OPĆI ZAKON GRAVITACIJE

Kratki uvod

Gravitacija je jedna od četiriju fundamentalnih sila koje svemir čine ovakvim kakav je. Premda je to prva fundamentalna sila opisana prvi puta prije 320 godina, ona je u moderno vrijeme i jedina preostala sila za koju još ne postoji odgovarajući teoretski model kojim bi se tu silu prikazalo nekako ujedinjenu s ostalim trima fundamentalnim silama. Konkretnije, još ne postoji općeprihvaćen i znanstveno potvrđen način koji bi ujedinjavao kvantnu mehaniku i gravitaciju. Uzrok tomu je prije svega u činjenici da je gravitacija u usporedbi s ostalim silama jako slaba i da u svijetu elementarnih čestica nema gotovo nikakvog učinka. Drugim riječima, učinci te sile uočljivi su samo na materijalnim objektima vrlo velikih masa u usporedbi s masama molekula, atoma i podatomskih čestica. Primjerice, u usporedbi s električnom silom između dvaju elektrona, gravitacijska je sila između njih za 40 redova veličine slabija. Ne postoji način da se nešto mjeri s preciznošću na 40-toj decimali. Ali, suprotno tom primjeru, sile između zvijezda i planeta, zviježđa i zvjezdanih skupova isključivo su gravitacijske—elektromagnetska sila iščezava na tim razmjerima zbog svojstva poništavanja pozitivnih i negativnih naboja, a ostale fundamentalne sile prekratkoga su dosega da bismo ih uopće trebali spominjati. Primjerice, jaka i slaba nuklearna sila premda su jače i od gravitacijske i od elektromagnetske, djeluju na udaljenostima veličine 1/100000 veličine atoma.
I tako u makrosvijetu, među svemirskim objektima, caruje jedino gravitacijska sila.

Kakva je ta sila?
Svojstva te sile su:

1.) Ovisi samo o masi tijela. To je iskustvena činjenica. Gravitacijska sila uopće je neosjetljiva na bilo koja druga svojstva tijela, osim njihove mase.
2.) Ta je sila uvijek privlačna. I to je iskustvena činjenica. Ostale sile mogu biti i privlačne i odbojne, u ovisnosti o nekim drugim svojstvima čestica, poput predznaka električnog naboja.
3.) Ima beskonačni doseg, i to svojstvo dijeli s jednom od preostalih fundamentalnih sila, elektromagnetskom silom. Zaista, svemirski objekti mogu međusobno biti udaljeni milijunima svjetlosnih godina, a da unatoč tomu ima smisla govoriti o njihovu međusobnu privlačenju gravitacijskom silom.

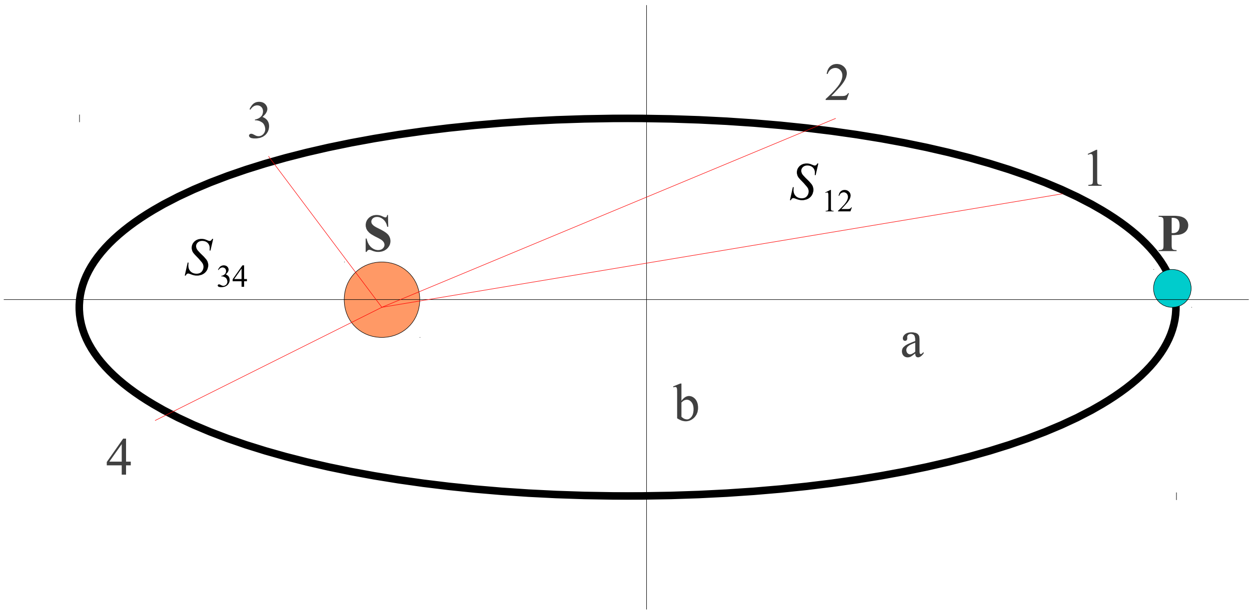
Newtonov zakon gravitacije 1687.

Tijela se privlače silom koja je razmjerna njihovim masama i obrnuto razmjerna kvadratu njihove udaljenosti.

Ovaj je zakon Isaac Newton (navodno) ustanovio na temelju Keplerovih zakona gibanja planeta oko Sunca. Zato ćemo sada naprije spomenuti te zakone, a potom ćemo prijeći na Newtonov zakon gravitacije.
Kepler je (navodno) izveo svoja tri zakona na osnovi preciznih mjerenja, za tadašnje mogućnosti, danskog astronoma Tycha Brahea.

Keplerovi zakoni

1.) Planet se oko Sunca giba po elipsi. U jednom žarištu elipse nalazi se Sunce.



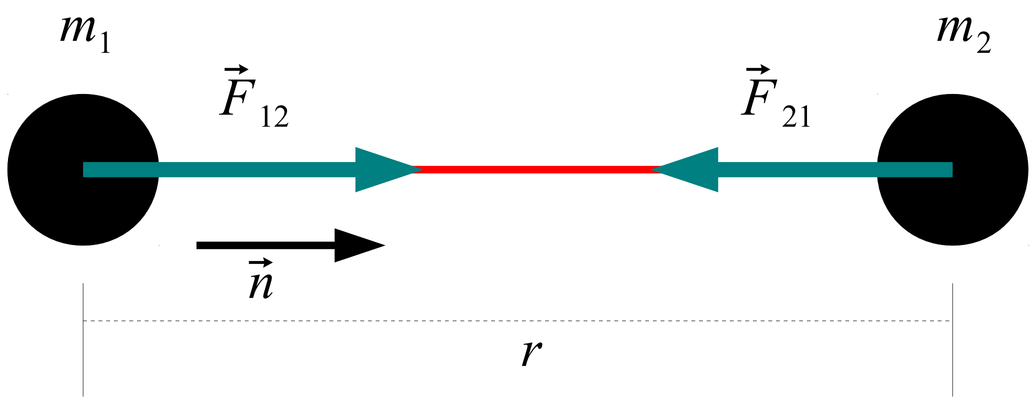
2.) U jednakim vremenskim razmacima planet, gibajući se oko Sunca, prebriše jednake površine.

$$t_2 - t_1 = t_4 - t_3 \;\Rightarrow\; S_{12} = S_{34}$$

3.) Omjer kvadrata vremena ophodnje i kuba velike poluosi jednak je za sve planete u Sunčevu sustavu

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$

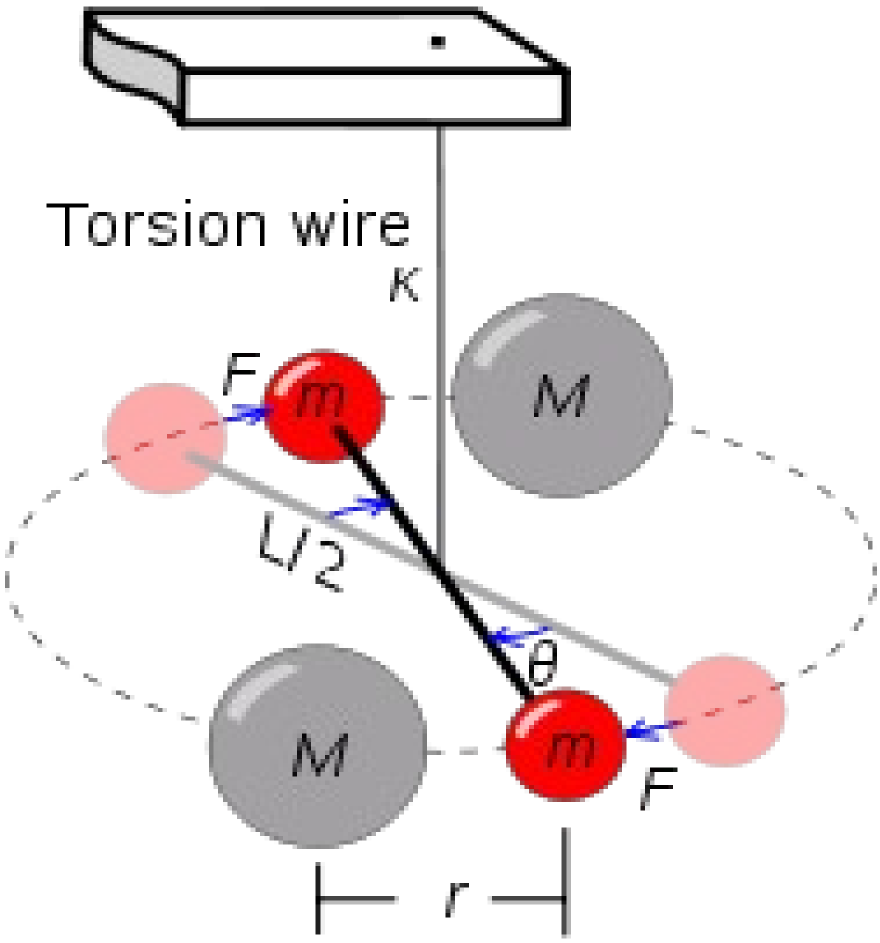
Newtonov zakon gravitacije za točkaste mase kaže:
Sila između točaka razmjerna je umnošku njihovih masa i obrnuto razmjerna kvadratu njihove udaljenosti. Smjer je sile na spojnici točaka i sila je privlačna



$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{n} = -\vec{F}_{21}$$

Ovdje je *G* tzv. gravitacijska konstanta čija vrijednost ovisi o sustavu mjernih jedinica. Tu konstantu prvi je izmjerio Cavendish 1797. godine, premda mu to nije bio cilj. Njegova namjera bila je izmjeriti gustoću Zemlje. No, iz njegovog rezultata za gustoću Zemlje od $5448\,kg\,m^{-3}$ može se izračunati konstanta *G,* koja iznosi

$$G = 6{,}74\cdot 10^{-11}\,m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}$$



http://en.wikipedia.org/wiki/Cavendish_experiment

Današnja je vrijednost gravitacijske konstante

$$G = 6{,}67259 \cdot 10^{-11}\, m^3\, kg^{-1}\, s^{-2}$$

Ali kakve to veze ima s gibanjima planeta oko Sunca?
Upravo u tome i je stvar, što je zakon gravitacije toliko opći, barem po pretpostavci, da se gibanja planeta mogu opisati s pomoću nekih veličina izmjerenih u laboratoriju. Tako je i Cavendish "izvagao Zemlju" u laboratoriju.

Dva tijela, shvaćena kao točkaste mase, pod djelovanjem samo gravitacijske sile među njima i primjenom drugog Newtonovog zakona imaju sljedeće jednadžbe gibanja:

$$m_1 \vec{a}_1 = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

$$m_2 \vec{a}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

Iz ovih dviju jednadžbi slijedi da se središte mase giba jednoliko po pravcu ili miruje. Taj zaključak slijedi ako ove dvije jednadžbe zbrojimo. Zato ćemo uvesti dvije nove koordinate:

$$\vec{r}_{SM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad , \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

odnosno

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{SM} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad , \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_{SM} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

Izražene s pomoću novih koordinata, jednadžbe gibanja imaju oblik:

$$\vec{a}_{SM}=0 \quad , \quad \vec{a}=\frac{d^2\vec{r}}{d\,t^2}=-G\frac{m_1+m_2}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$$

Gibanje središta mase je jednostavno jednoliko gibanje po pravcu. Relativno gibanje dviju masa, međutim, ima oblik koji sadrži ukupnu masu i koji kaže da je relativno ubrzanje tijela razmjerno ukupnoj masi i obrnuto razmjerno kvadratu udaljenosti između masa. Takav je oblik bio moguć zato što smo prešutno pretpostavili da su dvije mase jednoga tijela, koje načelno možemo razlikovati, naime troma i teška masa, jednake. Troma masa je ona koja se nalazi u drugom Newtonovom zakonu. Teška je masa ona koja definira gravitacijsko privlačenje.

Te dvije vrste masa ne moraju biti jednake, ali svi pokusi do sada provedeni s velikom preciznošću pokazuju da troma i teška masa jesu jednake.

Iz jednadžbe relativnog gibanja slijede Keplerovi zakoni. Mi ćemo ih ovdje dokazati samo za kružna gibanja, koja su posebno rješenje te jednadžbe. S malo više matematičke vještine može se pokazati da je opće rješenje jednadžbe relativnog gibanja elipsa. Kružnica je samo posebni slučaj elipse kojoj su obje poluosi jednake i žarišta se poklapaju u središtu kružnice.

Dakle, za kružno gibanje imamo *r*= *konst.*, i prema tome relativno ubrzanje je centripetalno ubrzanje

$$\vec{a}=\vec{a}_c=-\omega^2\vec{r}$$

Iz jednadžbe gibanja tada slijedi

$$\omega^2=G\frac{m_1+m_2}{r^3} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=G\frac{m_1+m_2}{r^3} \Rightarrow \frac{T^2}{r^3}=\frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}$$

Budući da su mase planeta male u usporedbi s masom Sunca, gornji je izraz izravna potvrda 3. Keplerovog zakona. A 2. je Keplerov zakon potvrđen time što je kutna brzina konstantna, pa je samo po sebi jasno da vektor položaja koji se jednoliko okreće u jednakim vremenskim razmacima prebriše jednake površine.

Gravitacijska potencijalna energija

Gravitacijska se sila može prikazati kao negativni gradijent skalarne veličine—potencijalne energije.
Naime, imamo jednakost

$$\vec{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Prema tome, gravitacijska sila

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^3}\vec{r} = -\vec{\nabla}\left(-G\frac{m_1 m_2}{r}\right)$$

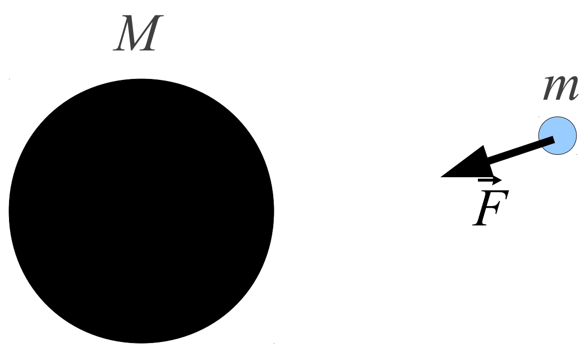
ima potencijalnu energiju

$$E_g = -G\frac{m_1 m_2}{r}$$

Negativni predznak u ovom izrazu znači da je sila privlačna.

Gravitacijsko polje

Gravitacijsko polje definiramo na sljedeći način. Uzmimo jednu proizvoljno malu masu m koju stavimo u blizinu konačne, ali i relativno velike, mase M. Između tih dviju masa postojat će privlačna sila $\vec{F}$. Kažemo da se masa m nalazi u gravitacijskom polju koje je jednako omjeru sile i mase.



$$\vec{a} = \lim_{m\to 0}\frac{\vec{F}}{m}$$

Vidimo da gravitacijsko polje ima smisao ubrzanja i izražava se u istoj mjernoj jedinici. Tako je gravitacijsko polje Zemlje jednako

$$\vec{g}=-G\frac{M_Z}{r^3}\vec{r}$$

gdje je *r* udaljenost od središta Zemlje (zapravo od središta mase Zemlje), a vektor $\vec{r}$ ima smjer i orijentaciju od toga središta prema van. Dakle, gravitacijsko polje Zemlje ovisi o udaljenosti od njezina središta—što smo dalje od toga središta polje je slabije. Na samoj površini Zemlje znamo to ubrzanje--ono iznosi 9,81 $m\,s^{-2}$ i prema teoriji to mora biti jednako

$$g=G\frac{M_Z}{R_Z^2}$$

Dakle, ako znamo polumjer Zemlje R_Z i gravitacijsku konstantu *G*, a *g* možemo izmjeriti u laboratoriju metrom i satom, iz Newtonova zakona gravitacije možemo lako izračunati masu Zemlje.
Gravitacijsko polje Zemlje na nekoj visini *h* iznad njezine površine po iznosu je jednako:

$$g(h)=G\frac{M_Z}{(R_Z+h)^2}=g(0)\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R_Z}\right)^2}$$

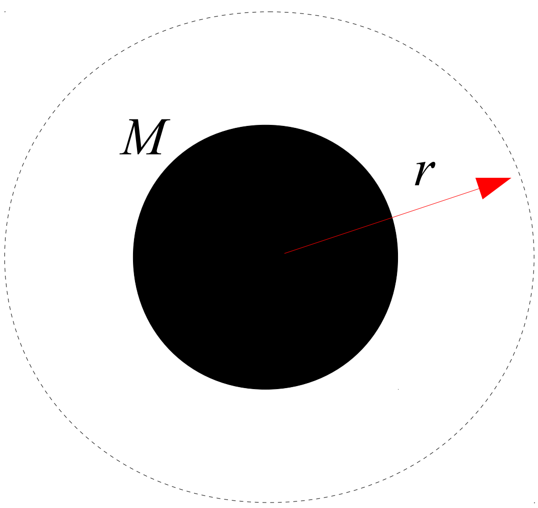
Gravitacijski potencijal

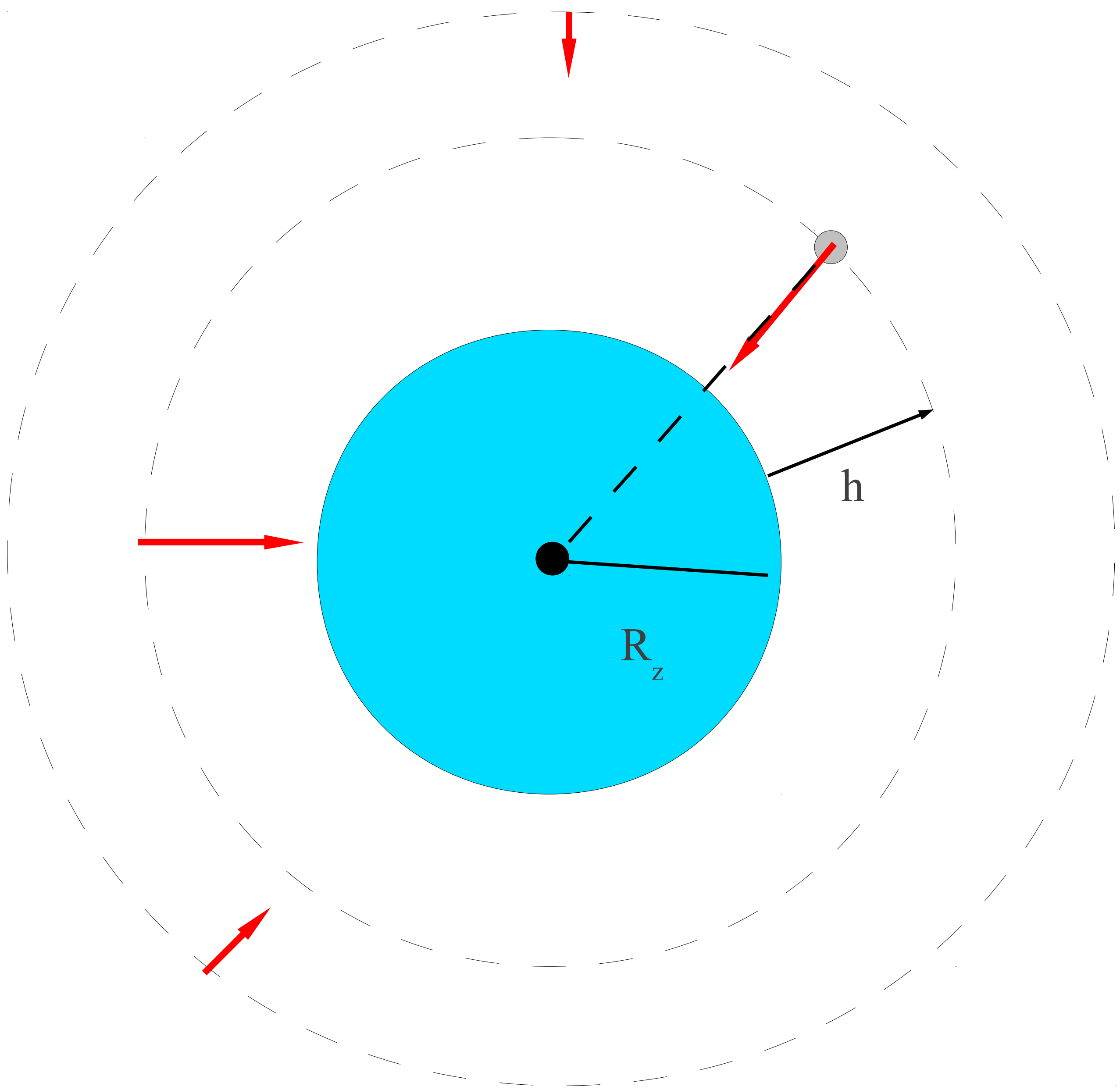
Gravitacijski potencijal definiramo sličnim postupkom kao i gravitacijsko polje, tj. kao omjer potencijalne energije i same mase koja ima tu potencijalnu energiju:

$$\Phi = \lim_{m \to 0} \frac{E_{pot}}{m}$$

Vidimo da ta veličina ima smisao kvadrata brzine. Za sferno simetričnu masu *M* ta je veličina jednaka

$$\Phi(r) = -G\frac{M}{r}$$





Ova slika prikazuje gravitacijsko polje Zemlje. Crvenim strjelicama prikazana su polja u određenim točkama. Primijetite da svi vektori "gledaju" prema središtu Zemlje, te da iznosi tih vektora postaju to manji što je udaljenost od središta Zemlje veća. Naravno, to isto vrijedi i ako gledamo udaljenost od Zemljine površine, *h*, s time da udaljenost od Zemljina središta prikazujemo kao $r=R_z+h$. Jakost polja opada s kvadratom od *r*.

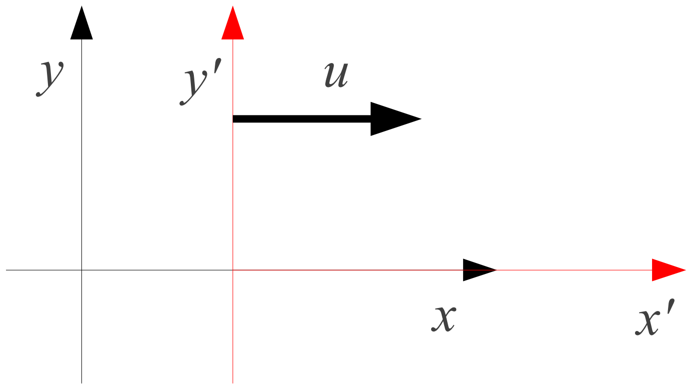
Imamo vrlo važan odnos između gravitacijskog polja i gravitacijskog potencijala

$$\vec{a}=-\vec{\nabla}\Phi(\vec{r})$$

Što nam govori vrijednost gravitacijskog potencijala na površini Zemlje?
To je kvadrat brzine koju bi imao Zemljin satelit kružeći oko Zemlje blizu njezine površine, što je, naravno, zbog otpora zraka, nemoguće postići. Ta se brzina zove prva kozmička brzina. Druga je kozmička brzina ona koju bi tijelo moralo imati kao najmanju, da bi se moglo u potpunosti "odlijepiti" od Zemlje, tj. otići u beskonačnost.

INERCIJSKI SUSTAVI

Ova tema je jako povezana i s prvim Newtonovim zakonom i sa zakonom gravitacije.
Zamislimo dva koordinatna sustava. Jedan sustav miruje, a drugi se u odnosu na prvog giba nekom stalnom brzinom.
Kakve će biti sile u ta dva sustava, ako je to jedina razlika između njih—da jedan miruje, a drugi se giba?



Iz slike je jasno da vrijede sljedeći odnosi:

$$y' = y$$
$$x' = x - u\,t$$
$$t' = t$$

Ovi zakoni transformacije se zovu **Galilejeve transformacije.**
Prešutna je, ali i jako bitna, pretpostavka da je vrijeme u oba sustava jedno te isto—Newtonova se mehanika zasniva na apsolutnosti vremena. Budući da je brzina *u* konstantna, derivacije po vremenu koordinata obaju sustava će dati

$$v' = v - u$$
$$a' = a$$

Ubrzanje će u oba sustava biti jednako. Takva dva sustava zovemo inercijskim sustavima, tj. ako sustav koji "miruje" nazovemo inercijskim, onda su i svi ostali sustavi, koji se u odnosu na njega gibaju konstantnom brzinom, također inercijski. To znači da u inercijskim sustavima drugi Newtonov zakon ima isti oblik. Motivacija za promatranje inercijskih sustava nalazi se u pokušaju odgovora na pitanje: *ako se nalazimo u određenom sustavu, u nekakvom vozilu ili nečem drugom, tako da ne možemo "gledati prema van", niti što čuti izvana, kako ćemo ustanoviti gibamo li se ili mirujemo?*
Zaista, ako se nalazite u vagonu vlaka, može se dogoditi da barem u jednom kratkotrajnom intervalu vremena niste ni svjesni da je vlak pošao. Gledajući kroz prozor vagona na drugi vlak u određenom trenutku možete biti posve nesigurni je li se je taj drugi vlak pokrenuo ili se je vaš vlak pokrenuo. Sve dok ne osjetite nekakav trzaj (tj. ubrzanje) može vam se pričiniti da se vi gibate,a drugi vlak stoji, ili obrnuto. Uglavnom, niste sigurni dok se ne uvjerite na drugi način, naprimjer pogledom na zgradu kolodvora ili čega drugoga za što znate da se ne će gibati. Dakle, "osjećaj" za stvarnost dovodi nas do zaključka da smo se **mi** pokrenuli, a ne kolodvorska zgrada.