SUSTAV MATERIJALNIH TOČAKA

Kada govorimo o sustavu materijalnih točaka onda govorimo o određenom broju različitih, ili istih, materijalnih točaka koje se mogu gibati kao cjelina. "Gibanje sustava kao cjeline" znači da između dijelova sustava, materijalnih točaka, postoji nekakvo međudjelovanje, tako da gibanje jedne točke utječe na gibanje nekih, ili sviju, točaka sustava. Dakle, riječ je o unutrašnjim silama između točaka sustava. Sustav materijalnih točaka podrazumijeva postojanje takvih sila. Drugim riječima, bez tih i takvih sila nema sustava. Naprimjer, pri promatranju srazova dviju kuglica možemo govoriti o sustavu dviju kuglica i o njihovoj ukupnoj količini gibanja jednostavno zato što dolazi do sraza. Onaj jedan kratki trenutak, kada se kuglice sudare, unosi u razmatranje njihovu ukupnu količinu gibanja, pa prema tome možemo govoriti o sustavu dviju kuglica. Kada sraza ili nikakvog drugog međudjelovanja kuglica ne bi bilo, ne bi imalo nikakvog smisla govoriti o sustavu.

Ostali primjeri:

1.) Gibanje automobila, stroja, čovjeka ili životinje kao cjeline podrazumijeva da se različiti dijelovi automobila, stroja, čovjeka ili životinje mogu različito gibati (kotači, strojni dijelovi, ruke, noge, ...) ali ipak je tu riječ o gibanju sustava kao cjeline. Bilo bi vrlo nezgodno kada bi se kotač automobila počeo gibati posve nezavisno od ostalih dijelova vozila, itd.

2.) Gibanje planete Zemlje također spada u primjer gibanja sustava kao cjeline premda se različiti dijelovi planeta--- oceani, mora, rijeke, atmosferski omotač, planine itd.---

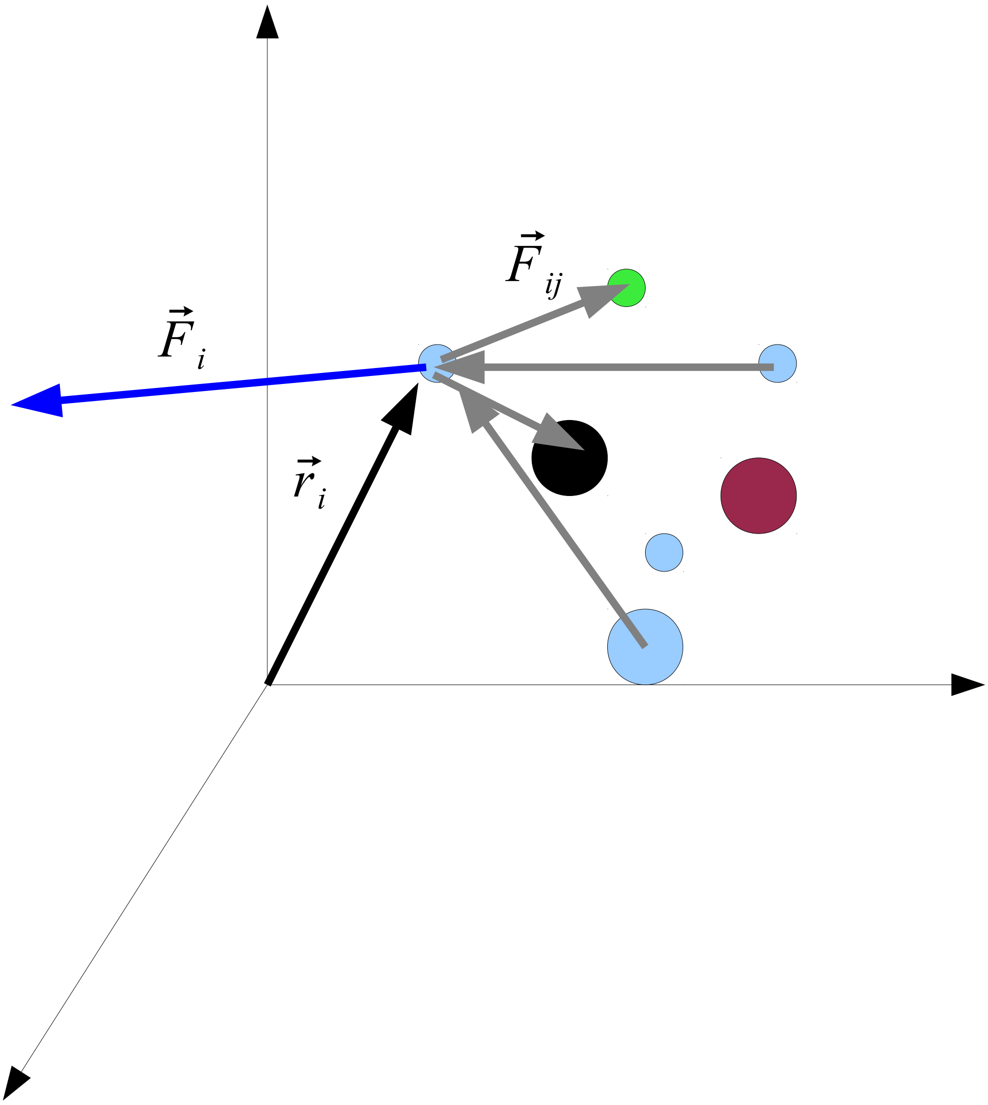
gibaju prilično različito, a mnogi dijelovi planeta gotovo i nezavisno jedni od drugih. No, svi oni su držani "na okupu" gravitacijskim poljem Zemlje, pa se oko Sunca gibaju kao cjelina zajedno sa satelitom zvanim Mjesec.

3.) Sunčev sustav—Sunce + planeti koji se gibaju oko njega--giba se zajednički s nekim drugim, vrlo udaljenim, sustavima oko središta galaksije.

Ovakvim razmatranjem morali bismo doći do zaključka da zapravo u našem svemiru i nema doista nezavisnih dijelova i da bismo svemir morali gledati kao cjelinu. Načelno je to točno, ali praktično neprovedivo i nepotrebno.
Mi ćemo se baviti sa sustavima konačnih razmjera, koje ćemo smatrati određenim cjelinama. Općenito imamo sustav od N materijalnih točaka. Na svaku točku djeluju vanjske sile i unutrašnje sile što potječu od ostalih točaka. Vanjske sile mogu biti posve različite za različite točke, a glavna je značajka tih sila da za njih nemamo 3. Newtonovog zakona. Glavna značajka unutrašnjih sila je upravo primjenljivost 3. Newtonovog zakona.

Ovakvo je razlikovanje vanjskih od unutrašnjih sila upravo ono što definira određeni sustav. Kad bismo i na vanjske sile htjeli primijeniti 3. Newtonov zakon onda bi to jednostavno značilo da smo promatrani sustav proširili s još nekim dijelovima. Iz praktičnih razloga negdje očito moramo stati s uključivanjem novih dijelova. Kad smo razriješili neke filozofske probleme oko toga što je to sustav uopće, konačno možemo prijeći na njegov matematički opis.

Svaka čestica ima svoj vektor položaja, brzinu i ubrzanje. Po 2. Newtonovom zakonu ukupna je sila na česticu jednaka umnošku njezine mase i njezina ubrzanja.



Imamo sustav jednadžbi:

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{j=1}^{N} \vec{F}_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, N$$

gdje je $\vec{F}_i$ vanjska sila na *i*-tu česticu, $\vec{F}_{ij}$ sila kojom *j*-ta čestica djeluje na *i*-tu česticu, a $m_i, \vec{a}_i$ su masa i ubrzanje *i*-te čestice. Treći Newtonov zakon kaže:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

Iz ovog istog zakona slijedi da čestica ne može djelovati na samu sebe.
Ako sustav jednadžbi na str. 3 zbrojimo, tj. zbrojimo sve jednadžbe, vidimo da će se sve unutrašnje sile pokratiti, tj. da vrijedi

$$\sum_{i,j=1}^{N} \vec{F}_{ij} = 0$$

i zbog toga slijedi:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$$

Na desnoj strani ove jednadžbe dobili smo zbroj sviju vanjskih sila, tj. dobili smo ukupnu vanjsku silu. U skladu s time uvodimo ukupnu masu sustava *M* i ukupno ubrzanje $\vec{a}$ tako da vrijedi

$$M\vec{a} = \vec{F} \quad , \quad M = \sum_{i=1}^{N} m_i \quad , \quad \vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \quad , \quad \vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i}{M}$$

Budući da mase čestica smatramo neovisnima o vremenu, u skladu s definicijom ubrzanja sustava kao cjeline definiramo brzinu sustava kao cjeline

$$\vec{v}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{M}$$

i vektor položaja sustava kao cjeline

$$\vec{r}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M}$$

Na ovaj vektor položaja možemo gledati kao na točku u kojoj je sakupljena sva masa sustava, pa zbog toga tu točku zovemo središtem mase. Ubuduće ćemo veličine koje se odnose na središte mase označavati indeksom "SM". Dakle,

$$\vec{a}_{SM}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{a}_i}{M} \quad , \quad \vec{v}_{SM}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{M} \quad , \quad \vec{r}_{SM}=\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M}$$

Naravno da vrijedi

$$\vec{a}_{SM}=\frac{d\,\vec{v}_{SM}}{d\,t}=\frac{d^2\,\vec{r}_{SM}}{d\,t^2}$$

Središte mase sustava zovemo još i njegovim težištem jer ukupna težina sustava očito djeluje u toj točci.
Za kontinuirana tijela položaj središta mase moramo izraziti s pomoću volumnih (trodimenzijskih) integrala jer moramo gledati infinitezimalno male dijelove sustava, tj. infinitezimalno male mase *dm*, koje onda izražavamo s pomoću gustoće, koja može ovisiti o točci u kojoj se nalazi element mase i infinitezimalnog elementa obujma (volumena) *dV*:

$$d\,m = \rho\,dV = \rho\,d^3\vec{r}$$

$$\vec{r}_{SM} = \frac{\iiint \vec{r}\,\rho(\vec{r})\,d^3\vec{r}}{\iiint \rho(\vec{r})\,d^3\vec{r}}$$

Ove definicije imaju vrlo važno svojstvo, a to je svojstvo aditivnosti. Naime, središte mase dvaju ili više tijela, kojima znamo položaje njihovih središta masa, dobijemo kao središte mase točkastih tijela smještenih u središtima masa pojedinačnih tijela. Naprimjer, središte mase Zemlje i Mjeseca možemo dobiti kao da je riječ o točkastim masama smještenima u središtima masa Zemlje i Mjeseca.

KRUTO TIJELO

Kruto je tijelo sustav točkastih masa, ili kontinurane razdiobe mase, takav da se udaljenost između bilo koja dva njegova dijela ne mijenja. Drugim riječima, vrijedi jednadžba

$$\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right| = konstanta$$

za svaki *i* i *j*. Ako na jednu točku krutoga tijela djeluje sila i pomakne tu točku, ostale će se točke pomaknuti tako da navedeni uvjet ostane isti u svakom trenutku. Ako je zbroj sviju sila koje na tijelo djeluju jednak 0, tada možemo pretpostaviti da **središte mase tijela** miruje. No, mirovanje te jedne točke tijela ne znači da i ostale točke moraju također mirovati. Naime, tijelo se može okretati oko određene osi koja prolazi njegovim središtem mase. To okretanje ne će promijeniti gorenavedeni uvjet. Zato ćemo sada definirati neke dinamičke veličine povezane s vrtnjom točkaste mase oko neke osi.

Pri opisu kružnog gibanja vidjeli smo da postoje centripetalno i tangencijalno ubrzanje. No, kada govorimo o krutom tijelu, te veličine za pojedinu točku unutar tijela ne će nas zanimati jer pretpostavljamo da su unutrašnje sile u tijelu dovoljno jake da se međusobna udaljenost između točaka ne mijenja, tj. da sile napetosti u tijelu uravnotežuju različitosti u tim ubrzanjima.

Vrtnju uzrokuje moment sile

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$

i za jednu točku drugi Newtonov zakon kaže

$$\vec{M}=\frac{d\vec{L}}{dt} \quad , \quad \vec{L}=m\vec{r}\times\vec{v}$$

Veličina se $\vec{L}$ zove zamah, ili kutna količina gibanja. No, pri kružnom gibanju brzinu $\vec{v}$ možemo izraziti kao

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

gdje je $\vec{\omega}$ vektor kutne brzine. S pomoću matematičke jednakosti koja vrijedi za bilo koja tri vektora

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$$

vektor zamaha možemo napisati kao

$$\vec{L}=m(\vec{r})^2\vec{\omega}-(\vec{r}\cdot\vec{\omega})\vec{r}=mr^2\vec{\omega}$$

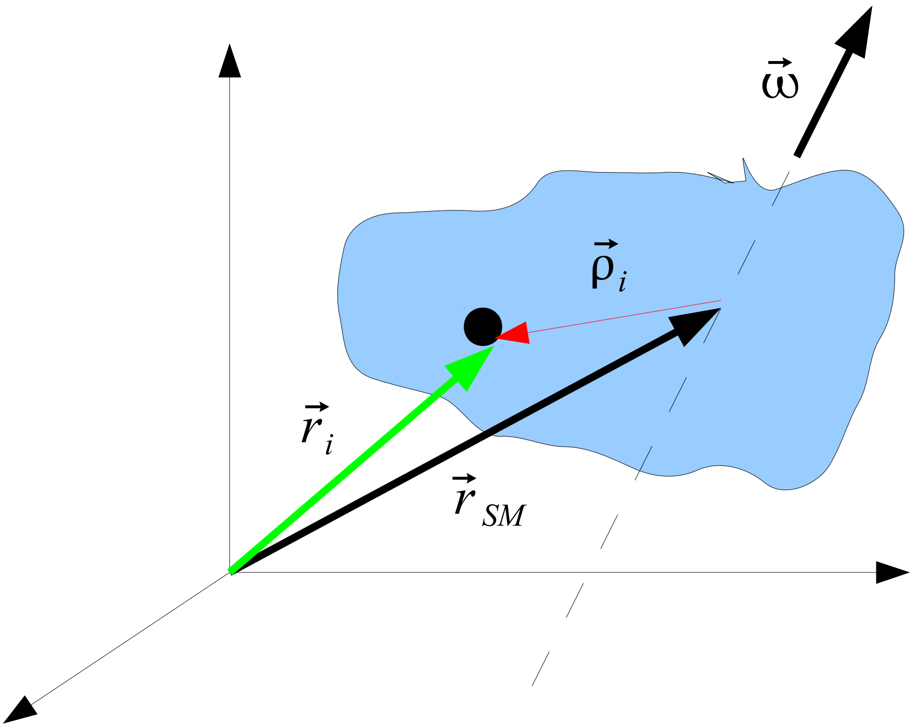
jer je vektor kutne brzine okomit na ravninu vrtnje. Znači da je vektor zamaha razmjeran vektoru kutne brzine. Veličina koja opisuje tu razmjernost zove se moment tromosti I :

$$I=mr^2 \quad , \quad \vec{L}=I\vec{\omega}$$

Kad smo uveli osnovne veličine koje opisuju dinamiku vrtnje jedne materijalne točke, pogledajmo što će biti s tim veličinama za sustav materijalnih točaka.
Ukupni je zamah jednak zbroju pojedinačnih zamaha, a njegova derivacija po vremenu jednaka je ukupnom momentu sviju sila:

$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

No, zašto ovdje nismo za pojedinačne zamahe odmah uvrstili izraz koji je razmjeran kutnoj brzini?
Zato što vektore položaja pojedinačnih čestica mjerimo u odnosu na isto ishodište, što znači da pojedinačni vektori položaja ne moraju svi biti u istoj ravnini premda im je isti vektor kutne brzine



Zato ćemo položaje pojedinačnih čestica mjeriti u odnosu prema središtu mase (vidi prethodnu sliku)

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{SM} + \vec{\rho}_i \quad , \quad \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\rho}_i = 0$$

Gotovo svaki od unutarnjih vektora $\vec{\rho}_i$ ima sastavnicu u smjeru kutne brzine i okomito na nju. No, vektor brzine možemo izraziti kao

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$$

zato što središte mase miruje.
Sada za ukupni zamah dobivamo

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{r}_{SM} + \vec{\rho}_i) \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) = \\ &= \vec{r}_{SM} \times \left[\vec{\omega} \times \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\rho}_i \right) \right] + \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\rho}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\rho}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)\end{aligned}$$

Sada ćemo unutarnje vektore rastaviti na sastavnice u smjeru osi vrtnje i okomito na nju

$$\vec{\rho}_i = \vec{\rho}_{i\parallel} + \vec{\rho}_{i\perp}$$

Ukupni zamah sada je

$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{N} m_i(\rho_{i\parallel}^2+\rho_{i\perp}^2)\vec{\omega}-\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{\rho}_{i\parallel}\cdot\vec{\omega})(\vec{\rho}_{i\parallel}+\vec{\rho}_{i\perp})=$$

$$=\sum_{i=1}^{N} m_i\rho_{i\perp}^2\,\vec{\omega}-\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{\rho}_{i\parallel}\cdot\vec{\omega})\,\vec{\rho}_{i\perp}=I\,\vec{\omega}+\vec{L}_{\perp}$$

gdje su

$$\vec{L}_{\perp}=-\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{\rho}_{i\parallel}\cdot\vec{\omega})\,\vec{\rho}_{i\perp}\quad,\quad I=\sum_{i=1}^{N} m_i\rho_{i\perp}^2$$

Vidimo da ukupni zamah **ne mora** nužno biti u smjeru kutne brzine.
Dio ukupnog zamaha koji je u smjeru kutne brzine sadrži **moment tromosti tijela** I, koji ovisi samo o udaljenosti masenih elemenata od osi vrtnje, tj. o razdiobi mase oko osi vrtnje. Vektor $\vec{L}_{\perp}$ očito je **okomit na os vrtnje** i iščezava za simetrična tijela.

Moment tromosti za kontinuiranu razdiobu mase definiramo na očit način

$$I=\iiint r_{\perp}^2\,\rho(\vec{r})\,d^3\vec{r}$$

Steinerov poučak

Kakav je ukupni zamah ako se tijelo vrti oko čvrste osi koja **ne prolazi** kroz njegovo središte mase?
Prethodni rezultat možemo iskoristiti tako da svim unutarnjim vektorima dodamo jedan konstantni vektor, okomit na os vrtnje, kojega je duljina jednaka udaljenosti osi vrtnje od središta mase:

$$\vec{\rho}_i \rightarrow \vec{\rho}_i + \vec{d}$$

Ova promjena će prouzročiti sljedeće dodatke prethodnim rezultatima:

1.) Središte mase će imati zamah kao da je riječ o točkastoj masi skupljenoj u toj točci. Taj dio moramo pribrojiti u ukupni zamah

2.) Dio ukupnog zamaha okomit na os ne će se promijeniti-ako iščezava za os koja prolazi središtem mase, iščezavat će i i za svaku drugu čvrstu os

3.) Moment tromosti će biti uvećan za moment tromosti točkaste mase, jednakoj masi tijela, skupljenoj u središtu mase, koja se vrti oko zadane osi.

Pokažimo to matematički. Dakle, u prethodnom izrazu za ukupni zamah promijenit će se samo sastavnice unutarnjih vektora koje su okomite na os vrtnje, tj. moramo staviti

$$\vec{\rho_{i\perp}} \rightarrow \vec{\rho_{i\perp}} + \vec{d}$$

Promjena momenta tromosti bit će jednaka:

$$I \rightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\vec{\rho}_{i\perp} + \vec{d} \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\rho}_{i\perp}^{\,2} + 2\vec{d} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\rho}_{i\perp} \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \right) \vec{d}^2 =$$
$$= I + 0 + M \vec{d}^2$$

To možemo napisati ovako:

$$I = I_{SM} + M \vec{d}^2$$

Dio zamaha okomit na os vrtnje, ako uopće postoji, ne će se promijeniti.

Steinerov poučak očito jako pojednostavnjuje izračun momenta tromosti, zato što je dovoljno znati samo momente tromosti za os koja prolazi središtem mase tijela, a nakon toga možemo tijelo zamijeniti s materijalnom točkom mase jednake masi tijela.