

MAXWELLOVE JEDNADŽBE I ELEKTROMAGNETSKI VALOVI

Maxwellove jednadžbe

- **J. C. Maxwell** (1864.) - povezo je dotadašnje spoznaje iz elektriciteta i magnetizma, uz svoje dodatno tumačenje (Ampèreovog zakona), i objedinio ih u jednu teoriju *elektromagnetizma* kroz četiri jednadžbe.
- Djelomično smo ih već upoznali.
- **Maxwellove jednadžbe:**
 - Gaussov zakon za elektricitet i magnetizam.
 - Faradayev zakon indukcije.
 - Ampèreov zakon.
- Predvidio je postojanje elektromagnetskih valova koji se šire brzinom svjetlosti i prije nego je itko shvatio da je svjetlost oblik elektromagnetskog vala.



James
Clerk Maxwell
(1831.-1879.)

Maxwellove jednađbe - Gaussov zakon za električno polje

- Tok električnog polja kroz bilo koju zatvorenu površinu S jednak je algebarskom zbroju naboja koji se nalaze unutar te zatvorene površine:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

- Naboj Q možemo izraziti prostornom gustoćom naboja ρ u volumenu V , obuhvaćenom plohom S :

$$Q = \iiint_V \rho dV$$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$$

1. Maxwellova jednađba u integralnom obliku

Maxwellove jednadžbe - Gaussov zakon za magnetsko polje

- Tok magnetskog polja kroz bilo koju zatvorenu površinu S jednak je nuli:
- (tj. ne postoji izolirani magnetski naboj):

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

2. Maxwellova jednadžba u integralnom obliku

Maxwellove jednađžbe - Faradayev zakon indukcije

- Brzina promjene magnetskog toka kroz petlju jednaka je elektromotornoj sili induciranoj u petlji:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

- Induciranu elektromotornu silu možemo prikazati cirkulacijom induciranog (neelektrostatskog) polja:

$$\varepsilon_i = \oint_K \vec{E}_i \cdot d\vec{s} = \oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_{el}$$

- Magnetski tok možemo prikazati plošnim integralom gustoće magnetskog toka:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Vremenski promjenjivo magnetsko polje stvara električno polje:

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

3. Maxwellova jednađžba u integralnom obliku

Maxwellove jednađbe - Poopćeni Ampèreov zakon

- Linijski integral magnetskog polja po zatvorenoj krivulji jednak je zbroju struja koje ta petlja sadrđava:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

$$I = \sum_i I_i \rightarrow$$

„provodne” struje,
 I_{pr} = struje u vodičima

- **Maxwell** - ne samo provodne struje I_{pr} , već i struje pomaka I_{pom} (struje koje nastaju vremenskom promjenom električnog polja) proizvode magnetsko polje:

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{pr} + I_{pom}$$

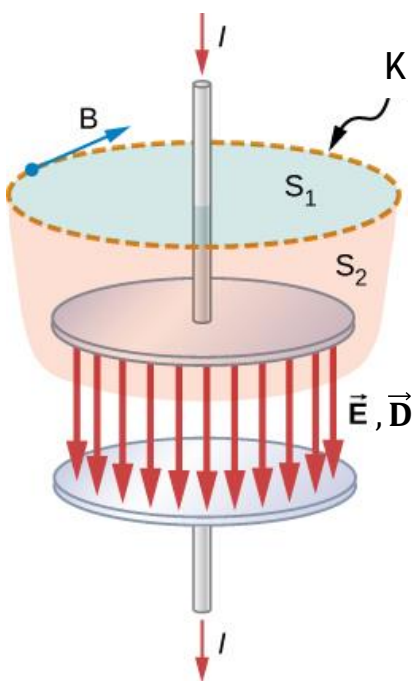
Poopćeni Ampèreov zakon

Maxwellove jednadžbe - Poopćeni Ampèreov zakon

- Struja pomaka: nabijanje kondenzatora

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_{pr} + I_{pom}$$

- provodna struja I_{pr} dolazi do kondenzatora, između ploča nastavlja teći kao struja pomaka I_{pom} .
- Zatvorena ploha $S = S_1 + S_2$ obuhvaća ploču kondenzatora:



$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

$$I_{pr} = \frac{dQ}{dt} = I_{pom} = \frac{d}{dt} \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \frac{d\Phi}{dt}$$

$$I_{pom} = \frac{d}{dt} \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad I_{pr} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

$$\begin{aligned} \oiint_{S_1+S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \oiint_{S_1} \vec{D} \cdot d\vec{S} + \oiint_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} \\ &= 0 + \oiint_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

4. Maxwellova jednadžba u integralnom obliku

Maxwellove rovnice

1. Gaussov zákon za elektrické pole:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho dV$$

2. Gaussov zákon za magnetické pole:

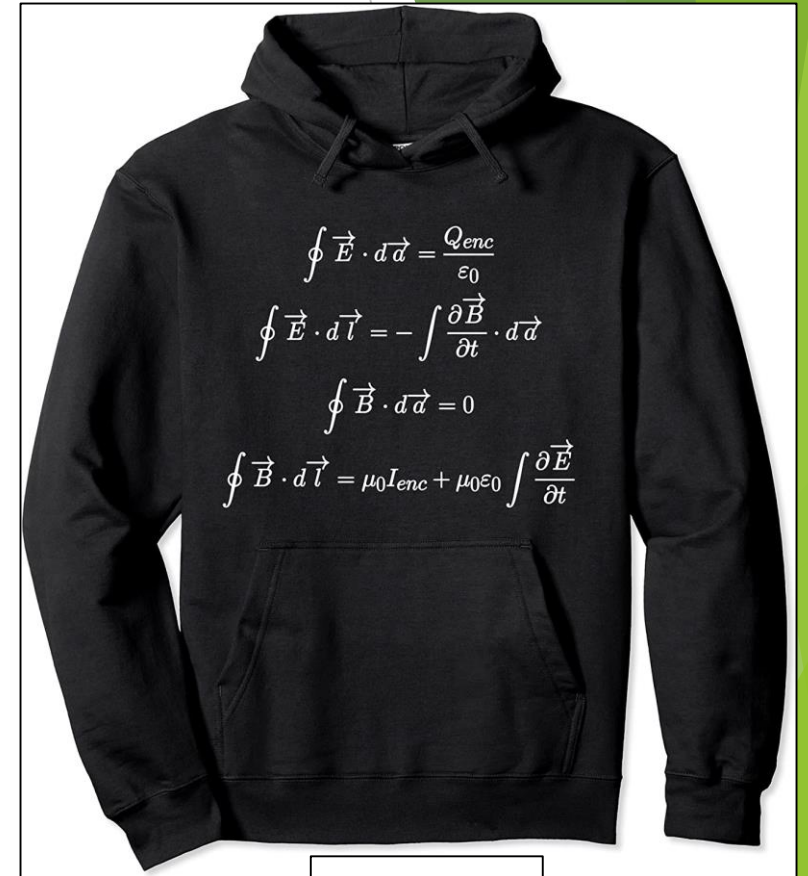
$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

3. Faradayův zákon:

$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

4. Poopravený Ampèreův zákon

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \frac{d}{dt} \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$



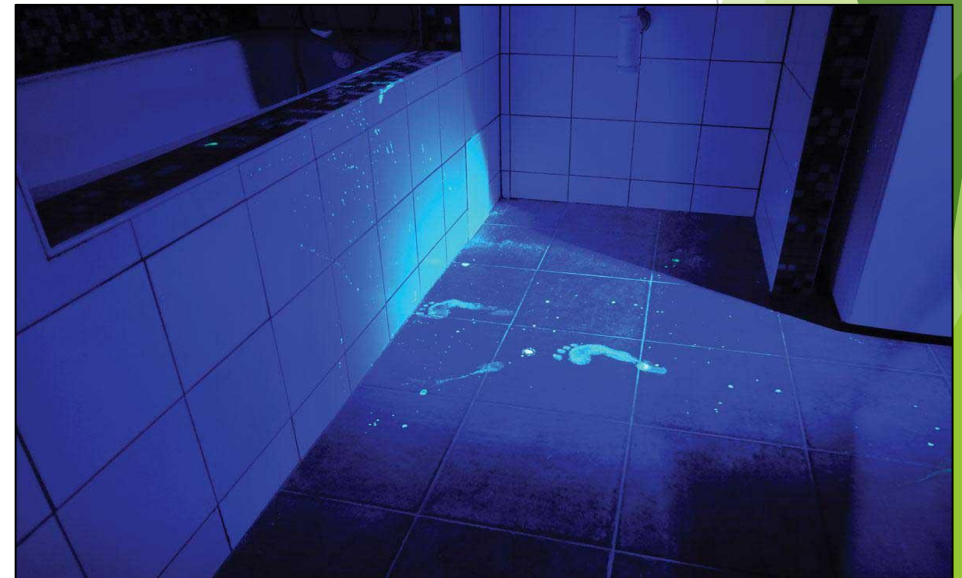
Amazon.com

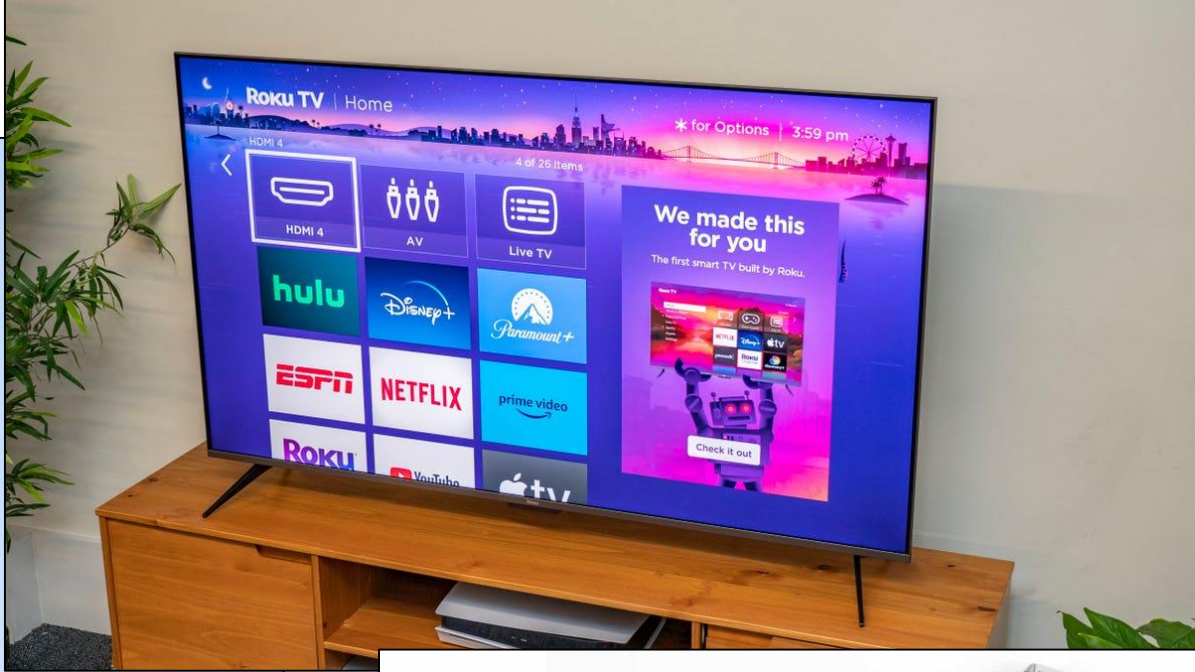
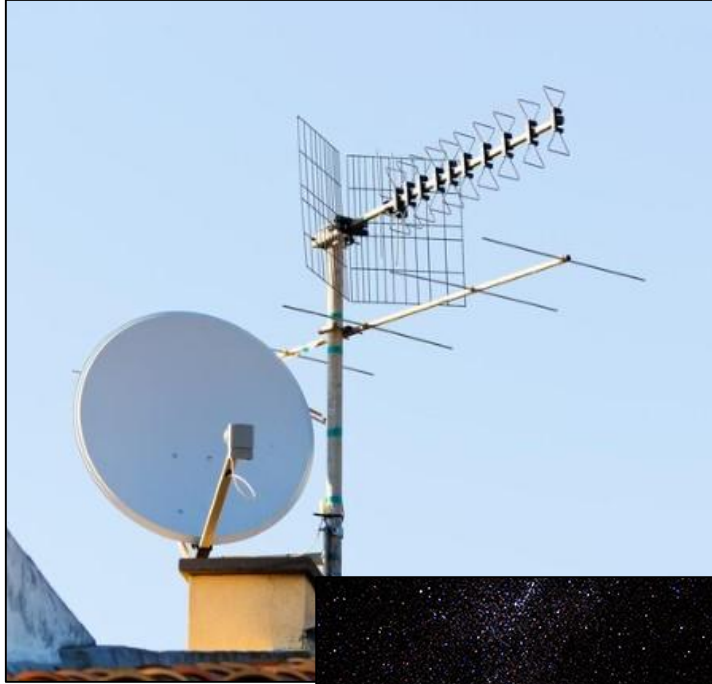
$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$



0.0035%

Vidljiva svjetlost





Maxwellove jednadžbe - elektromagnetski valovi

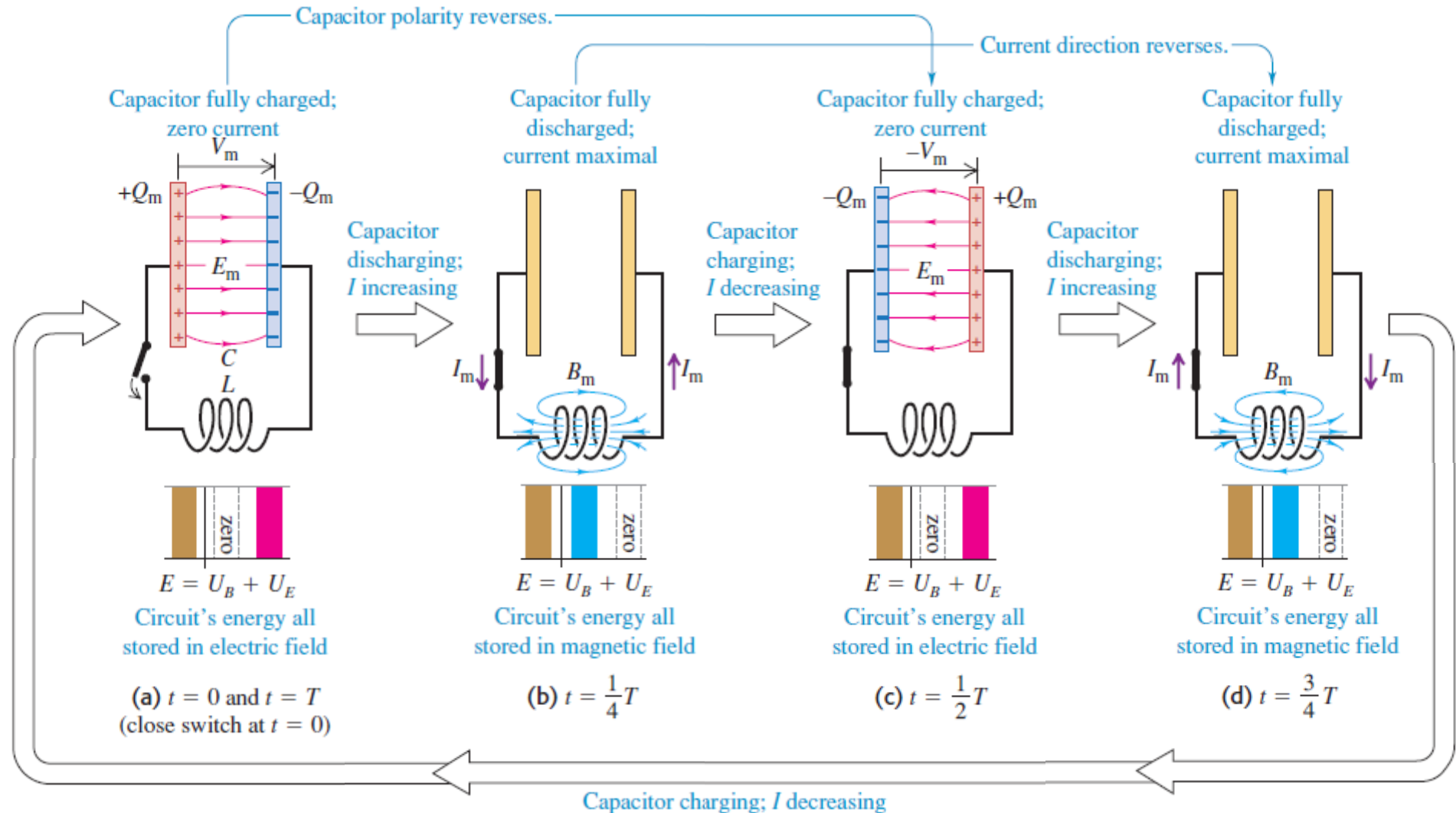
- Ove relacije objašnjavaju širenje poremećaja koji se sastoji od vremenski promjenjivog električnog i magnetskog polja, koji se može širiti kroz prostor.
- Takav poremećaj ima svojstva vala i naziva se elektromagnetski val.
- Maxwell je dokazao da se ovakav elektromagnetski poremećaj širi brzinom svjetlosti.
- Točkasti naboj u mirovanju proizvodi statično električno polje, ali ne i magnetsko polje; točkasti naboj u gibanju konstantnom brzinom proizvodi i električno i magnetsko polje.
- Da bi točkasti naboj proizveo elektromagnetski val on se mora gibati *ubrzano*.
- *Svaki ubrzani naboj emitira elektromagnetski val.*
- Najjednostavniji način na koji točkasti naboj može proizvesti EM val je harmonijskim titranjem.

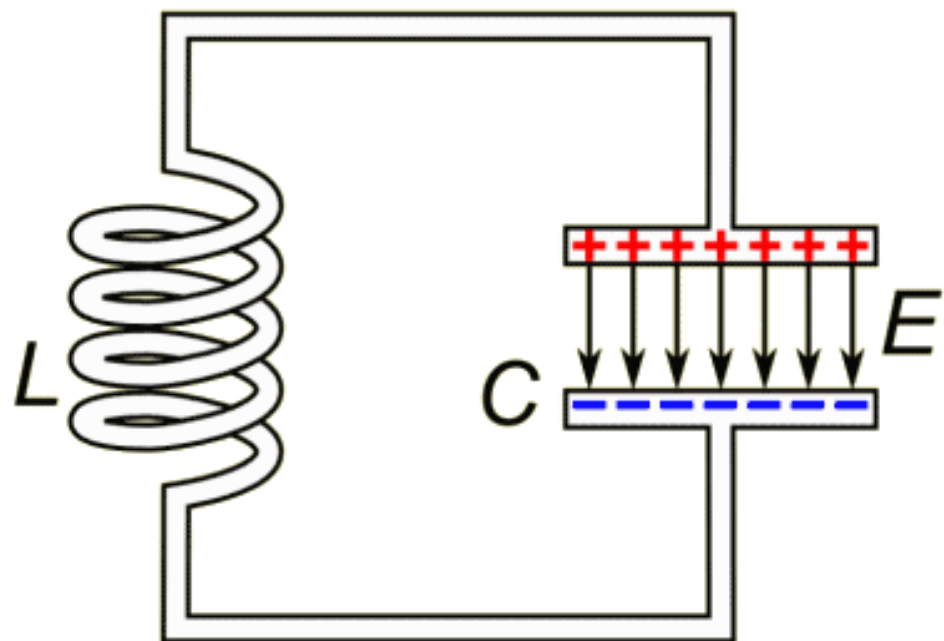
Elektromagnetski titraji i valovi

- LC - krug

$$E_C = \frac{Q_0^2}{2C}$$

$$E_L = \frac{LI_0^2}{2}$$





Elektromagnetski titraciji i valovi

- LC - krug – titrajni krug

Energija
električnog
polja
kondenzatora

$$E_C = \frac{Q_0^2}{2C}$$



$$E_L = \frac{LI_0^2}{2}$$

Energija
magnetskog
polja
zavojnice

- Za idealizirani titrajni krug vrijedi zakon očuvanja energije:

$$E_C + E_L = \frac{q^2}{2C} + \frac{Li^2}{2} = konst \quad / \quad \frac{d}{dt}$$

Rješenje:

$$q = Q_0 \sin \omega t$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0$$

ω^2

Diferencijalna
jednadžba
idealnog LC kruga

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

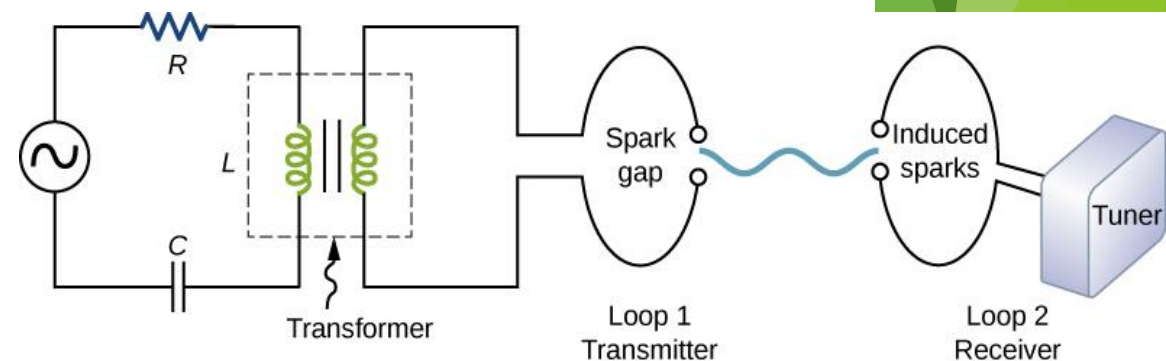
Elektromagnetski titraji i valovi

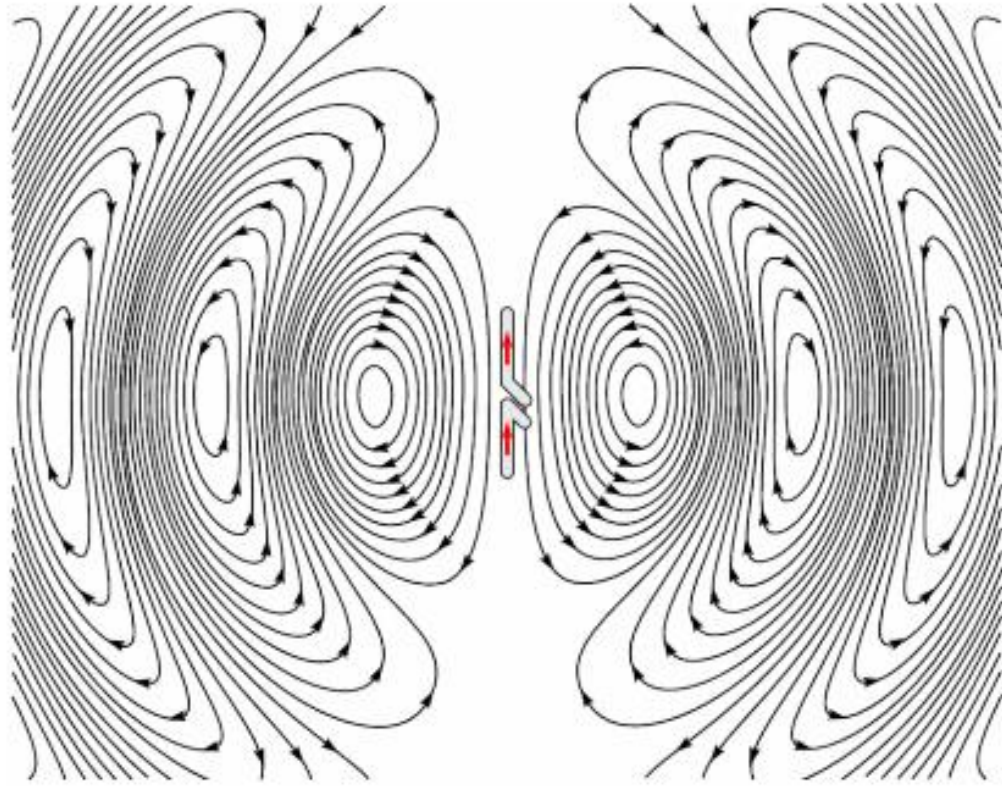
- Heinrich Hertz - 1887. - proizveo prve elektromagnetske valove (EMV) s makroskopskim valnim duljinama u svom laboratoriju. Kao izvor koristio je otvoreni LC titrajni krug.
- I detektirao je valove s drugim titrajnim krugom podešenim na istu frekvenciju.
- Proizveo je i stojne valove i izmjerio udaljenost među susjednim maksimumima (polovicu valne duljine) → Znajući rezonantnu frekvenciju kruga, izračunao je brzinu valova upotrebom relacije $v = \lambda f$. Potvrdio je da je njihova brzina jednaka brzini svjetlosti.
- SI jedinica za frekvenciju dobila je ime po H. Hertzu: Jedan hertz (1 Hz) je jednak jednom ciklusu po sekundi.

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{LC}$$

Thompsonova formula





Širenje elektromagnetskih valova

- Promatramo EM valove u homogenom izotropnom prostoru bez naboja i struja:

$$\vec{J} = 0, \rho = 0, \text{ a } \varepsilon, \mu \text{ konstantni.}$$

- Maxwellove jednačbe tada glase:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

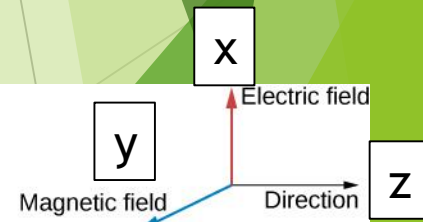
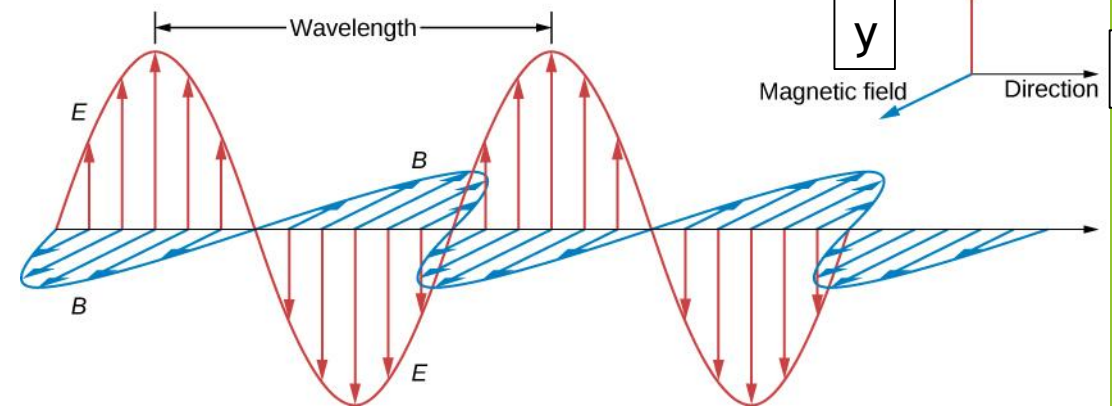
$$\oint_K \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_K \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt} \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

- Da bi prve dvije jednačbe bile zadovoljene električno i magnetsko polje moraju biti okomiti na pravac širenja vala \rightarrow transverzalan val:

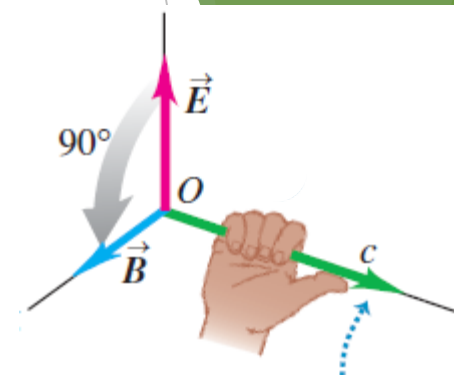
$$\vec{E}, \vec{B} \perp \vec{v}$$

- Odabiremo:

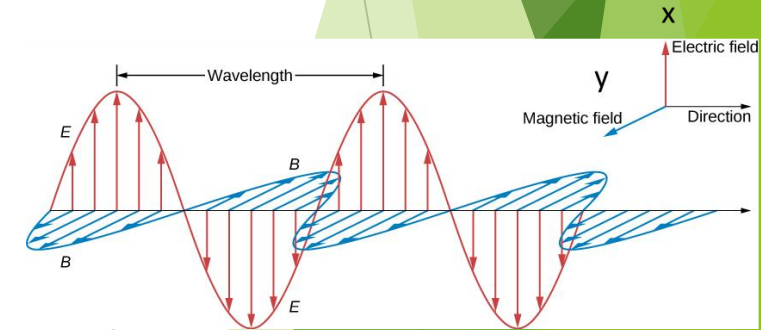


Ključna svojstva EM vala

- Pri širenju elektromagnetskih valova električno i magnetsko polje međusobno su okomiti, a okomiti su i na smjer širenja vala. Pri tom, vektori električnog i magnetskog polja titraju u fazi. → Smjer širenja vala je smjer vektorskog umnoška $\vec{E} \times \vec{B}$.
- E_0 i B_0 su povezani relacijom: $E_0 = vB_0$.
- Valovi se kreću u vakuumu konačnom i nepromjenjivom brzinom, c .
- Za razliku od mehaničkih valova kojima su potrebne oscilirajuće čestice medija, kao što su voda ili zrak za prijenos vala, elektromagnetski val ne zahtijeva nikakav medij.
- Pri prijelazu elektromagnetskog vala iz sredstva u kojem se širi jednom brzinom u sredstvo u kojem se širi nekom drugom brzinom mijenja se valna duljina vala.



Smjer širenja vala
= smjer $\vec{E} \times \vec{B}$.



Valna jednažba

- Na odabrani EM val primjenjujemo Maxwellove jednažbe.
- Dobivamo valnu jednažbu za električno polje \vec{E} :

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

- I valnu jednažbu za magnetsko polje \vec{B} :

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = 0$$

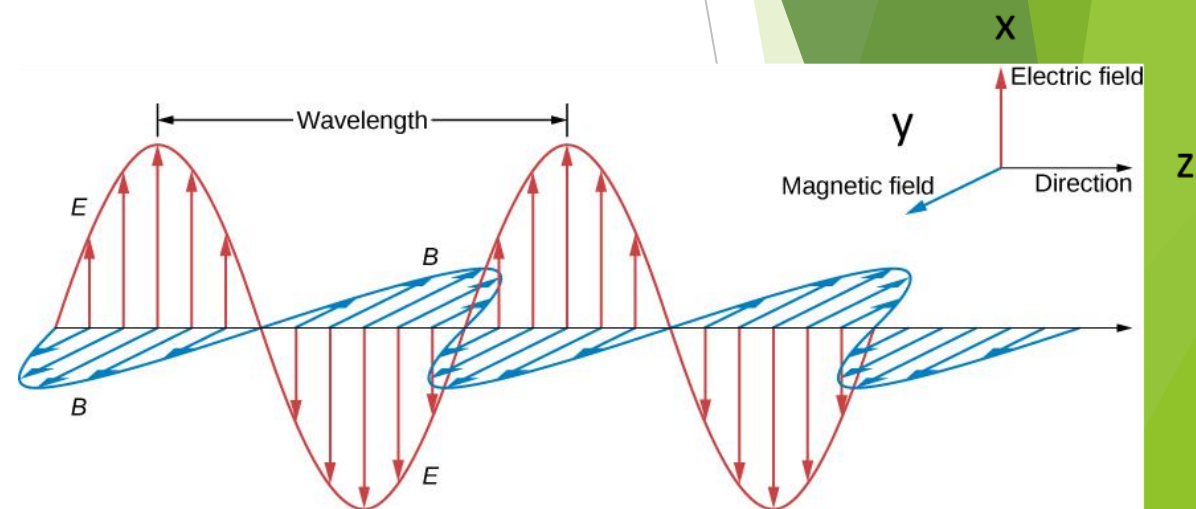
- Fazna brzina - brzina širenja vala u sredstvu s ε i μ :

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$$

Vakuum: $\varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0$

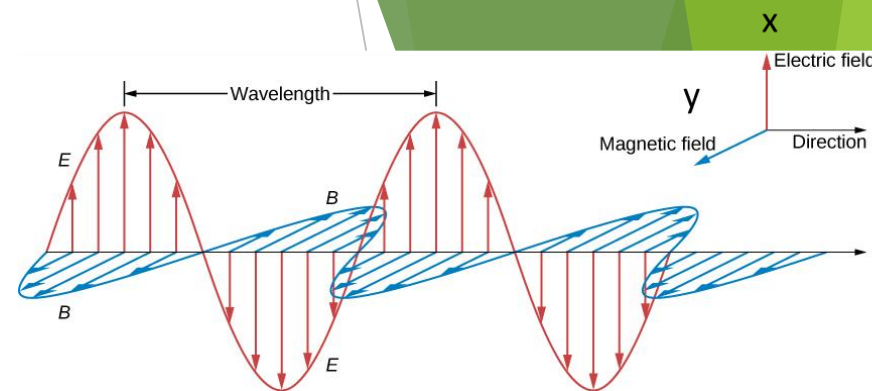


$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c$$



Fazna brzina, rješenje valne jednačbe

- U vakuumu je fazna brzina jednaka za sve frekvencije; nema disperzije. → Grupna brzina (brzina širenja energije) jednaka je faznoj brzini.
- Sredstvo - ako dielektričnost i permeabilnost sredstva ovise o frekvenciji, imamo disperziju.
- Za većinu materijala $\mu_r \approx 1 \rightarrow \mu \approx \mu_0$ (osim za feromagnete) pa je



$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}}$$

n – Indeks loma sredstva

Rješenje valne jednačbe:

$$E_x = E_0 \sin(\omega t - kz)$$

$$B_y = B_0 \sin(\omega t - kz)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Valni broj

Veza između amplituda

$$E_0 = vB_0$$

Proizvoljni smjer širenja vala: $\vec{E} = \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k}\vec{r})$

Energija EM vala

- Ukupnu gustoću energije elektromagnetskog polja možemo prikazati kao zbroj gustoće energije električnog polja i gustoće energije magnetskog polja:

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon E_x^2 + \frac{1}{2\mu} B_y^2$$

- Zbog $E_0 = vB_0$ doprinosi električnog i magnetskog polja su jednaki (svaki doprinosi polovici ukupne energije) i vrijedi:

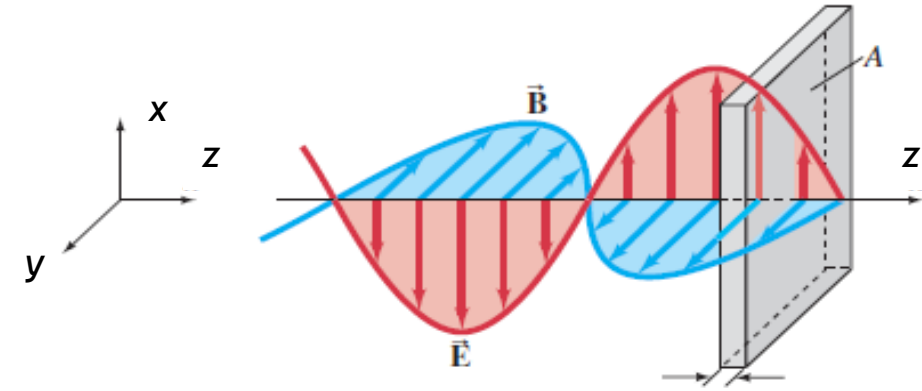
$$w = \varepsilon E_x^2 = \frac{1}{\mu} B_y^2 = \mu H_y^2$$



Energija EM vala - Poyntingov vektor

- Gustoća toka energije (intenzitet) EM vala - energija koju ravni elektromagnetski val prenese kroz jedinicu površine A u jedinici vremena, dt .

$$Energija = Pdt = wdV = wAdz = wAvdt$$



- Gustoća toka energije, intenzitet, tj. snaga po jediničnoj površini:

$$S = wv$$

$$S = v\varepsilon E_x^2 = v\mu H_y^2 = E_x H_y$$

- Gustoća toka je vektorska veličina, smjer = smjer širenja vala

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B}$$

Poyntingov vektor

- Srednja vrijednost:

$$S = v\varepsilon E^2 = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \sin^2(\omega t - kz) \rightarrow \bar{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 \sin^2(\omega t - kz) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 = \frac{1}{2} E_0 H_0$$

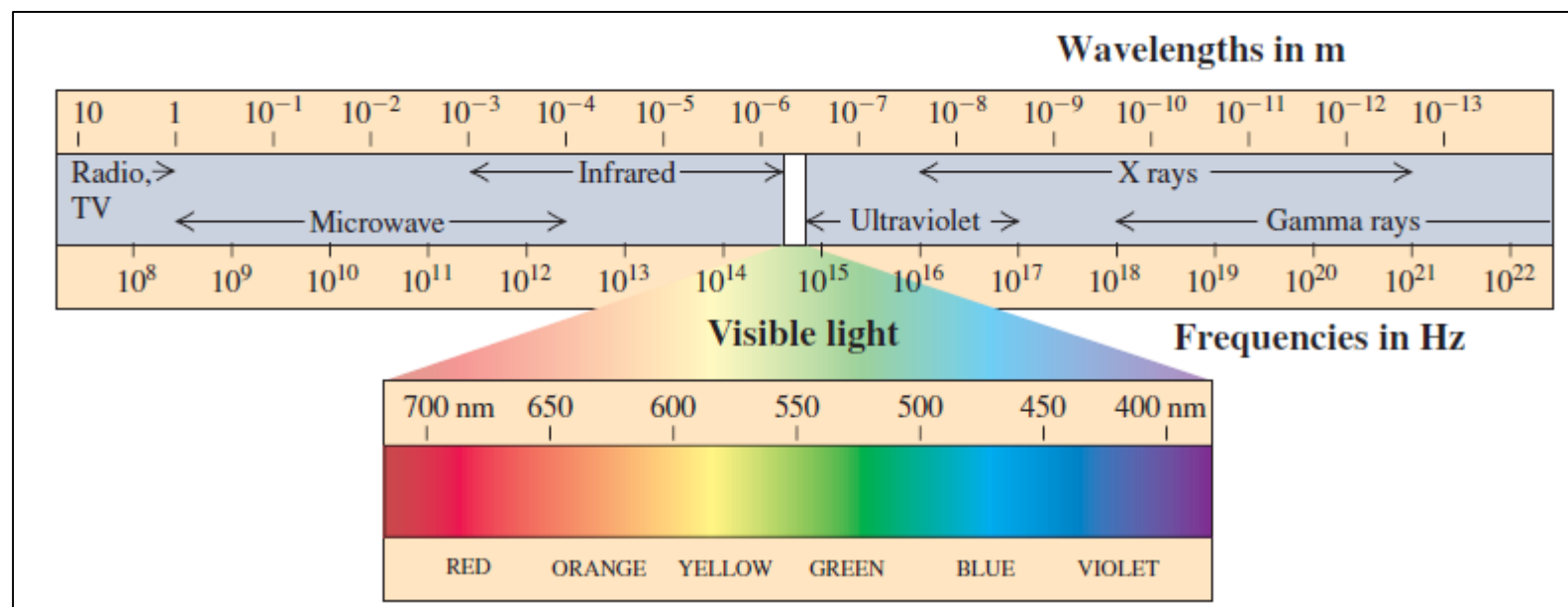
Elektromagnetski spektar






Elektromagnetski spektar obuhvaća elektromagnetske valove svih frekvencija i valnih duljina.

Unatoč velikim razlikama u upotrebi i načinu generiranja, svi se šire jednakom brzinom u vakuumu i za sve njih vrijedi relacija:

$$v = \lambda f$$

Ljudsko oko opaža samo mali segment EM spektra - vidljivu svjetlost (380 do 750 nm)



Fotosfera	Kromosfera i korona		Visokotemperaturna područja korone	Područja korone najviših temperatura
 <p data-bbox="25 892 178 942">6000 K</p>	 <p data-bbox="535 892 700 942">60000 K</p>	 <p data-bbox="1044 892 1261 942">1000000 K</p>	 <p data-bbox="1554 892 1770 942">1500000 K</p>	 <p data-bbox="2038 892 2254 942">3000000 K</p>
<p data-bbox="25 1013 496 1063">u vidljivom dijelu spektra</p>	<p data-bbox="649 1013 1414 1063">vidljive u ultraljubičastom dijelu spektra</p>		<p data-bbox="1567 1013 2000 1106">vidljiva u ekstremnom ultraljubičastom dijelu spektra</p>	<p data-bbox="2063 1013 2497 1078">vidljiva u rendgenskom dijelu spektra</p>

Elektromagnetski spektar

➤ Radio-valovi (nekoliko km $>$ λ $>$ 0,3 m)

Valovi koje proizvode televizijski i radio odašiljači, izvor su elektronički uređaji, najčešće titrajni krugovi.

Mnoga nebeska tijela emitiraju radijaciju u području radiovalova, opažaju se radioteleskopima.

➤ Mikrovalovi (0,3 m $>$ λ $>$ 1 mm)

Primjenjuju se u radarskoj tehnici i u komunikacijskim sustavima (mobiteli), izvor su elektronički uređaji.

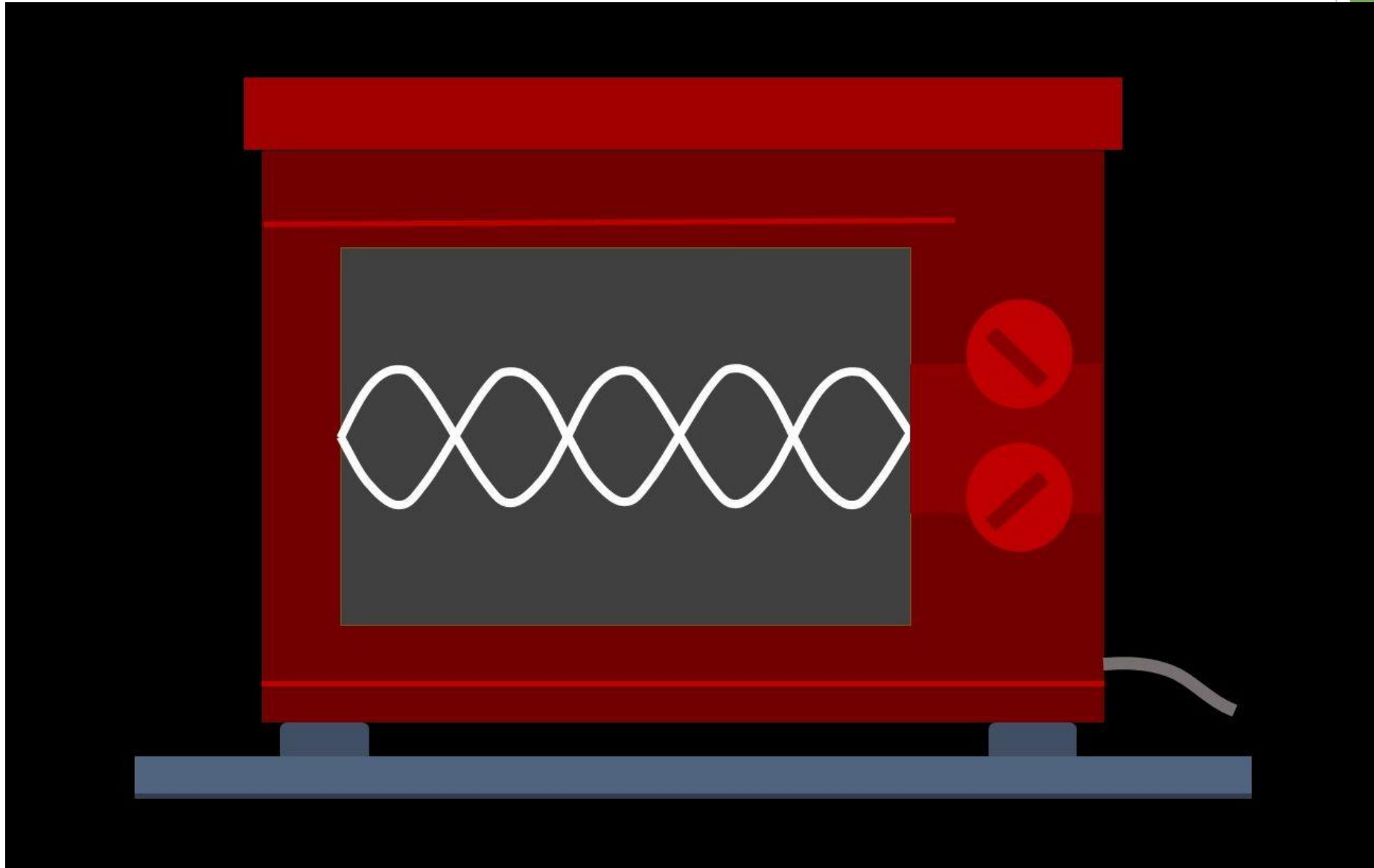
Frekvencije bliske frekvencijama titranja molekula u tvarima:

- proučavanje atomske i molekularne strukture
- mikrovalne pećnice - upotreba u kućanstvima, $\lambda = 12,2$ cm



Wikipedia:
Radioteleskop
Effelsberg







Elektromagnetski spektar

➤ Infracrveno zračenje (IR)

$$(10^{-3} \text{ m} > \lambda > 7,8 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 780 \text{ nm})$$

Valovi koje emitiraju molekule i užarena tijela.

Praktična primjena: fizikalna terapija, IR fotografija...

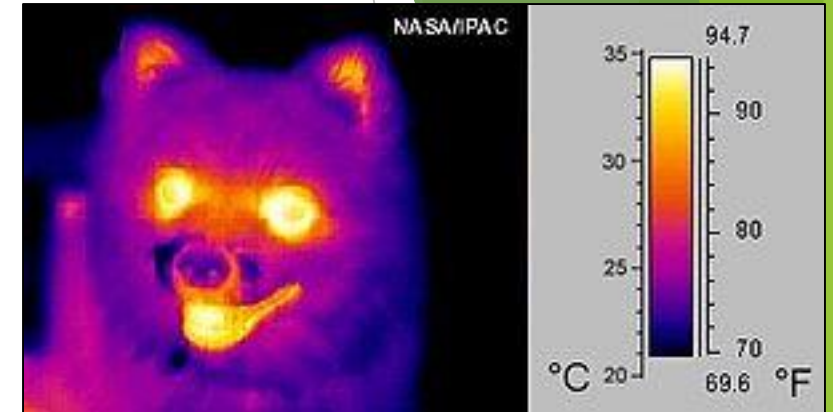
Znanstvena primjena: vibracijska spektroskopija...

➤ Vidljiva svjetlost ($780 \text{ nm} > \lambda > 380 \text{ nm}$)

Uski dio EM spektra koji ljudsko oko može detektirati.

Oko je najosjetljivije na valnu duljinu 550 nm.

Osnova optike i optičkih instrumenata koje ćemo detaljnije proučavati.



Wikipedia: infracrvena snimka psa

Valne duljine vidljive svjetlosti:

380-440 nm **Ljubičasta**

440-490 nm **Plava**

490-570 nm **Zelena**

570-590 nm **Žuta**

590-620 nm **Narančasta**

620-780 nm **Crvena**

Elektromagnetski spektar

➤ Ultraljubičasto zračenje (UV) ($380 \text{ nm} > \lambda > 10 \text{ nm}$)

Valovi koje emitiraju atomi i molekule.

UV zračenje izaziva ionizaciju i disocijaciju molekula:

→ korisna primjena u medicini i tehnici

→ također, može biti štetno za živa tkiva i organizme.

➤ Rendgensko zračenje (X-zrake) ($10^{-9} \text{ m} > \lambda > 10^{-12} \text{ m}$)

Najčešće nastaju pri tzv. zakočnom zračenju. Energija veća od UV zračenja, mogu izazvati znatna oštećenja na živim tkivima.

Medicina: dijagnostika i liječenje.

Znanost: proučavanje kristalne strukture.

➤ gama zračenje ($10^{-10} \text{ m} > \lambda > 10^{-14} \text{ m}$)

Nuklearnog porijekla, nastaje pri promjeni stanja atomske jezgre

Emitiraju ga radioaktivne tvari, izaziva teško oštećenje živih organizama.



Obavezno sunčane naočale s UV filterom



Rendgenska snimka ruke, 1896.