strujanje (laminarni hidrodinamički režim)	Prijelazno i turbulentno strujanje	Izrazito turbulentno strujanje (razvijena turbulencija)
<i>PRIJENOS TOPLINE</i>	Kondukcija	Prolaz topline	Konvekcija
<i>PRIJENOS TVARI</i>	Difuzija	-	Konvekcija

Reynolds je uočio da brzina strujanja fluida nije jedina koja utječe na *vrstu strujanja*.

Primijetio je da *vrstu strujanja* definiraju (određuju) i fizikalna svojstva fluida (gustoća, viskoznost) te linearna karakteristika promatranog sustava (promjer cijevi).

Pri protjecanju egzistiraju dvije sile: sila inercije & sila trenja.

Reynoldsova značajka jest upravo bezdimenzijski odnos sile inercije i sile trenja.

$$\frac{F_i}{F_{tr}} = \frac{m \cdot a}{\tau \cdot S} = \frac{(\rho \cdot \ell^3) \cdot \frac{v^2}{\ell}}{\eta \cdot \frac{v}{\ell} \cdot \ell^2} = \frac{v \cdot \ell \cdot \rho}{\eta} \longrightarrow Re = \frac{v \cdot \ell \cdot \rho}{\eta}$$

Vrstu strujanja u hidrodinamičkom sustavu definira Reynoldsova bezdimenzijska značajka.

Reynoldsova značajka definira hidrodinamičke uvjete u promatranom sustavu.

Pri protjecanju:

$Re < 2320$ egzistira laminarno strujanje

$Re > 2320$ prisutno prijelazno ili turbulentno strujanje

$$Re = \frac{v \cdot d \cdot \rho}{\eta}$$

Froudeova bezdimenzijska značajka jest upravo bezdimenzijski odnos sile inercije i sile gravitacije.

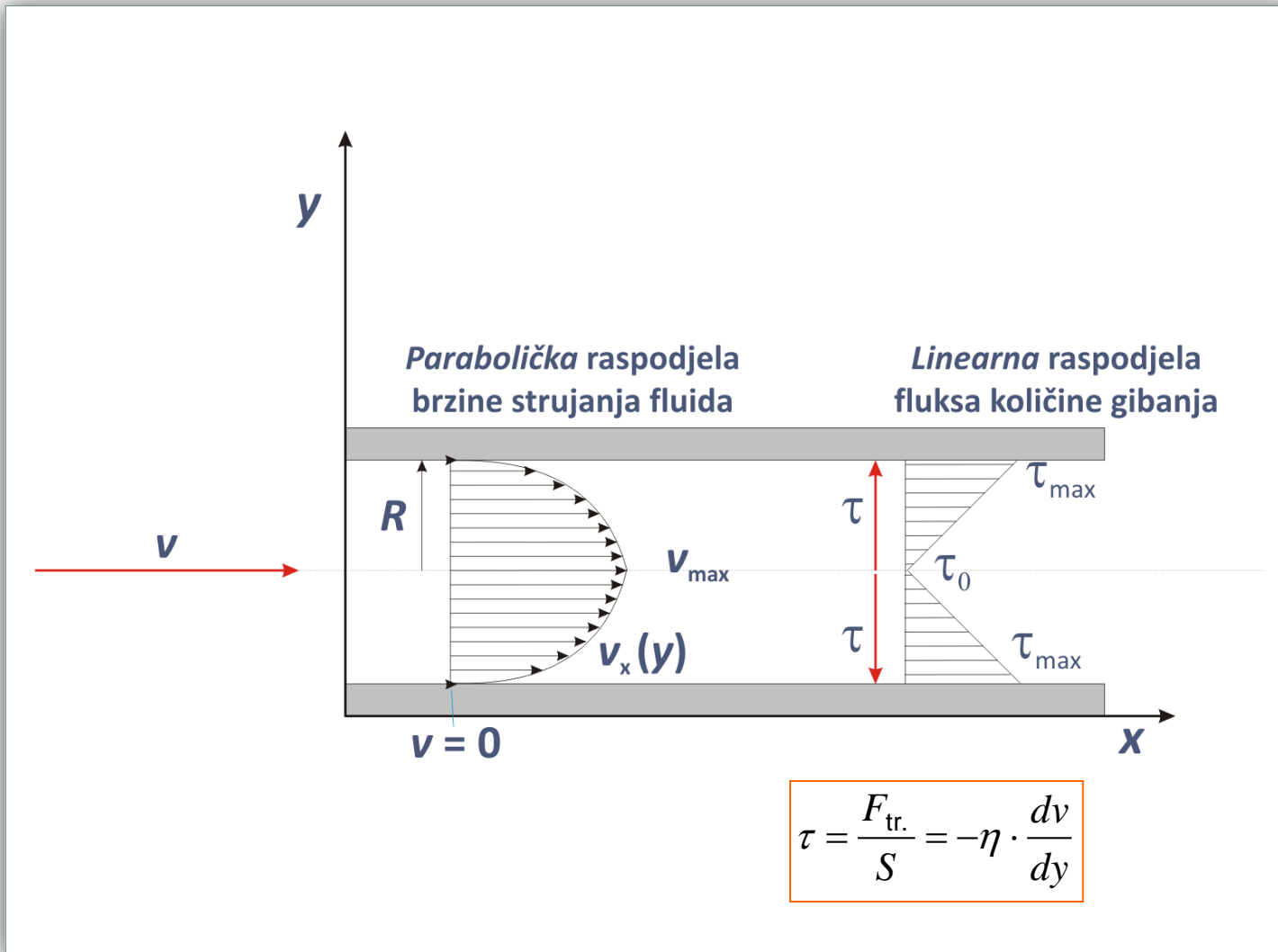
$$Fr = \frac{F_i}{F_g} = \frac{m \cdot a}{m \cdot g} = \frac{\frac{v^2}{l}}{g} = \frac{v^2}{l \cdot g} = \frac{v^2}{d \cdot g}$$

Eulerova bezdimenzijska značajka jest bezdimenzijski odnos tlačne sile i sile inercije.

$$Eu = \frac{\Delta p}{\rho \cdot v^2}$$

UKAZUJE NA KOLIČINU
NEPOVRATNO IZGUBLJENE
ENERGIJE U
HIDRODINAMSKOM
SUSTAVU

Pri laminarnom strujanju realnog fluida u ravnoj cijevi uspostavlja se određeni profil brzine – pojedini elementi fluida gibaju se različitim brzinama.



Gustoća toka količine gibanja

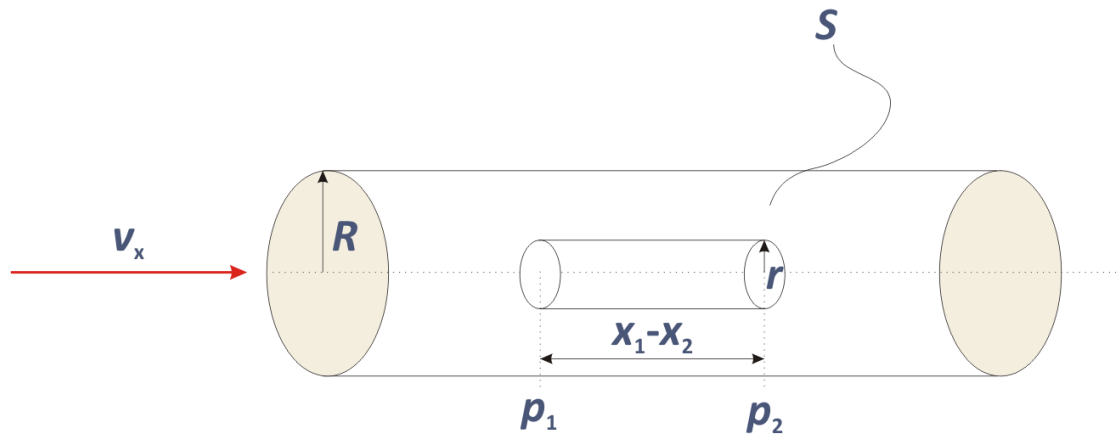
Newtonov zakon viskoznosti

$$\phi = \kappa \cdot \frac{\Delta}{y}$$

$$\tau = -\nu \cdot \frac{d(v \cdot \rho)}{dy}$$

- τ – smično naprezanje (fluks količine gibanja), N m^{-2} (Pa)
- ν – kinematička viskoznost, $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
- y – udaljenost između točaka, m
- $v\rho$ – količina gibanja po jedinici volumena, $\text{kg m}^{-2} \text{s}^{-1}$

Raspodjela brzina i fluksa količine gibanja pri laminarnom stacionarnom strujanju u horizontalnoj cijevi



$$X_v = \frac{m \cdot v}{V} = \rho \cdot v$$

STACIONARAN PROCES

$$V \cdot \frac{d(v \cdot \rho)}{dt} = \dot{V}_{ul.} \cdot (v \cdot \rho)_{ul.} - \dot{V}_{izl.} \cdot (v \cdot \rho)_{izl.} + \dot{V}_r$$

**NEMA GENERACIJSKOG
ČLANA**

**NEMA NASTAJANJA NI
NESTAJANJA KOLIČINE
GIBANJA**

$$\dot{V}_{ul.} \cdot (v\rho)_{ul.} = \dot{V}_{izl.} \cdot (v\rho)_{izl.}$$

SMISAO PRODUKTA

$$\dot{V} \cdot (v\rho) = \frac{V}{t} \cdot \frac{v \cdot m}{V} = \frac{v \cdot m}{t} = m \cdot a = F$$

Zakon očuvanja količine gibanja kaže da je suma svih sila koje djeluju u sustavu jednaka nuli:

$$\sum_{i=0}^N F_i = 0$$

Karakteristične sile koje se javljaju pri gibanju fluida:

Sila tlaka koja uzrokuje gibanje fluida brzinom v ,

Sila trenja koja se protivi strujanju fluida i uzrokuje gubitak energije koji ima za posljedicu (se manifestira) određenim padom tlaka u hidrodinamskom sustavu.

$$F_{p_1} = F_{p_2} + F_{tr}$$

$$p_1 \cdot A_1 = p_2 \cdot A_2 + \underbrace{\tau \cdot S}_{\text{trenje}}$$

$$\Delta p \cdot A = \tau \cdot S$$

$$A = r^2 \cdot \pi$$

$$S = 2 \cdot r \cdot \pi \cdot \Delta x$$

$$r^2 \cdot \pi \cdot p_1 - r^2 \cdot \pi \cdot p_2 = \tau \cdot (2 \cdot r \cdot \pi \cdot (x_2 - x_1))$$

$$r_1 = r_2 = r$$

$$r \cdot (p_1 - p_2) = 2 \cdot \tau \cdot (x_2 - x_1)$$

$$\tau = \frac{r}{2} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right)$$

**PAD TLAKA U HIDRODINAMSKOM
SUSTAVU ISKAZAN PO PUTU KOJI
JE PROŠAO DANI FLUID**

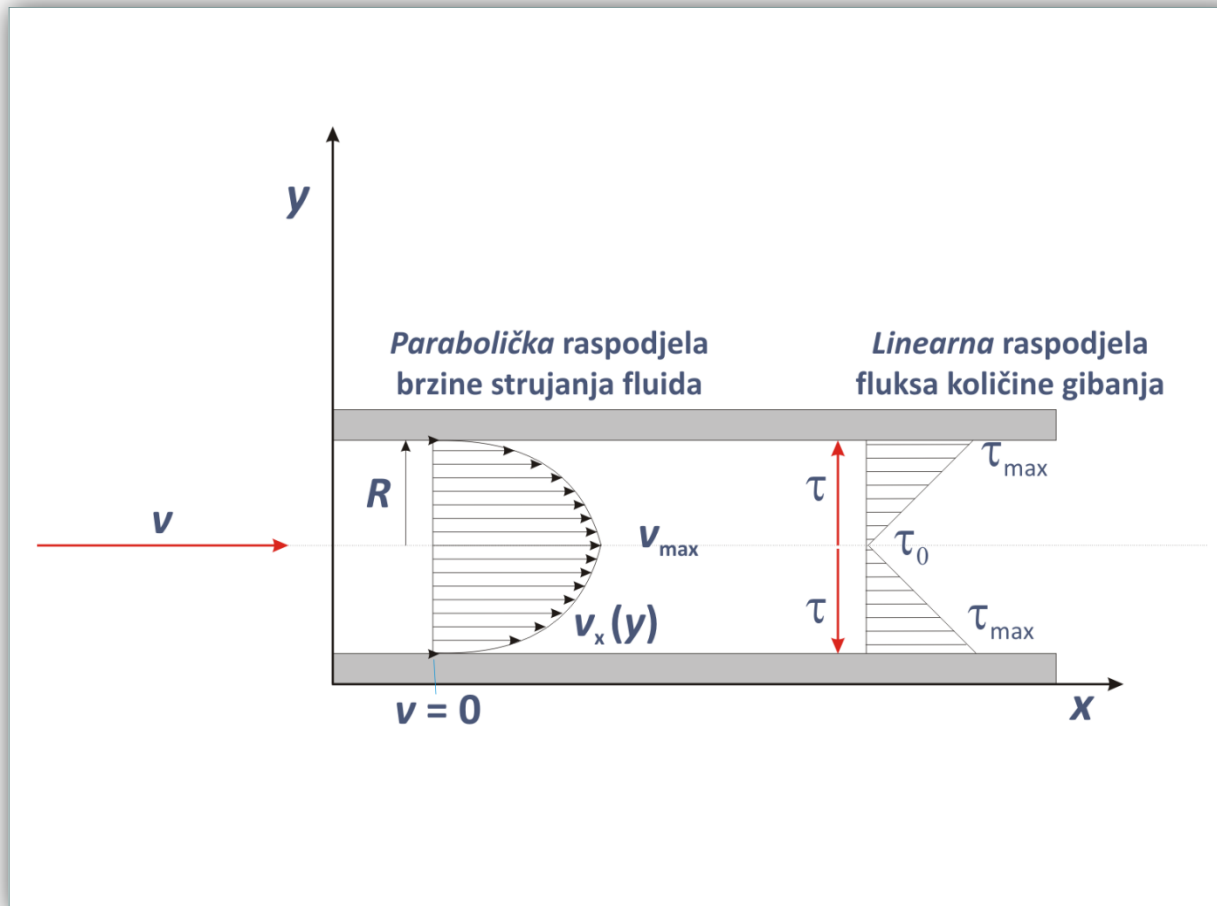
GRADIJENT TLAKA [Pa m⁻¹]

$$\tau = \frac{r}{2} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right)$$

Granični slučajevi uz pojedine rubne uvjete:

Za $r = 0$ (os cijevi, sr. cijevi) $\tau = \tau_{\min.} = 0$; $v_x = v_{\max.}$

Za $r = R$ (stijenka cijevi) $\tau = \tau_{\max.}$; $v_x = v_{\min.} = 0$



NEWTONOV ZAKON VISKOZNOSTI

$$-\eta \cdot \frac{dv}{dr} = \frac{r}{2} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right)$$

$$\int_0^v dv = -\frac{1}{2 \cdot \eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \int_R^r r dr$$

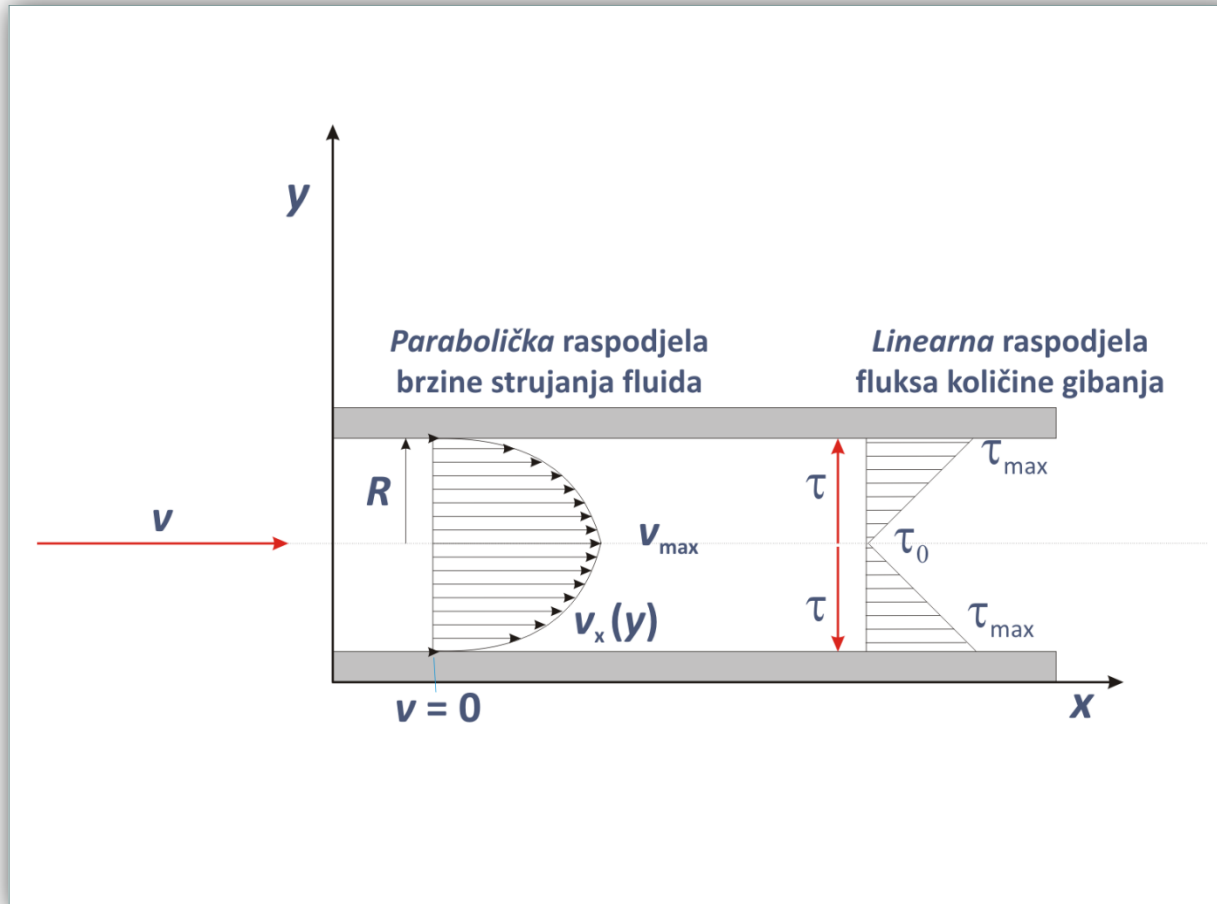
$$v_x(r) = -\frac{1}{4\eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot (R^2 - r^2)$$

$$v_x(r=0) = v_{\max} = \frac{1}{4 \cdot \eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot R^2$$

Granični slučajevi uz pojedine rubne uvjete:

Za $r = 0$ (os cijevi, sr. cijevi) $\tau = \tau_{\min.} = 0$; $v_x = v_{\max.}$

Za $r = R$ (stijenka cijevi) $\tau = \tau_{\max.}$; $v_x = v_{\min.} = 0$



$$\dot{V} = v_{\text{sr.}} R^2 \pi = \int_0^R 2r \pi dr v_x(r)$$

$$v_{\text{sr}} = \frac{1}{8\eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot R^2$$

$$v_{\text{max}} = \frac{1}{4 \cdot \eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot R^2$$

$$\frac{v_{\text{max}}}{v_{\text{sr}}} = 2$$

Gubitak energije pri laminarnom strujanju fluida u horizontalnoj cijevi

$$v_{\text{sr}} = \frac{1}{8\eta} \cdot \left(-\frac{dp}{dx} \right) \cdot R^2 \qquad - \int_{p_1}^{p_2} dp = \frac{8 \cdot \eta \cdot v_{\text{sr.}}}{R^2} \cdot \int_{x_1}^{x_2} dx$$

$$\underbrace{p_1 - p_2}_{\Delta p} = \frac{8 \cdot \eta \cdot v_{\text{sr.}}}{R^2} \cdot \underbrace{(x_2 - x_1)}_l \qquad R = \frac{d}{2}$$

**HAGEN-POISEUILLEOVA
JEDNADŽBA**

$$\Delta p = \frac{32 \cdot \eta \cdot l \cdot v_{\text{sr}}}{d^2}$$

Koju geometrijsku karakteristiku sustava primijeniti u izračunu pada tlaka odnosno Reynoldsove bezdimenzijske značajke ako presjek nije kružan???

$$\Delta p \cdot A = \tau \cdot S \qquad A = \frac{\tau \cdot O \cdot \ell}{\Delta p}$$

HIDRAULIČKI RADIJUS

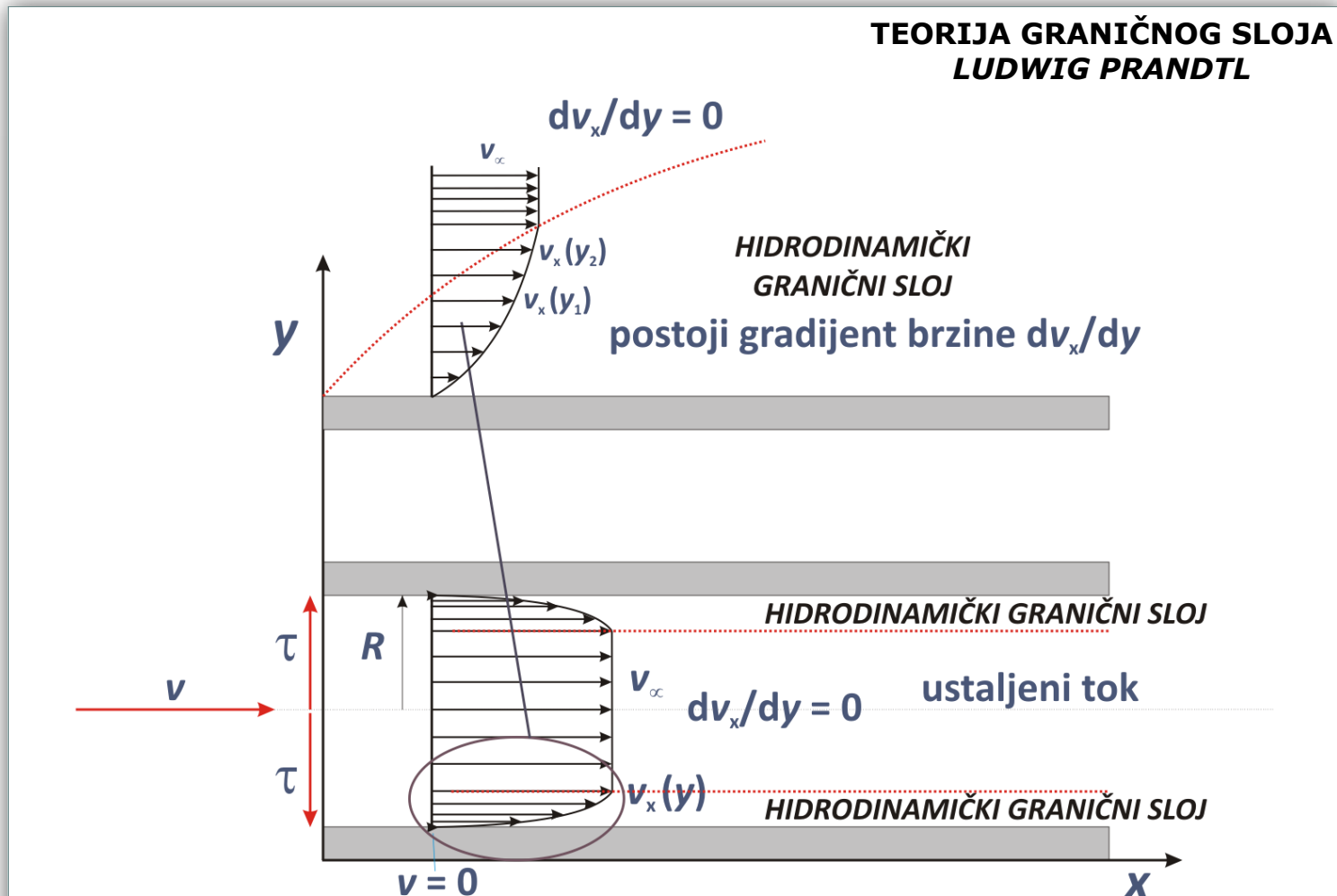
$$\frac{A}{O} = \frac{\tau \cdot \ell}{\Delta p}$$

$$\Delta p \cdot \underbrace{\frac{d^2 \cdot \pi}{4}}_A = \tau \cdot \underbrace{d \cdot \pi \cdot \ell}_S$$

$$d = 4 \cdot \frac{\tau \cdot \ell}{\Delta p} \qquad d_{ekv} = 4 \cdot \frac{A}{O}$$

EKVIVALENTNI PROMJER

Pri većim brzinama realnog fluida u ravnoj cijevi uspostavlja se drugačiji profil brzine.



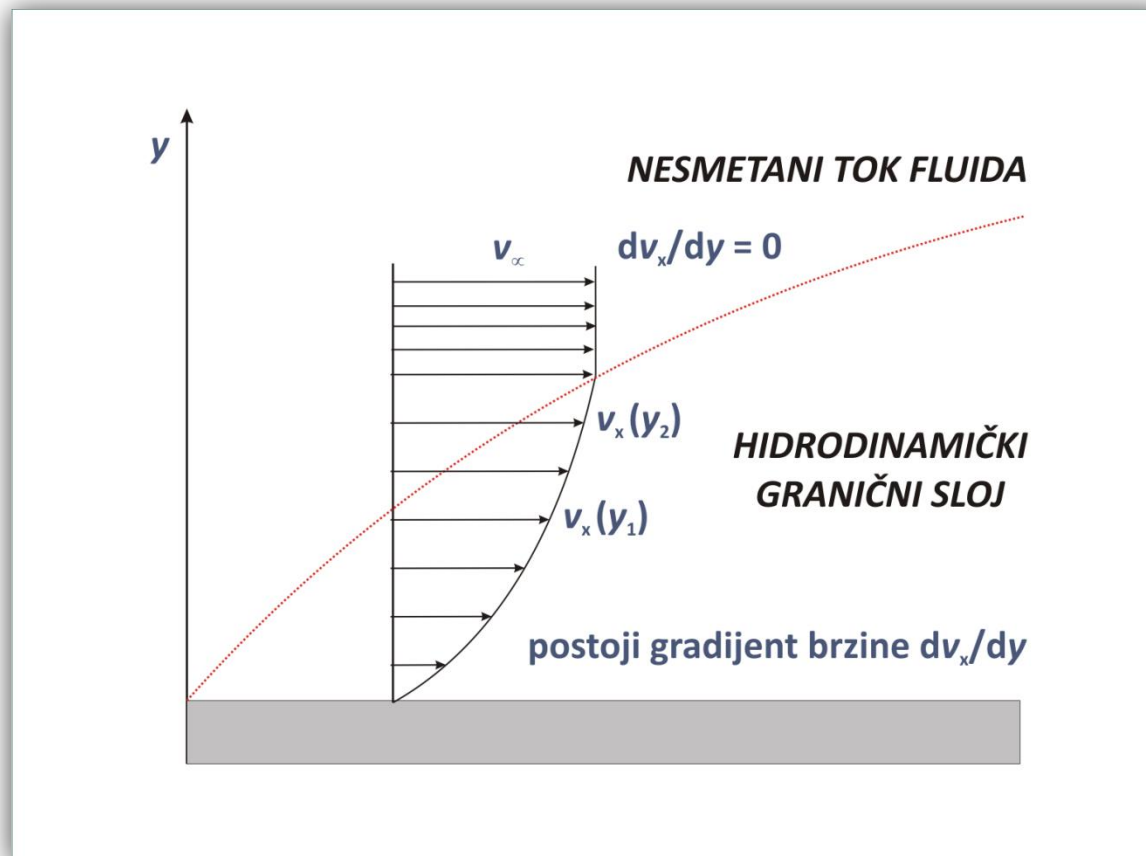
Svojom postojanjem hidrodinamički granični sloj utječe na fenomene prijenosa pružajući otpor. Stoga, proces se nastoji voditi u uvjetima njegove minimalne debljine.

Ludwig Prandtl 1904.

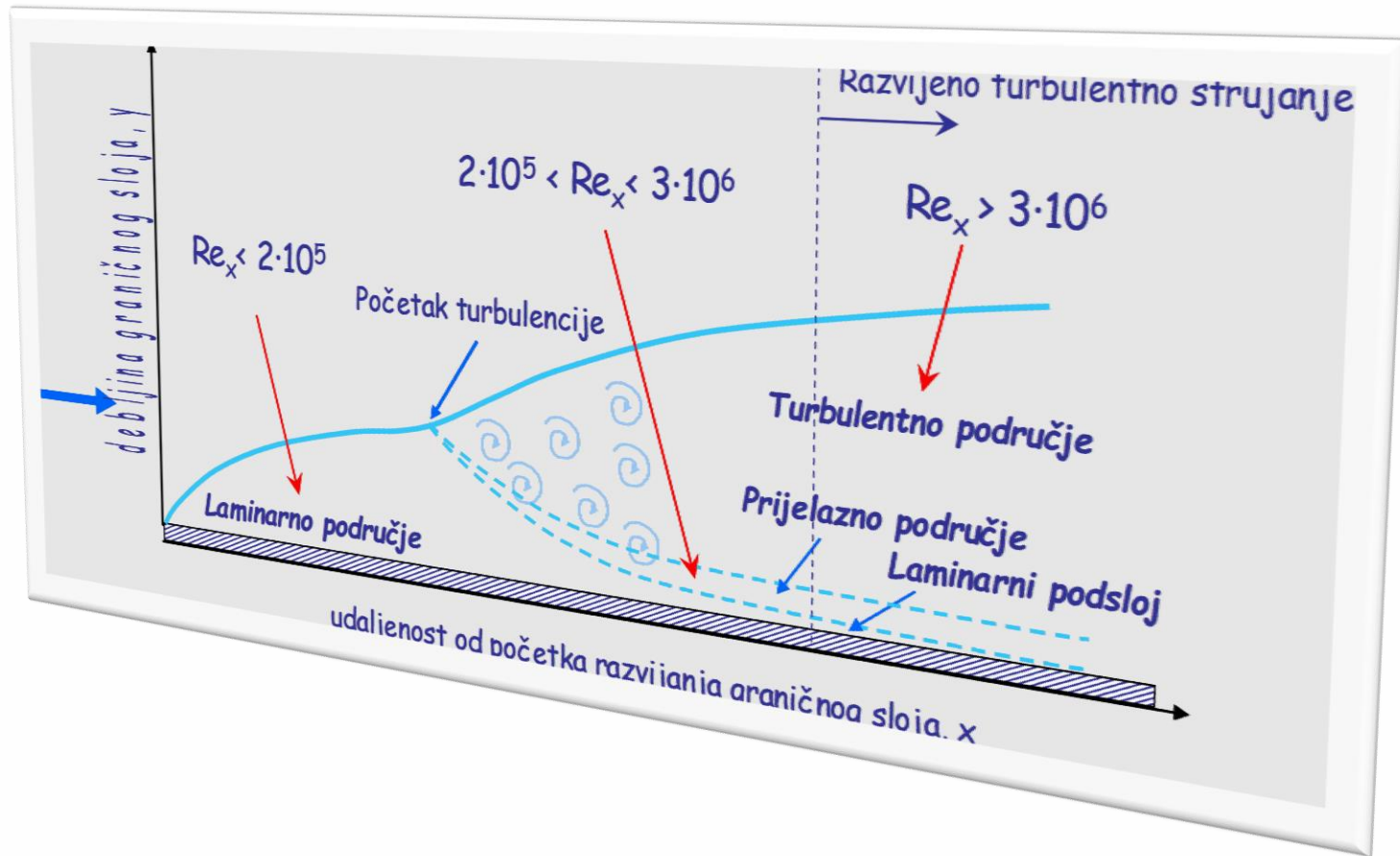
Podijelio gibanje fluida u dva područja:

područje u kojem *se osjeća* utjecaj čvrste nepokretne površine na tok fluida (hidrodinamički granični sloj),

područje u kojem *se ne osjeća* utjecaj čvrste stjenke na tok fluida (nesmetani tok fluida).



Prandtl



Hidrodinamički uvjeti za određeni položaj u smjeru strujanja x (*udaljenost od ruba ploče*):

$$\text{Re}_x = \frac{v \cdot x \cdot \rho}{\eta}$$

Za ravnu ploču:

$$\text{Re}_x < 2 \cdot 10^5$$

egzistira laminarno područje

$$2 \cdot 10^5 < \text{Re}_x < 3 \cdot 10^6$$

egzistira prijelazno područje

$$\text{Re}_x > 3 \cdot 10^6$$

egzistira područje turbulentnog
graničnog sloja

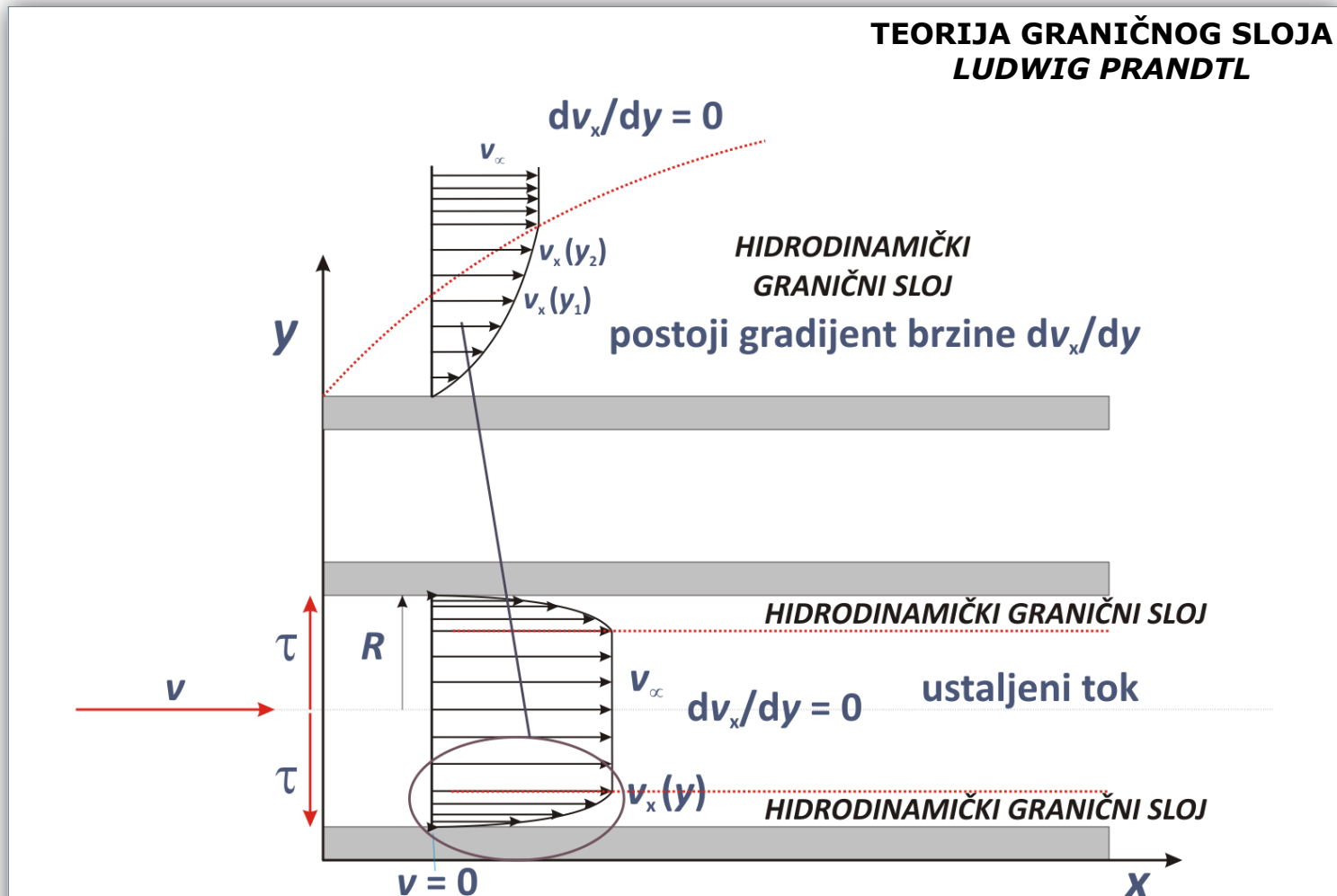
Debljine hidrodinamičkog graničnog sloja za ravnu ploču (*Blasius*):

$$\delta_H = \frac{k \cdot x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad k = 4,64 \quad \text{za laminarno područje}$$

$$\delta_H = \frac{k \cdot x}{\sqrt[5]{\text{Re}_x}} \quad k = 0,376 \quad \text{za turbulentno područje}$$

$$\delta_H \approx \frac{1}{\text{Re}_x^m}$$

Pri *većim brzinama* realnog fluida u ravnoj cijevi uspostavlja se drugačiji profil brzine.



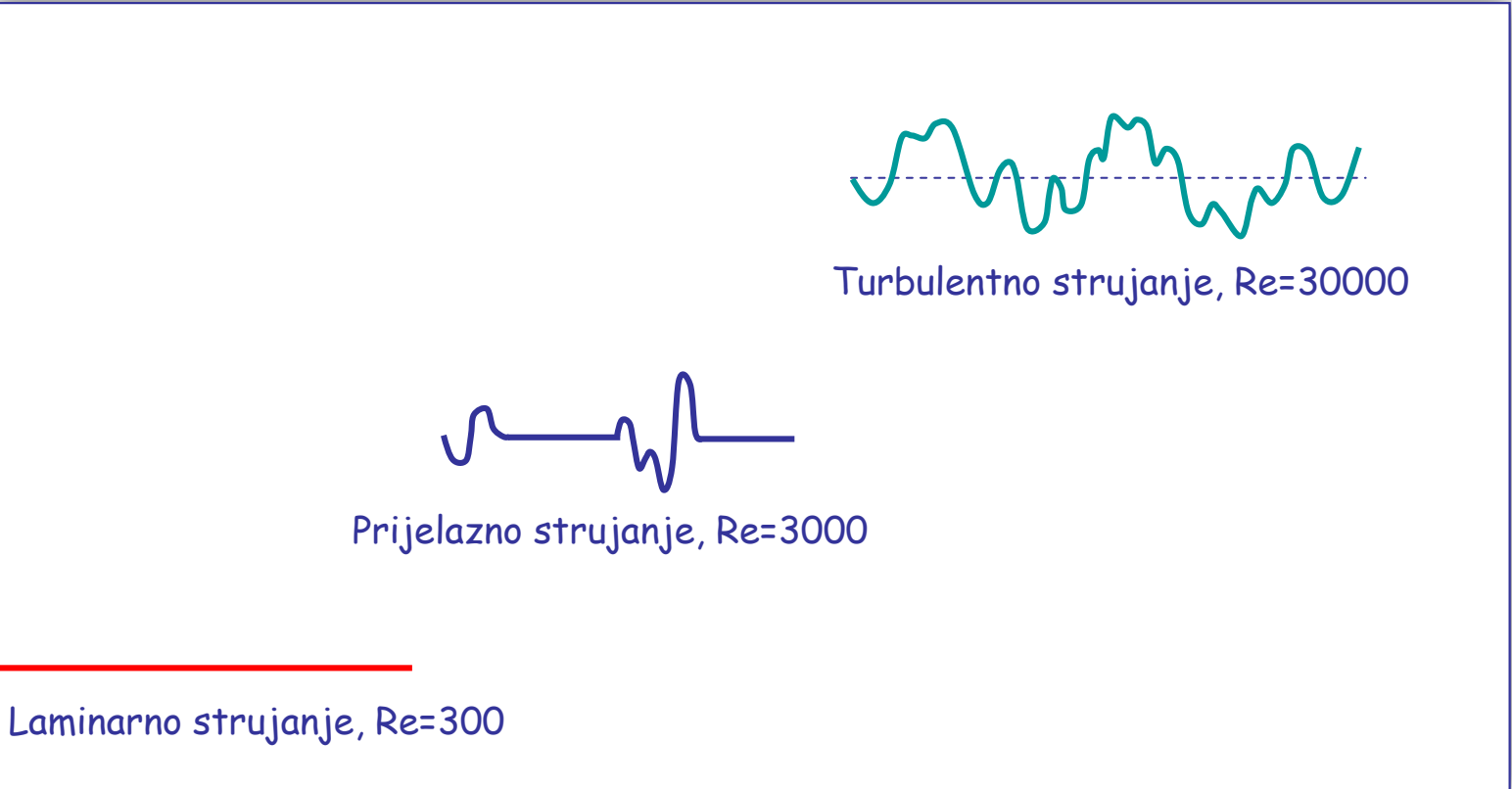
Svojom postojanjem hidrodinamički granični sloj utječe na fenomene prijenosa pružajući otpor. Stoga, proces se nastoji voditi u uvjetima njegove minimalne debljine.

Taylor & Von Karman

Pri turbulentnom strujanju dolazi do:

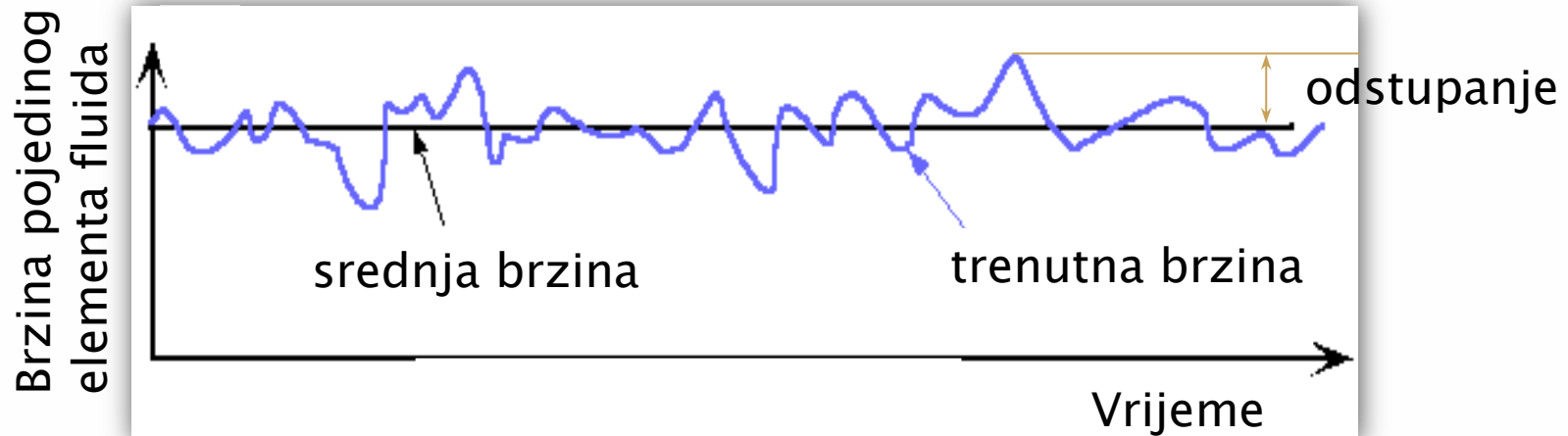
- i. uspostave prostornog gradijenta brzine (dv_x/dy) zbog prisutnosti nepokretne čvrste površine i otpora viskoznosti u hidrodinamičkom graničnom sloju (zidna turbulencija),
- ii. uspostave vremenskog gradijenta brzine (dv_x/dt) u slobodnom toku/nesmetanom toku fluida odnosno u elementu fluida gdje se ne osjeća utjecaj nepokretne površine – ne postoji prostorni gradijent brzine (turbulencija slobodnog toka).

Brzina pojedinog
elementa fluida v



t

Vrijeme



Pri turbulentnom strujanju prisutna je fluktuacija – nasumična devijacija u promatranoj varijabli (brzine s vremenom) poradi neravnomjernog pulzacijskog gibanja jedinki fluida.

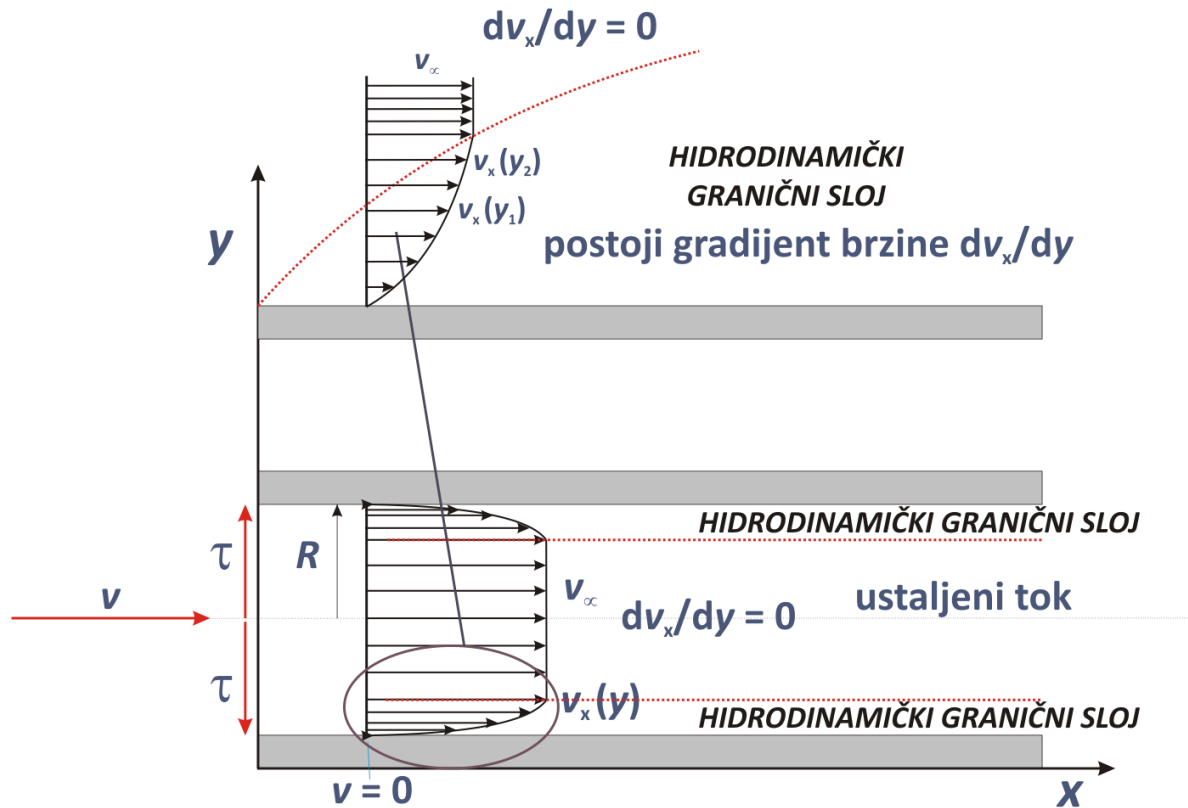
Pri dovoljno velikom vremenu egzistira *stalna srednja brzina pojedinog elementa fluida* (kvazistacionarno strujanje) dok njegova trenutna brzina fluktuirira oko stalne srednje.

**VREMENSKI OSREDNJENO
STRUJANJE**

Hinze

Turbulentno gibanje

jest *neravnomjerno* stanje strujanja fluida pri kojem karakterističan/intrinzičan parametar takovog hidrodinamskog sustava (*brzina fluida*) fluktuiraju odnosno stohastički/nasumično/slučajno se mijenja u vremenu i prostoru.

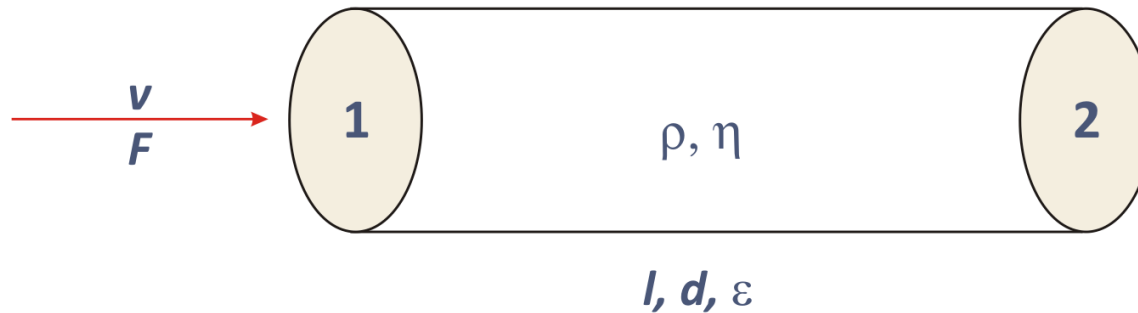


EMPIRIJSKI IZRAZ ZA RASPODJELU BRZINA PRI TURBULENTNOM STRUJANJU

$$v_r = v_{\max} \left(1 - \frac{r}{R} \right)^{1/n} \quad n = 6 - 10 \quad \longrightarrow \quad v_{\text{sr.}} = (0,7 - 0,9) \cdot v_{\max}$$

Primjena dimenzijske analize pri *procjeni* gubitka energije fluida pri njegovu turbulentnom strujanju kroz cijev

Rayleighova metoda dimenzijske analize



Procesni prostor
Cijev određenog volumena ili segment cijevi
definiranog volumena

Gubitak energije pri turbulentnom strujanju fluida u horizontalnoj cijevi

Ovom značajkom ugrađena zavisnost faktora trenja s viskoznošću, gustoćom i brzinom fluida te s promjerom cijevi

$$\xi = f\left(Re, \frac{\varepsilon}{d}\right)$$

$$\Delta p = \xi \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \cdot \frac{\ell}{d}$$

FAKTOR TRENJA

UKUPNOST OTPORA
PRI STRUJANJU FLUIDA KROZ
RAVNU CIJEV ISKAZANA JEST
FAKTOROM TRENJA.

DARCY-WEISSBACHOVA JEDNADŽBA

DOBIVENA METODOM
DIMENZIJSKE ANALIZE
VRIJEDI ZA BILO KOJI REŽIM
STRUJANJA

Za utvrđivanje nepovratnog gubitka energije fluida (posljedica čega je trajni pad tlaka) pri njegovom protjecanju, uz primjenu *Darcy-Weissbachova izraza*, neophodno je definirati ovisnost faktora trenja o pojedinim parametrima iz dostupnih bezdimenzijskih korelacija ili istu očitati iz standardiziranih predložaka (*Moodyev dijagram*).

Gubitak energije pri turbulentnom strujanju fluida u cijevi koja nije kružnog poprečnog presjeka

U slučaju odstupanja od
kružnog poprečnog presjeka:

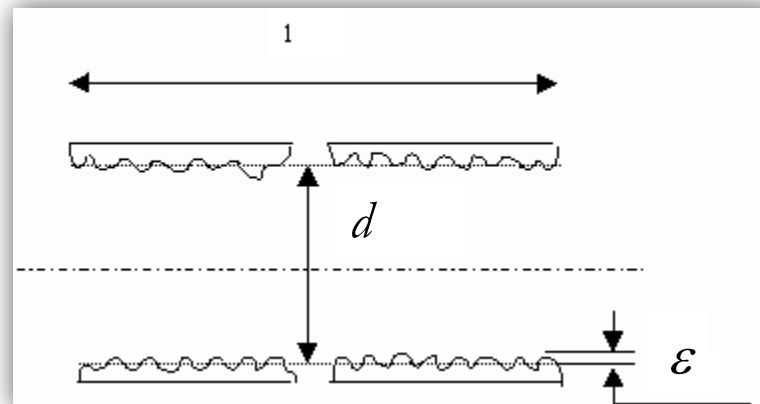
$$d_{ekv} = 4 \cdot \frac{A}{O}$$

EKVIVALENTNI PROMJER

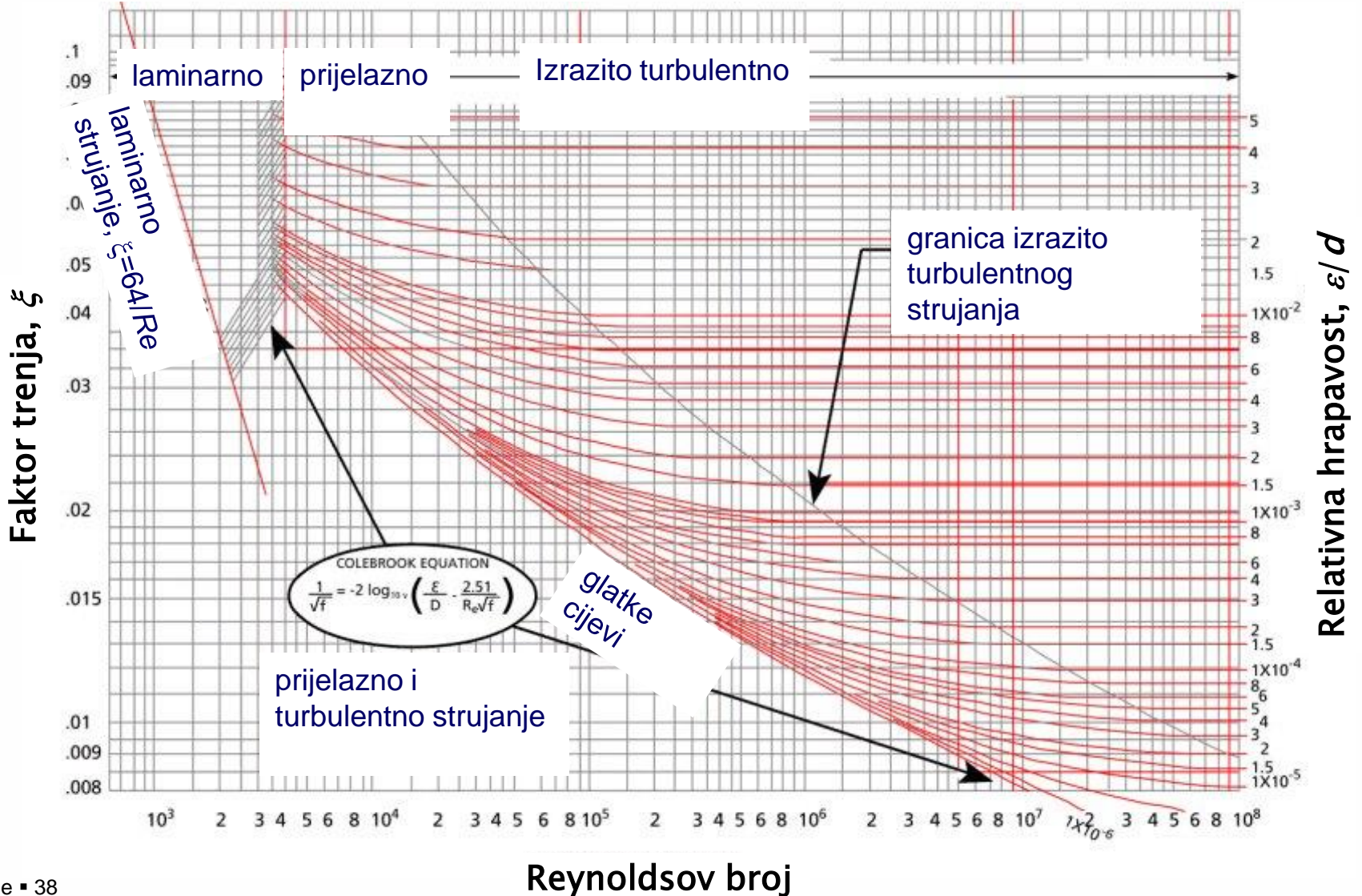
$$\Delta p = \xi \cdot \frac{l}{d_{ekv.}} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2}$$

Relativna hrapavost cijevi jest bezdimenzijski odnos apsolutne hrapavosti (srednje visine unutarnjih izbočina) te unutarnjeg promjera cijevi.

$$\frac{\varepsilon}{d}$$



Moodyev dijagram



$$\xi \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2} = \frac{32 \cdot \eta \cdot l \cdot v_{sr}}{d^2}$$

$$\xi = \frac{64}{\text{Re}} \quad \xi = f(\text{Re})$$

U strukturu ravne cijevi ugrađeni određeni armaturni elementi koji će pružati dodatni otpor strujanju fluida!!!



$$\Delta p_{UK} = \Delta p_{RC} + \Delta p_A$$

**ZA JEDAN MJESNI OTPOR
(ARMATURNI ELEMENT)**

$$\Delta p_{UK} = \Delta p_{RC} + \Delta p_A$$

$$\Delta p_{uk} = \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \cdot \left(\xi \cdot \frac{l}{d} + \zeta \right)$$

**FAKTOR MJESNOG
OTPORA**

**ZA VIŠE MJESNIH OTPORA
(ARMATURNIH ELEMENATA)**

$$\Delta p_{uk} = \frac{v^2 \cdot \rho}{2} \cdot \left(\xi \cdot \frac{l}{d} + \sum_i \zeta_i \right)$$

$$\zeta = \xi \frac{l_{ekv.}}{d}$$

**FAKTOR MJESNOG
OTPORA**

$$\Delta p_{uk} = \xi \cdot \frac{l + l_{ekv.}}{d} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2}$$

**EKVIVALENTNA DULJINA – ZAMIŠLJENA DULJINA
RAVNE CIJEVI PROMJERA d KOJA BI PRUŽALA ISTI
OTPOR/PAD TLAKA KAO I PROMATRANI
ARMATURNI ELEMENT**

U slučaju odstupanja od
kružnog poprečnog presjeka:

$$d_{ekv} = 4 \cdot \frac{A}{O}$$

EKVIVALENTNI PROMJER

$$\Delta p_{UK} = \xi \cdot \frac{l + l_{ekv.}}{d_{ekv.}} \cdot \frac{v^2 \cdot \rho}{2}$$

RAZLIČITOST POJMOVA