SNAGA

Premda možemo obaviti određeni mehanički rad koji, izražen količinski u džulima, može biti jako velik ipak osjećamo da je vrijeme utrošeno za obavljanje utrošenog rada to kraće što smo *snažniji* i to dulje što smo slabiji. Naprimjer, kada bismo htjeli podići teret mase 1000 *kg* na visinu od 1 *m*, morali bismo obaviti rad od 9810 *J*. To nije velika količina energije ako prihvatimo podatak iz "wikipedije", koji kaže da jedan "BigMac" daje 2340 *kJ* , odnosno 2,34 *MJ* energije. No, obični ljudi ne mogu podizati teret od 1000 *kg* jednostavno tako da ga zgrabe i podignu, čak ni onda kada takav teret ima pogodan oblik da ga možemo čvrsto uhvatiti.
Zašto ne možemo podići teret premda imali 200 puta više energije nego što samo podizanje zahtijeva?
Više je ograničavajućih čimbenika u ljudskom tijelu koji sprječavaju i ono što je energetski moguće. Prvo, neovisno o samoj količini raspoložive energije, ljudsko tijelo ne može "proizvesti" silu iznad neke granice. Naprimjer, ne može "proizvesti" silu od 9810 *N*. Drugo, silu koju može "proizvesti" ne može "proizvoditi" dovoljno brzo. Uglavnom, riječ je o vremenu u kojemu valja obaviti određeni mehanički rad. Ta se veličina zove **snaga**. Sve ovo što je rečeno o ljudskom tijelu vrijedi jednako i za mehaničke naprave. Naprimjer, niti određeni elektromotor, ako nema dovoljno veliku snagu, ne će moći podizati određeni teret premda mu je na raspolaganju energija gradske električne mreže, koja je neusporedivo veća od energije ljudskog tijela.

Snagu definiramo kao obavljeni rad u jedinici vremena:

$$P(t)=\frac{dW}{dt}$$

odnosno, ako je riječ o prosječnoj snazi, kao

$$\langle P\rangle=\frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Ako je riječ o gibanju materijalne čestice pod djelovanjem sile $\vec{F}$ trenutnu snagu možemo izračunati kao

$$P(t)=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

Za gibanje okomito na smjer sile nije potrebna nikakva snaga. Zaista, kad ne bi bilo sila trenja, vanjskih i unutarnjih, automobili bi se mogli gibati po vodoravnom tlu bez utroška goriva---trošili bi jedino dok bi se ubrzavali. Zašto?
Zato što bi u takvom slučaju jedina preostala sila bila težina automobila, koja je okomita na vodoravni smjer te ne vrši nikakav rad.

Važno je shvatiti da je rad definiran kao skalarni umnožak dvaju vektora—sile i pomaka, pa je prema tome i snaga potrebna za gibanje čestice jednaka skalarnom umnošku brzine i sile koja je potrebna za održavanje te brzine.

Naprimjer, osoba koja radi teški posao obično ima izlaznu snagu (rad+oslobođena toplina) oko 500 W, za razliku od prosječnog automobilčića koji ima snagu od 50 kW, tj. 100 puta veću od čovjeka.

Slikovito rečeno, snaga je brzina dostupnosti energije potrebne za obavljanje određenoga rada. Svaki osobni automobil može postići brzinu od 100 *km/h*, ali prosječni automobilčić može postići tu brzinu za 13 sekundi, a športski automobili tu brzinu dostižu za 4 sekunde ili manje. To je zato što športski automobili imaju veću snagu. Slično je i sa živim stvorenjima. Mlađi čovjek ima brže i žustrije pokrete od starijeg čovjeka—razlika je u snazi. U prirodi je pogodno promatrati još jednu veličinu, a to je snaga po jedinici mase. Ako tako gledamo onda mrav spada u skupinu najjačih živih stvorenja, zato što može baratati s teretom čija težina višestruko nadmašuje njegovu "osobnu" težinu.

Zadatak:

Koliku najmanju snagu mora imati dizalica da bi mogla teret mase m=1000 *kg* dizati brzinom v=1 *m/s* ?

Rješenje:

Dizalica mora svladavati težinu tereta jednaku G=9810 *N* i držati brzinu tereta jednakom v. Tražena je snaga jednaka

$$P = G\,v = 9810\ W = 9{,}81\ kW.$$

A kakav bismo odgovor dali na pitanje kolika mora biti snaga dizalice da **spušta** isti teret jednakom brzinom?
U tom bi slučaju dizalica morala "apsorbirati" rad izvršen nad njome u jedinici vremena, pa bi odgovor numerički bio jednak kao i prethodnom slučaju. Naime, polazimo od pretpostavke da određeni stroj može "apsorbirati" jednaku količinu rada koliko može i "emitirati". Jasno je da u primjeru spuštanja tereta pomoćnu ulogu imaju i određene kočnice, pa bi u tom slučaju snaga dizalice mogla biti i manja od potrebne snage za podizanje tereta.

SILA I POTENCIJALNA ENERGIJA

Sila je vektor, a potencijalna energija nije vektor. Pitanje je kako mogu biti povezane dvije veličine koje nemaju istu matematičku narav?
Ako imamo gibanje samo u jednoj dimenziji, po jednom pravcu na kojem položaj čestice označavamo s jednom prostornom koordinatom *x*, onda možemo promatrati slučaj kada sila ovisi samo o toj koordinati, a ne i o brzini čestice niti o trenutku *t*. Tada drugi Newtonov zakon ima sljedeći oblik

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=F(x(t)) \qquad (1)$$

Dobili smo diferencijalnu jednadžbu 2. reda, općenito nelinearnu jer sila može ovisiti o prostornoj koordinati na vrlo složen način. No, svaku funkciju jedne varijable možemo barem načelno prikazati kao derivaciju neke druge funkcije po toj istoj varijabli:

$$F(x)=-\frac{dE_{pot}(x)}{dx} \qquad (2)$$

Ako jednadžbu (1) pomnožimo s brzinom, tj. s derivacijom koordinate po vremenu, dobivamo

$$m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{dx}{dt}\frac{dE_{pot}}{dx} \qquad (3)$$

No, na obje strane jednadžbe (3) zapravo imamo derivaciju po vremenu od nekih veličina. Naime, imamo jednakosti

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = 2\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} \quad , \quad \frac{d}{dt}E_{pot}(x(t)) = \frac{dx}{dt}\frac{dE_{pot}(x)}{dx} \qquad (4)$$

Dakle, sada jednadžba (3) ima oblik

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + E_{pot}(x)\right] = 0 \qquad (5)$$

Dobili smo jednakost koja kaže da je zbroj kinetičke i potencijalne energije neovisan o vremenu, tj. da je ukupna energija čestice očuvana. Time smo diferencijalnu jednadžbu drugog reda, naime jednadžbu (1), sveli na diferencijalnu jednadžbu prvog reda, naime jednadžbu (5).
U jednoj prostornoj dimenziji, kada sila ovisi samo o prostornoj koordinati, uvijek možemo drugi Newtonov zakon prikazati u tom obliku. Taj oblik je naročito prikladan za kvalitativno i grafičko prikazivanje gibanja čestice u polju potencijalne energije proizvoljnog oblika.

Brzina čestice ovisi o vremenu samo preko ovisnosti položaja o vremenu, tj. brzina je funkcija položaja. Ako ukupnu energiju označimo s E onda za brzinu v dobivamo

$$v \equiv v(x) = \pm\sqrt{\frac{2(E - E_{pot}(x))}{m}}$$

No, kakvo je gibanje u dvije i tri dimenzije?
Prvo, sila koja bi općenito ovisila o dvjema ili trima prostornim koordinatama uopće ne mora imati potencijalnu energiju.
Ako postoji potencijalna energija, onda se sila dobiva derivacijama po prostornim koordinatama

$$F_x(x,y,z) = -\frac{\partial E_{pot}(x,y,z)}{\partial x}$$
$$F_y(x,y,z) = -\frac{\partial E_{pot}(x,y,z)}{\partial y}$$
$$F_z(x,y,z) = -\frac{\partial E_{pot}(x,y,z)}{\partial z}$$

što se kraće može napisati kao

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_{pot}(x,y,z) =$$
$$= -\left(\frac{\partial E_{pot}(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial E_{pot}(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial E_{pot}(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}\right)$$

Kažemo da je sila negativni gradijent potencijalne energije. Budući da gradijent skalarne funkcije ima smjer porasta vrijednosti funkcije, to znači da sila djeluje suprotno orijentaciji porasta, tj. nastoji smanjiti potencijalnu energiju. Gibanje u polju potencijalne energije uvijek znači to:
sila će uvijek biti **suprotno** orijentirana od porasta potencijalne energije.
Sile koje se mogu izvesti iz potencijalne energije na opisani način zovu se konzervativne sile. Rad tih sila uvijek ovisi samo o krajnjim točkama puta, a ne i o obliku puta između tih točaka.

Međutim, lako je naći primjer sile koja nema potencijalnu energiju. Sve takve sile zovemo disipativnim silama, i one uglavnom smanjuju ukupnu energiju čestice.

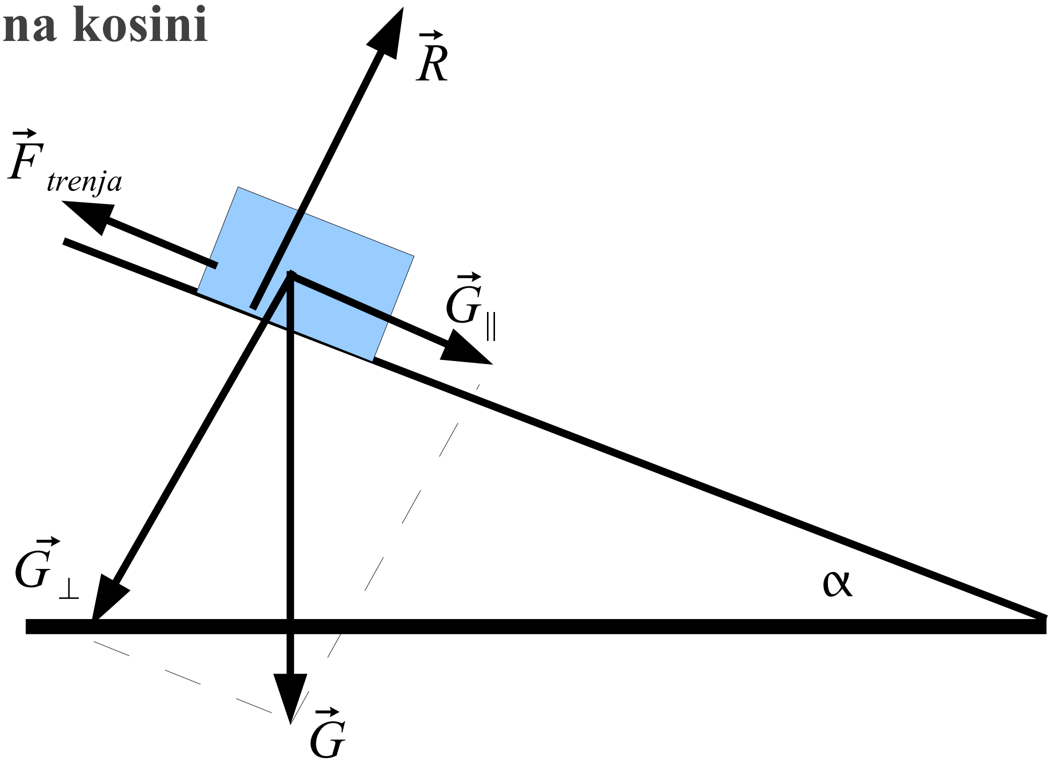
Trenje
U mehanici trenjem nazivamo prianjanje površine jednog predmeta o površinu drugog predmeta. U tom se prianjanju pojavljuje sila koja se suprotstavlja gibanju jedne površine po drugoj. Iskustveno nam je jasno da će iznos te sile—sile trenja-- biti to veći što je veća sila koja pritišće jednu površinu o drugu. Naprimjer, kada hodamo po ledenoj površini onda nagonski osjećamo da moramo hodati "sitnim" koracima ako nemamo prikladnu obuću. Slično tome, kada rukom želimo primiti neki skliski predmet nagonski ga nastojimo što jače stisnuti prstima. Dakle, sila trenja je dijelom našeg svakodnevnog života.

Najjednostavniji opis sile trenja je sljedeći:
Iznos sile trenja razmjeran je iznosu sile koja pritišće jednu površinu o drugu.
To izražavamo formulom

$$F_{trenja} = \mu F_{pritiskanja}$$

Primijetite da ova formula **ne izražava odnos između dvaju vektora nego samo odnos između iznosa vektora.**
Naime, sila trenja djeluje tangencijalno na površinu, a sila pritiskanja okomito na nju. Te dvije sile---sila trenja i sila pritiskanja—međusobno su okomite i zato ne mogu biti razmjerne jedna drugoj **kao vektori**, nego samo mogu biti razmjerni iznosi tih dvaju vektora.
Veličina μ je očito obični broj, kojega nazivamo faktorom ili koeficijentom trenja. Taj broj ovisi o svojstvima površina koje se dodiruju. Također, taj se broj može razlikovati za iste površine ovisno o tome gibaju li se površine jedna po drugoj ili međusobno miruju, pa tako govorimo o dinamičkom odnosno statičkom koeficijentu trenja. Obično je dinamički koeficijent trenja manji od statičkog.

Sile na kosini



Kada nema gibanja:

$$F_{trenja} = G_{\parallel} = G \sin(\alpha)$$
$$R = G_{\perp} = G \cos(\alpha)$$
$$F_{trenja} = \mu R$$

tj. odavde slijedi $\mu = \tan(\alpha)$

Ako je gibanje niz kosinu, onda imamo:

$$m a = G_{\parallel} - F_{trenja}$$
$$F_{trenja} = \mu G_{\perp}$$

odnosno

$$a = g(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha))$$

Ako je gibanje uz kosinu, tj. kada imamo neku vučnu silu, kao u slučaju automobila, onda sila trenja djeluje niz kosinu, pa imamo

$$m\,a = F_{vučna} - G(\sin(\alpha) + \mu\cos(\alpha))$$

Sama ovisnost sile trenja, tj. njezina predznaka, o smjeru gibanja izražava činjenicu da ta sila nije konzervativna. Primijetite da u ovim jednadžbama težina uvijek ima jedan te isti smjer i orijentaciju, neovisno o smjeru gibanja, što izražava činjenicu da je riječ o konzervativnoj sili.

Sila trenja razmjerna brzini

Kad se tijela gibaju kroz fluid (zrak, voda...) na njih djeluje sila trenja koja je po iznosu i smjeru razmjerna brzini tijela, a suprotne je orijentacije od brzine. Dakle,

$$\vec{F}_{tr} = -k\,\vec{v}$$

Konstanta *k* ovisi o obliku tijela i svojstvima fluida (gustoći, viskoznosti,..). Jednadžba gibanja tijela pod djelovanje te sile i, recimo, težine tijela bit će jednaka:

$$m\frac{d\,\vec{v}}{d\,t} = m\,\vec{g} - k\,\vec{v}$$

Vidimo da jednadžba gibanja ima rješenje oblika

$$\vec{v}=\frac{m}{k}\vec{g}=konst.$$

Ova se brzina zove **terminalna brzina**. Ako bismo jednadžbom gibanja opisivali gibanje padobranca, onda je terminalna brzina ona kojom padobranac (poželjno je s otvorenim padobranom) padne na tlo. Omjer mase i koeficijenta k utječe na terminalnu brzinu. U fluidu, gdje postoji sila trenja, u blizinu Zemljine površine ne padaju sva tijela jednako. **Njihova brzina padanja ovisi o njihovoj masi.**
Opće rješenje jednadžbe gibanja dat će nam tzv. balističku krivulju, koja se bitno razlikuje od idealnog kosog hitca.

Primjer:
Dvije geometrijski posve jednake kuglice istodobno s iste visine iznad tla počnu slobodno padati. Uzmimo da je visina dovoljno velika da obje kuglice dostignu svoje terminalne brzine. Budući da se kuglice gibaju kroz isti fluid, naime zrak, i da su geometrijski posve jednake, to znači da je koeficijent k jedan te isti za obje kuglice. Omjer terminalnih brzina kuglica bit će jednak omjeru njihovih masa, što znači da će teža kuglica doći prije do tla i s većom brzinom nego lakša kuglica.

Primjeri nekih konzervativnih sila

1.) U makrosvijetu kao i u mikrosvijetu jako se često pojavljuje **elastična sila**. U tri dimenzije ta sila može biti izotropna kao i anizotropna. Potencijalna energija u kartezijevim koordinatama općenito ima oblik:

$$V(x,y,z)=\frac{1}{2}\left(k_x x^2+k_y y^2+k_z z^2\right)$$

gdje su k_x , k_y , k_z neke elastične konstante. Ako je sila izotropna onda su sve te tri konstante jednake.

2.) Često se pojavljuju i tzv. centralnosimetrične sile, a to su one koje ovise samo o udaljenosti r od određenoga središta. To su:

a) **gravitacijska potencijalna energija**

$$V(r)=-G\frac{m_1 m_2}{r} \quad , \quad r=\sqrt{x^2+x^2+z^2}$$

b) **elektrostatska potencijalna energija**

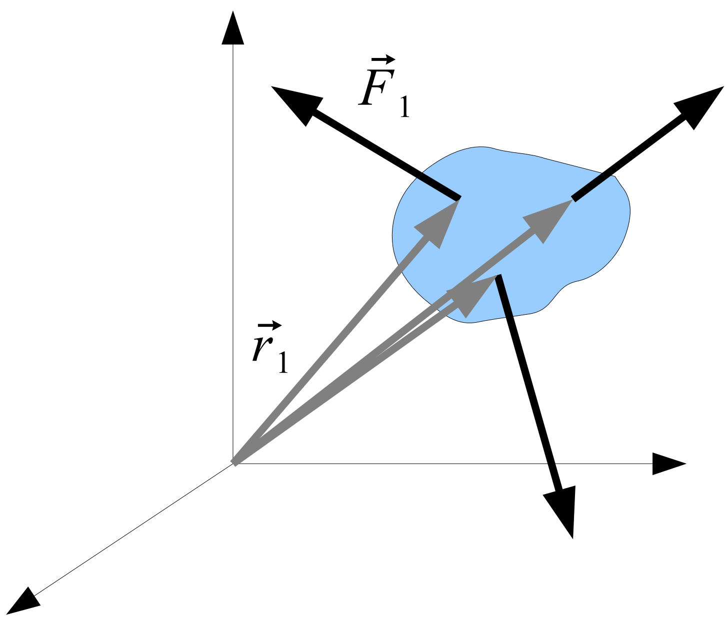
$$V(r)=k\frac{q_1 q_2}{r} \quad , \quad r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

c) **Međuatomska (međumolekulska) sila opisana Lennard-Jonesovom potencijalnom energijom**

$$V(r)=V_0\left[\left(\frac{r_0}{r}\right)^{12}-2\left(\frac{r_0}{r}\right)^{6}\right]$$

Ravnoteža krutog tijela

Do sada smo se bavili dinamikom materijalne točke. Pri tome je materijalna točka služila kao idealizacija bilo kojeg tijela. Za razliku od materijalne točke, kruto tijelo je idealizacija u smislu **nepromjenljivosti oblika tijela pod djelovanjem sila na njega.**
Kad sile djeluju na tijelo, djeluju u nekim točkama tijela, koje zovemo hvatištima sila. Svaka sila ima svoje hvatište. Tijelo će biti u ravnoteži ako je zbroj sviju sila što djeluju na njega jednak 0. No, to nije dovoljno. Za razliku od materijalne točke, tijelo se može **okretati oko neke osi**. To je okretanje također gibanje, premda se tijelo u cjelini ne giba nikamo. Da bismo izrazili zahtjev da nema ni okretanja, moramo **momente sviju sila** izjednačiti s 0.



Uvjeti ravnoteže krutoga tijela su:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_1 \times \vec{F}_i = 0$$

Moment sile

Zašto je moment sile, koji je jednak vektorskom umnošku sile i vektora položaja točke u kojoj sila djeluje, važna veličina? Postoji formalan ali i vrlo važan razlog za to:
za moment se sile može definirati drugi Newtonov zakon upravo kao i za samu silu.
Naime, po drugom je Newtonovu zakonu sila jednaka derivaciji zaleta (količine gibanja) po vremenu:

$$\vec{F} = \frac{d\,\vec{p}}{d\,t}$$

Ako ovu jednadžbu pomnožimo vektorski s vektorom položaja, dobit ćemo:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{d\,(m\,\vec{v})}{d\,t} = \frac{d\,(m\,\vec{r} \times \vec{v})}{d\,t} = \frac{d\,\vec{L}}{d\,t}$$

gdje je

$$\vec{L} = m\,\vec{r} \times \vec{v}$$

zamah iliti kutna količina gibanja.